Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Sähkötekniikka ja elektroniikka
Laskuharjoitus 5

Kimmo Silvonen (X)

10.10.2021

Laskuharjoitus 5

Johdanto (vrt. Kako)

Tehtävät 51-53: tasavirta, heijastus- ja läpäisykerroin

$$\rho = \frac{u_3}{u_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \tag{1}$$

$$\tau = \frac{u_2}{u_1} = 1 + \rho = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \tag{2}$$

$$u_1(0) = U_+ = Z_1 \frac{e}{Z_\mathrm{S} + Z_1} \tag{3}$$

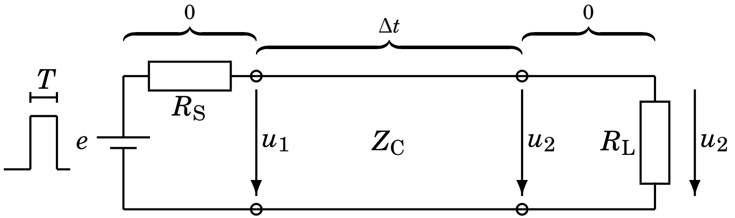
Tehtävä 54: jatkuva sinimuotoinen vaihtovirta, siirtojohtoyhtälöt

$$\begin{cases} U_\mathrm{a} = U_\mathrm{b} \cos \beta s + \mathrm{j} Z_\mathrm{C} I_\mathrm{b} \sin \beta s \\ I_\mathrm{a} = \mathrm{j} \frac{U_\mathrm{b}}{Z_\mathrm{C}} \sin \beta s + I_\mathrm{b} \cos \beta s \end{cases} \tag{4}$$

51. Mitkä ovat pulssien korkeudet $u_2(t)$?

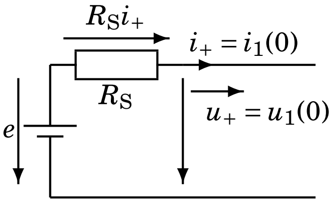
Jännitelähteen ($e = 5$ V) lähettämä pulssi näkyy vaimenevana pulssijonona johdon toisessa päässä, koska $T < 2\Delta t$.

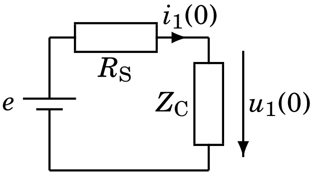
$R_\mathrm{S} = 150\ \Omega$, $Z_\mathrm{C} = 50\ \Omega$, $R_\mathrm{L} = 200\ \Omega$.



Alkutilanne ja sen sijaiskytkentä

Johdolle lähtevä aalto



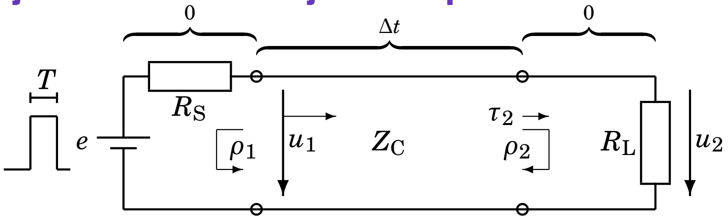


Ominaisimpedanssin määritelmän perusteella $u_1(0) = Z_C i_1(0)$.

Johdolle lähtee ensin pulssi: $u_1(0) = u_+ = e - R_S i_+ = Z_C i_1(0)$:

$$u_1(0) = Z_C i_+ = Z_C \frac{e}{R_S + Z_C} = \frac{1}{4} \cdot e = 1{,}25\,\mathrm{V} \tag{5}$$

