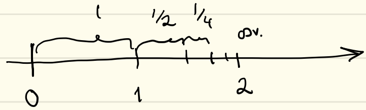
Serier ("Summor med oändligt många termer")

Inledande exampel

Ex:

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots = ?$



Det verkar rimligt att $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots = 2$.

- $1+1+1+1+1+1+\dots = ?$

Det verkar rimligt att $1+1+1+\dots = \infty$

Vi studerar nu i vilken mening likheterna ovan gäller. Givet en talföljd $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ så kan vi bilda en associerad talföljd av så kallade delsummor

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Om $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = A$ så säger vi att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$.

Om $\lim_{n\to\infty} s_n$ är divergent så säger vi att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent.

Viktiga summor

Aritmetisk summa

$$1+2+3+\dots+(n-1)+n=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\begin{array}{r} n+(n-1)+\dots+2+1 \\ \hline (n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)+(n+1) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Ex $\quad 1+2+3+\dots+99+100=\dfrac{100\cdot 101}{2}=5050$

Geometriska summor

Geometriska talföljder: $\quad a_n=Cr^n$

Ex $\quad \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots\right)=\left(1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n=0}^{\infty}$

För en geometrisk talföljd gäller $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ samt $a_0=C$. Om vi summerar termer i en geometrisk följd så får vi

$$S_n=\sum_{j=0}^{n}a_j=\sum_{j=0}^{n}Cr^j$$

Formel för geometriska summor

Vi härleder en formel för geometriska summor.

$$S_n = C + Cr + Cr^2 + \dots + Cr^n$$

$$rS_n = Cr + Cr^2 + \dots + Cr^n + Cr^{n+1}$$

Därför $(1-r)S_n = C - Cr^{n+1}$ och (åtminstone då $r \neq 1$)

$$S_n = \frac{C(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Ex

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Om vi skulle vilja beräkna $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ så får vi alltså

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$$

Ex

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{3^j} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{4}{3^j}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{4/3}{2/3} = \frac{4}{2} = 2$$

Viktig sats

Sats

- $\sum_{j=0}^{\infty} Cr^j = \frac{C}{1-r}$ då $|r|<1$

- $\sum_{j=0}^{\infty} Cr^j$ divergent då $|r| \geq 1$ (och $C \neq 0$)

Allmän teori

Allmän teori för serier

Vanligtvis är det svårt att beräkna en serie exakt. Man får då nöja sig att avgöra om serien konvergerar eller divergerar och sedan approximera (om konvergent)

Sats: Antag att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent.

Då gäller $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(Detta resultat ger ett sätt att avgöra om en serier divergerar. Notera att satsen INTE säger

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent.})$$

$\left[\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konv.}\right]$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}$ är divergent eftersom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0.$$

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ är divergent

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ termer}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Alltså

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Teori för positiva serier

Konvergenskriterier för positiva serier

Positiv serie: alla termer $a_k \geq 0$.

Sats / Axiom (Fullständighet hos $\mathbb{R}$)

Antag att $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad ($a_k \leq a_{k+1}$ och $a_k \leq M < \infty$) då konvergerar $\lim_{k\to\infty} a_k = L \leq M < \infty$.

Jämförelsekriteriet

Detta ger ett viktigt kriterium för positiva serier.

Sats (Jämförelsekriteriet)
Om $0 \le a_k \le M b_k$ för $n \ge K$ då gäller

- Om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent
- Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent (mot ∞) då $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent (mot ∞)

Bevis: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ är växande $(s_n \le s_{n+1})$

$u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ är växande $(u_n \le u_{n+1})$

Dessutom gäller $s_n \le u_n \cdot M$ (+)

Om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent med värde $L \left(= \lim_{n\to\infty} u_n\right)$

Så får vi $s_n \le u_n M \le \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) \cdot M = LM$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n$ existerar $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. ok

(+) kan skrivas $\frac{1}{M} s_n \le u_n$. Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent så gäller $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ och $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ vilket ger $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.