4 "Bevis":

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ex: Derivera $f(x) = \cos(x^2+1)$

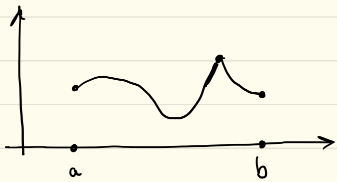
$$f'(x) = 2x \cdot \left(-\sin(x^2+1)\right) = -2x\sin(x^2+1)$$

Optimering

Optimeringsproblem

Hur "stor eller liten" kan en funktion bli?

Strategi



Var kan max/min finnas?

1. Leta kritiska punkter ($f'(x) = 0$), singulära punkter (derivatan existerar ej)
2. Beräkna värden i ändpunkter samt kritiska punkter (och singulära punkter om de finns)

Ex Hitta största och minsta värde för funktionen

$$f(x) = \sin(x^2) \quad \text{på} \quad [-2,2]$$

Lösning:

(1) $f'(x) = 2x\cos(x^2)$

$f'(x) = 0$ då $x=0$ eller $x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ligger i $[-2,2]$

(2) $f(0) = \sin 0 = 0$

$f\left(\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f(\pm 2) = \sin 4 < 0$

—— * ——

På obegränsade / öppna / halv-öppna måste man undersöka gränsvärden istället för ändpunkter.

Medelvärdessatsen

Medelvärdessatsen

Låt $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ vara deriverbar i (a,b).
Då finns $c \in (a,b)$ så att

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

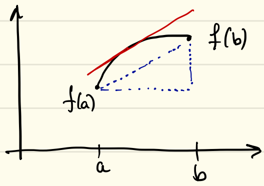
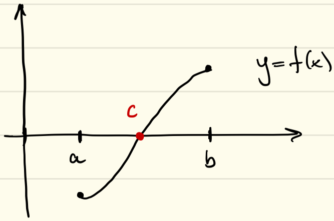


Illustration av medelvärdessatsen

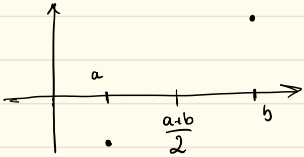
Satsen om mellanliggande värden

Satsen om mellanliggande värden

Låt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ vara kontinuerlig och $f(a)<0$ samt $f(b)>0$ (eller $f(a)>0$ samt $f(b)<0$)
Då finns $c\in(a,b)$ så att $f(c)=0$.



Här döljer sig en numerisk metod för att lösa $f(x)=0$.



Säg att $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ då ligger ett nollställe i $\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$.
Om $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ då ligger ett nollställe i $\left(\frac{a+b}{2},b\right)$

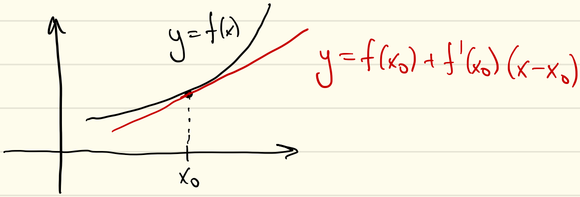
Om $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ då har vi hittat en lösning.

Linjär approximation

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ betyder att nära x_0 så

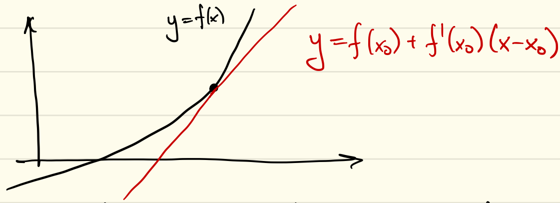
har vi $f'(x_0) \approx \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Detta ger $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$



Här finns också en numerisk metod för $f(x)=0$ "gömd"

Newton-Raphsonmetoden



Istället för att lösa $f(x)=0$ lös $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$

Vi får

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Kalla denna lösning x_1 och fortsätta vid behov.
Vi får en rekursiv formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ex Approximera den positiva roten till $x^3 = 2$ (med andra ord $\sqrt[3]{2}$) genom att göra två steg av Newton-Raphson med $x_0 = 2$.

Lösning:

$$f(x) = x^3 - 2 \qquad f'(x) = 3x^2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3}\frac{1}{x_n^2}$$

$$x_0 = 2 \qquad x_1 = \frac{2}{3}\left(2 + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{27+8}{2 \cdot 9}\right) = \frac{35}{27}$$

Taylorpolynom

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{T_1(x)}$$

Observera att $f(x_0) = T_1(x_0)$ och $f'(x_0) = T_1'(x_0)$

Låt oss försöka hitta ett andragradspolynom som uppfyller

$$f(x_0) = T_2(x_0), \; f'(x_0) = T_2'(x_0) \text{ och } f''(x_0) = T_2''(x_0)$$

Vi ser att

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

uppfyller dessa villkor.

Vi kan hitta polynom av grad n som approximerar $f(x)$ bättre och bättre.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x) \approx T_n(x)$$

$T_n(x)$ kallas Taylorpolynomet av ordning n kring x_0 för $f(x)$.

Ex $f(x) = \sin x$ kring $x_0 = 0$

(kallas ibland Maclaurinpolynom)

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f^{(3)}(x) = -\cos x$;

$f^{(4)}(x) = \sin x$ osv.

$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 0$; $f^{(3)}(0) = -1$; $f^{(4)}(0) = 0$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

Man får bättre och bättre approximation med $T_n(x)$ då n växer

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

På liknande sätt

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$