Heijastuskertoimet johdon päissä



Ensin tapahtuu heijastus ρ_2

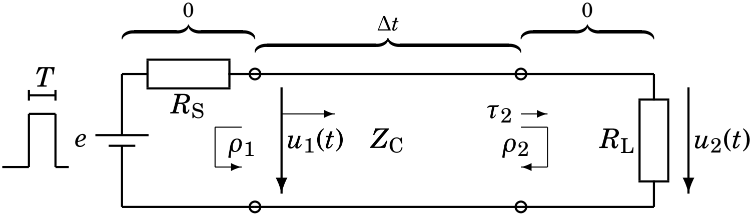
$$\rho_2 = \frac{R_L - Z_C}{R_L + Z_C} = \frac{3}{5} \tag{6}$$

$$\rho_1 = \frac{R_S - Z_C}{R_S + Z_C} = \frac{1}{2} \tag{7}$$

Läpäisykerroin kuormassa:

$$\tau_2 = 1 + \rho_2 = \frac{2R_L}{R_L + Z_C} = \frac{8}{5} \tag{8}$$

Edestakaiset heijastukset



$$t = \Delta t \ldots (\Delta t + T): \qquad u_2(\Delta t) = u_1(0) \cdot \tau_2 = 2\,\mathrm{V} \tag{9}$$

$$t = 3\Delta t \ldots (3\Delta t + T): \qquad u_2(3\Delta t) = u_1(0) \cdot \rho_2 \rho_1 \tau_2 = 0{,}6\,\mathrm{V} \tag{10}$$

$$t = 5\Delta t \ldots (5\Delta t + T): \qquad u_2(5\Delta t) = u_1(0) \cdot \rho_2 \rho_1 \rho_2 \rho_1 \tau_2 = 0{,}18\,\mathrm{V} \tag{11}$$

$$t = 7\Delta t \ldots (7\Delta t + T): \qquad u_2(7\Delta t) = u_1(0) \cdot (\rho_2 \rho_1)^3 \tau_2 = 0{,}054\,\mathrm{V} \tag{12}$$

$$\text{jne.} \tag{13}$$

Tehoa kuluu vain vastuksessa

Voit lisäksi todeta, miten johdolle aluksi lähtevän pulssin $u_+ = u_1(0)$ teho jakautuu osin vastukseen ja osin heijastuneeseen osaan u_-:

$$u_+(0)i_+(0) = u_2(\Delta t)i_{R_\mathrm{L}}(\Delta t) + u_-(\Delta t)i_-(\Delta t) \tag{14}$$

$$\frac{u_+^2}{Z_\mathrm{C}} = \frac{(\tau_2 u_+)^2}{R_\mathrm{L}} + \frac{(\rho_2 u_+)^2}{Z_\mathrm{C}} \tag{15}$$

eli

$$p_+ = p_{R_\mathrm{L}} + p_- \tag{16}$$

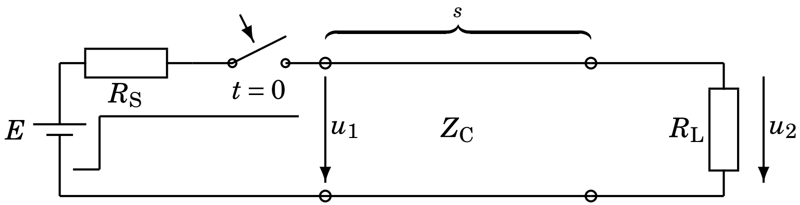
Samanlainen tarkastelu voitaisiin tehdä muille pulsseille.

52. Piirrä jännite $u_2(t)$ ajan funktiona

ottamalla huomioon jänniteaallon edestakaiset heijastukset johdon päissä

Tasajännitelähde liitetään tavalliseen teflon-eristeiseen parijohtoon hetkellä $t = 0$.

