Differential- och integralkalkyl 1, MS-A0109

Information

Kontaktuppgifter:

- Björn Ivarsson
  Y326 (bjorn.ivarsson@aalto.fi)

Assistenter: Niklas Miller, Jonas Edström, Kristian Jakobsson

Betyg på kursen kan fås på 2 sätt

1. Övningar samt kurstentamen

Övningstillfälle 1 (måndagar)

3 hemtal (inlämnas fredagen innan) + 3 inlämningsuppgifter (inlämnas onsdagen efter)

$6 \cdot 4$ poäng $= 24$ poäng

Övningstillfälle 2 (torsdagar / fredagar)

- Demonstrationsövningar (4 övningar)
  2 STACK-uppgifter att jobba med
  $2 \cdot 4$ poäng $= 8$ poäng (inlämnas fredag)

Totalt: 172 poäng
50% av betyget; 50% från kurstentamen

2. Tentamen

Talföljder

En talföljd är en "följd av tal"

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_n)_{n=0}^{\infty}$$

<u>Ex</u> $(1, 2, 3, 4, 5, \dots) = (n+1)_{n=0}^{\infty}$

Man kan också tänka på detta med hjälp av funktioner

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad f(n) = a_n$$

(De naturliga talen $= \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$)

<u>Ex</u>: $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ $\quad f(n) = n+1 = a_n$

$(1, 2, 4, 8, \dots)$ $\quad f(n) = a_n = 2^n$

Man kan också beskriva följder rekursivt (eller induktivt).

<u>Ex</u>: $a_{n+1} = a_n + 1 \quad ; \quad a_0 = 0$

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 2, 3, \dots)$$

Ex $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$; $a_0 = 0$ & $a_1 = 1$

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Det behöver inte alltid finnas en formel för a_n.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (3, 1, 4, 1, 5, \ldots)$$

decimalutveckling för π.

Induktionsbevis

Induktionsbevis

Bassteg: Visa att påståendet P_n gäller då $n=0$.
(P_0 är sann.)

Induktionssteg: Visa att om P_n är sann så är P_{n+1} sann.

(P_n är sann $\Longrightarrow$ P_{n+1} är sann)

Om man kan visa bassteg och induktionssteg så är P_n sann för alla $n \in \mathbb{N}$.

Exempel på induktionsbevis

Ex: Vi har en rekursivt definierad talföljd

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad ; \quad a_0 = 0$$

Vi ser $a_1 = 1$, $a_2 = 2+1 = 3$, $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ och $a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

Vi gissar att $a_n = 2^n - 1$ (*)

Vi genomför ett induktionsbevis av (*)

Bassteg: $n = 0$ $\qquad 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = a_0$

OK!

Induktionssteg: Antag att (*) gäller då $n = p$. (Induktionsantagande)

Alltså vi antar att $a_p = 2^p - 1$ och vill visa att det följer att $a_{p+1} = 2^{p+1} - 1$.

$$a_{p+1} = 2a_p + 1 \overset{IA}{=} 2(2^p - 1) + 1 = 2^{p+1} - 2 + 1 = 2^{p+1} - 1$$

OK!

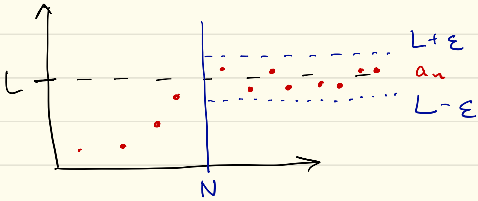
Vi har visat att formeln $a_n = 2^n - 1$ gäller för alla $n \in \mathbb{N}$.

Gränsvärde för talföljd

Vi kommer behöva undersöka vad som händer med a_n då n blir stort. Vi behöver definiera $\lim_{n\to\infty} a_n$

Definition: Vi säger att $L \in \mathbb{R}$ är gränsvärdet för $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ och skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ om för varje $\varepsilon > 0$ det finns N så att

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{om} \quad n \geq N$$



Figur

Ex $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Välj $\varepsilon > 0$. Låt N vara det minsta heltal som är större än $\frac{1}{\varepsilon}$. Vi ser att

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{om} \quad n \geq N$$

Alltså $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Räkneregler

Sats: Antag att $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ och $\lim_{n\to\infty} b_n = M$.
Då gäller

i) $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = L+M$ & $\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n) = L-M$

ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = LM$

iii) Om $M \neq 0$ då $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{M}$

iv) Om $a_n \leq b_n$ för alla n då gäller

$$L \leq M$$

Instängningssatsen: Om $a_n \leq b_n \leq c_n$ för alla n och $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ så är $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Ex Beräkna $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n}$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Gränsvärden behöver inte alltid existera

- $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ divergerar mot ∞
- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ divergent

Ex
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}(3+\frac{1}{n})} = \frac{1}{3}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{2^n} = 0$

"Hastighetstabell"

När n blir stort så gäller

$$\log n \ll n^\alpha \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \quad (0<\alpha<\beta) \quad (a>1)$$

$\ll$ = "mycket mindre än"

Ex $\lim_{n\to\infty} \frac{4+n^7}{n^3+2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7(1+\frac{4}{n^7})}{2^n(1+\frac{n^3}{2^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{2^n} = 0$

Ex $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 1.$