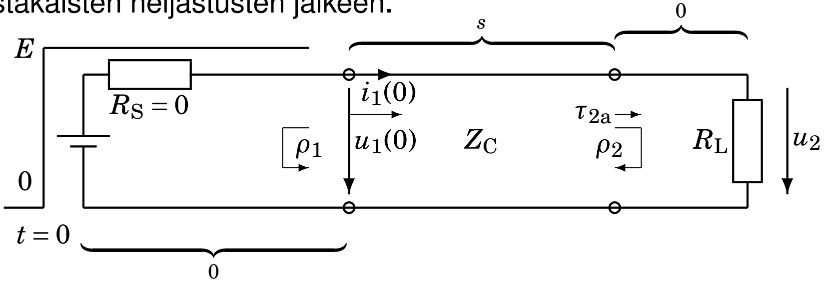
$E = 100$ V, $R_\mathrm{S} = 0\ \Omega$, $Z_\mathrm{C} = 100\ \Omega$, $R_\mathrm{L} = 150\ \Omega$, $s = 4{,}14$ m, $\varepsilon_\mathrm{r} = 2{,}1$.



Ominaisimpedanssin merkitys

Kun johdolle kytketään jännite u_1, alkaa ensin kulkea virta $i_1(0) = \frac{u_1(0)}{Z_C}$.

Samalla jänniteaalto $u_1(0)$ etenee valon nopeudella kohti johdon toista päätä. Lopputilanne $i(\infty) = \frac{E}{R_S+R_L}$ saavutetaan vasta edestakaisten heijastusten jälkeen.



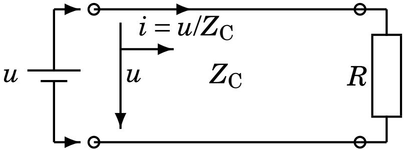
Koska E on nyt jatkuva, ei u_1 tai u_2 sammu koskaan. Siksi seuraavat heijastukset tulevat kuormassa (ja muuallakin) aina edellisten heijastusten päälle!

Aallon kulkuaika johdolla

Johdolle lähtee jatkuva jänniteaalto u

$$s = v\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{s}{v} = \frac{s}{\frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}} = 20\,\mathrm{ns} \tag{17}$$

missä $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s on valon nopeus tyhjiössä.



$$u_1(0) = \frac{Z_C}{R_S + Z_C} E = \frac{1}{\frac{R_S}{Z_C} + 1} E = 100\,\mathrm{V} \tag{18}$$

Yksinkertaisuuden vuoksi lähteen sisäinen vastus R_S on nyt nolla.

Heijastuskertoimet johdon päissä

ja läpäisykerroin kuormassa

$$\rho_2 = \frac{R_\mathrm{L} - Z_\mathrm{C}}{R_\mathrm{L} + Z_\mathrm{C}} = \frac{\frac{R_\mathrm{L}}{Z_\mathrm{C}} - 1}{\frac{R_\mathrm{L}}{Z_\mathrm{C}} + 1} = \frac{0{,}5}{2{,}5} = \frac{1}{5} \tag{19}$$

$$\rho_1 = \frac{R_\mathrm{S} - Z_\mathrm{C}}{R_\mathrm{S} + Z_\mathrm{C}} = \frac{\frac{R_\mathrm{S}}{Z_\mathrm{C}} - 1}{\frac{R_\mathrm{S}}{Z_\mathrm{C}} + 1} = -1 \tag{20}$$

$$\tau_2 = \frac{2R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L} + Z_\mathrm{C}} = \frac{2\,\frac{R_\mathrm{L}}{Z_\mathrm{C}}}{\frac{R_\mathrm{L}}{Z_\mathrm{C}} + 1} = \frac{3{,}0}{2{,}5} = \frac{6}{5} \tag{21}$$

Edestakaiset heijastukset

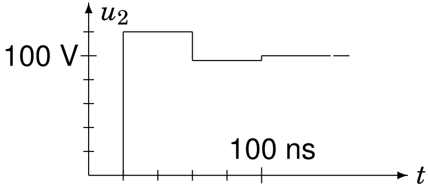
Huomaa, että tässä tehtävässä uudet heijastukset summautuvat vanhoihin, koska lähde syöttää tasajänniteaaltoa jatkuvalla syötöllä:

$$u_2(\Delta t) = \tau_2 u_1(0) = 120\,\mathrm{V} \tag{22}$$

$$u_2(3\Delta t) = \tau_2 u_1(0) + \rho_2\rho_1\tau_2 u_1(0) = \frac{4}{5}\cdot 120\,\mathrm{V} = 96\,\mathrm{V} \tag{23}$$

$$u_2(5\Delta t) = (1 + \rho_2\rho_1 + (\rho_2\rho_1)^2)\tau_2 u_1(0) = 100{,}8\,\mathrm{V} \tag{24}$$

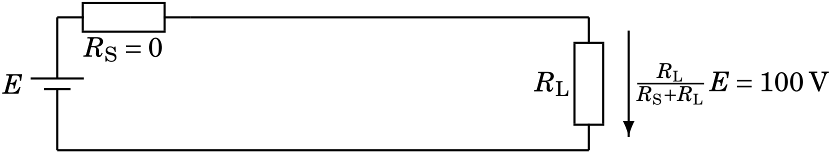
$$u_2(7\Delta t) = (1 + \rho_2\rho_1 + (\rho_2\rho_1)^2 + (\rho_2\rho_1)^3)\tau_2 u_1(0) = 99{,}84\,\mathrm{V} \tag{25}$$



Lopputilanne geometrisen sarjan summana,

jossa peräkkäisten termien suhde $q = \rho_2 \rho_1$

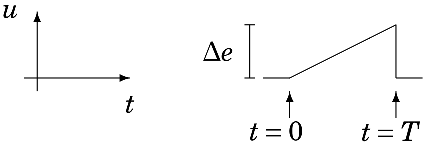
$$u_2(\infty) = \frac{1}{1 - \rho_2 \rho_1} \tau_2 u_1(0) = \frac{1}{1 - \frac{1}{5} \cdot (-1)} \frac{6}{5} \cdot 100 = 100\,\mathrm{V} \quad (26)$$

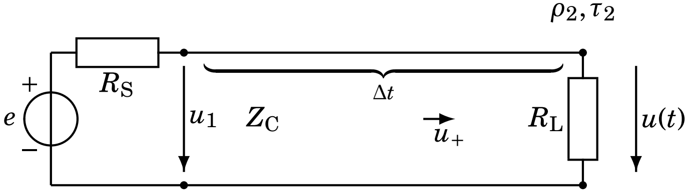


Tulos on täsmälleen sama kuin jännitteenjakajan antama tulos, niinkuin pitääkin olla! Kuorman jännite lähestyy siis nopeasti yllä mainittua raja-arvoa. Samanlainen tarkastelu voitaisiin tehdä, vaikka R_S ei olisikaan nolla.

53. Laske jännite $u(t)$, kun $t = 105$ ns.

Siirtojohdon ominaisimpedanssi on $Z_C = 50\ \Omega$ ja viive $\Delta t = 100$ ns. $\Delta e = 10$ V, $T = 10$ ns, $e(0) = 0$ V, $R_S = 100\ \Omega$, $R_L = 150\ \Omega$.





Heijastus- ja läpäisykerroin

johdon loppupäässä

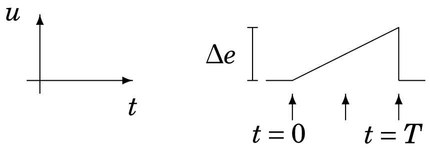
$$\rho_2 = \frac{R_\mathrm{L} - Z_\mathrm{C}}{R_\mathrm{L} + Z_\mathrm{C}} = \frac{1}{2} \tag{27}$$

$$\tau_2 = (1 + \rho_2) = \frac{2R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L} + Z_\mathrm{C}} = \frac{3}{2} \tag{28}$$

Johdolle lähtevä jänniteaalto $u_1(t)$ on aluksi nolla

ja maksimissaan:

$$u_1(T) = \frac{Z_\mathrm{C}}{R_\mathrm{S} + Z_\mathrm{C}} \Delta e = \frac{\Delta e}{3} \tag{29}$$



Hetkellä $t = 105$ ns pulssin alkava eli **matalampi** reuna on ehtinyt jo saavuttaa kuormavastuksen R_L ja heijastunut takaisin. Pulssin nousevalla luiskalla ollaan juuri keskikohdalla eli puolivälissä. Vasemmalta tuleva jänniteaalto on siis $u_+ = \frac{\Delta e}{6}$, joka siis heijastuu ρ_2-kertaisena takaisin:

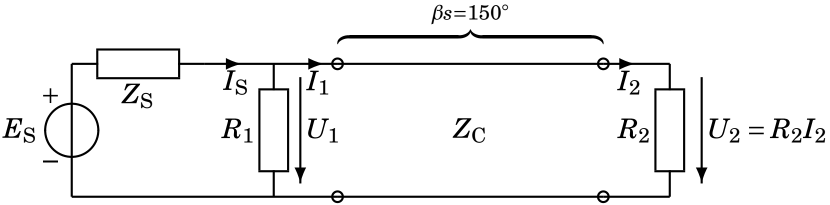
$$u(\Delta t + \frac{T}{2}) = (1 + \rho_2) \cdot u_+ = \tau_2 \cdot u_+ = \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta e}{6} = 2{,}5\,\mathrm{V} \tag{30}$$

54. Laske siirtojohtoyhtälöiden avulla

sinimuotoisen signaalilähteen virta I_{S}

Kuormavirta $I_2 = 1\angle 0°$ A. Se, että kuormavirta on annettu, tekee tehtävän laskennallisesti helpommaksi!

$R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $Z_{\mathrm{C}} = 60\ \Omega$, $s = \frac{5}{12}\lambda$.



$$\beta s = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{5}{12}\lambda = \frac{5\pi}{6} = 150° \qquad (31)$$

Jatkuva siniaalto ja siirtojohtoyhtälöt

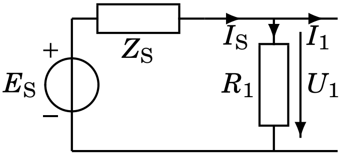
Edellisissä tehtävissä tarkasteltiin tasavirran ja pulssien edestakaisia heijastuksia siirtojohdon päistä. Myös vaihtovirtapulssit heijastelevat samalla tavalla. Tällöin erillisten heijastusten käsittely on hankalampaa, koska myös summattavien aaltojen vaihe-erot on otettava huomioon.

Sinimuotoista tapausta varten on kuitenkin onnistuttu kehittämään kompaktit yhtälöt, jotka laskevat lopputilan jännitteen ja virran kaikkien edestakaisten heijastusten jälkeen. Siniaaltojen yhteydessä tämä onkin juuri se tilanne, mikä yleensä halutaan tietää.

Siirtojohtoyhtälöitä voi siis käyttää vain silloin, kun halutaan laskea lopputilanteen jännite tai virta. Yhtälöt toimivat vain siniaallolla, mikä on käytännössä hyvinkin yleinen tilanne; esimerkiksi radion tai (digi)television antennisignaalia (moduloitu kantoaalto) voidaan tässä tarkastelussa pitää sinimuotoisena.

Siirtojohtoyhtälöt, Kako

Johdon alkupää



$$U_a = U_1 \qquad I_a = I_1 \qquad U_b = U_2 \qquad I_b = I_2 \tag{32}$$

$$U_1 = \overbrace{U_2}^{R_2 I_2} \overbrace{\cos\beta s}^{-\sqrt{3}/2} + \mathrm{j} Z_C I_2 \overbrace{\sin\beta s}^{1/2} = -10\sqrt{3} + \mathrm{j}30 \tag{33}$$

$$I_1 = \mathrm{j}\frac{\overbrace{U_2}^{R_2 I_2}}{Z_C} \overbrace{\sin\beta s}^{1/2} + I_2 \overbrace{\cos\beta s}^{-\sqrt{3}/2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{j}\frac{1}{6} \tag{34}$$

$$I_S = \frac{U_1}{R_1} + I_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \mathrm{j}\frac{19}{6} = 4{,}10\angle 129^\circ \text{ A} \tag{35}$$