Taylorpolynom

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{T_1(x)}$$

Observera att $f(x_0) = T_1(x_0)$ och $f'(x_0) = T_1'(x_0)$

Låt oss försöka hitta ett andragradspolynom som uppfyller

$$f(x_0) = T_2(x_0), \; f'(x_0) = T_2'(x_0) \quad \text{och} \quad f''(x_0) = T_2''(x_0)$$

Vi ser att

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

uppfyller dessa villkor.

Vi kan hitta polynom av grad n som approximerar $f(x)$ bättre och bättre.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x) \approx T_n(x)$$

$T_n(x)$ kallas Taylorpolynomet av ordning n kring x_0 för $f(x)$.

Ex $f(x) = \sin x$ kring $x_0 = 0$
(kallas ibland Maclaurinpolynom)

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f^{(3)}(x) = -\cos x$;

$f^{(4)}(x) = \sin x$ osv.

$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 0$; $f^{(3)}(0) = -1$; $f^{(4)}(0) = 0$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

Man får bättre och bättre approximation med $T_n(x)$ då n växer

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

På liknande sätt

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Taylors sats

En viktig fråga är hur väl Taylorpolynom approximerar $f(x)$.

Taylors sats

$$f(x) = T_n(x) + E_n(x) \quad \text{där feltermen}$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = O\left(|x-x_0|^{n+1}\right)$$

$$\leq C\,|x-x_0|^{n+1}$$

s ligger mellan x och x_0.

Ex $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + E_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + E_3(x)$

$$|E_3(x)| \leq \frac{1}{4!}|x|^4 = \frac{1}{24}|x|^4$$

$$\sin 0{,}1 \approx 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^3}{6} \pm \frac{1}{24}(0{,}1)^4$$

L'Hôpitals regel

Om $f(a) = g(a) = 0$ då gäller

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \text{om } g'(a) \neq 0$$

(och HL existerar)

Bevis:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(a)+f'(a)(x-a)+O(|x-a|^2)}{g(a)+g'(a)(x-a)+O(|x-a|^2)} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f'(a)+O(|x-a|)}{g'(a)+O(|x-a|)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \qquad \otimes$$

Ex Standardgränsvärden

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1 \qquad \text{(fusk)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1} = 0$$

Ex

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \left[\begin{array}{l} t = 1/x \\ t\to 0^+ \\ \text{då } x\to\infty \end{array}\right] = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

Ex

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(x^2)}{(1-\cos x)^2}$$

Taylorpolynom kan multipliceras och sammansättas (också deriveras och integreras)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

$$\Longrightarrow \quad \sin(x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^3}{6} + O(x^7) =$$

$$= x^2 - \frac{x^6}{6} + O(x^7)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(x^2)}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \left(x^2 + O(x^3)\right)}{\left(\frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + O(x)}{\frac{1}{4} + O(x)} = 4$$

Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen

Vilken funktion är sin egen derivata?

$$y' = y \qquad y(0) = 1$$

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots =$$

$$= y(x_0) + y(x_0)(x - x_0) + \frac{y(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Speciellt då $x_0 = 0$ får vi

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

och om $x_0 = a$ och $x = a+b$ så

$$y(a+b) = y(a)\,y(b)$$

Precis sådan här egenskaper har exponentialfunktioner

$$y(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e \approx 2{,}71$$

OBS! Def: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Alltså $y(x) = e^x$ och $y'(x) = e^x$

Dessutom $e^0 = 1$ & $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Ex $y(x) = e^{kx}$

$$y'(x) = ke^{kx} = ky(x)$$

Inverterbara funktioner

Inverterbara funktioner

En funktion som är injektiv och surjektiv kallas för bijektiv. Dessa funktioner kan inverteras.

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Notera $\quad f^{-1}(f(x)) = x$ och $f(f^{-1}(y)) = y$

Detta ger en möjlighet att få en formel för derivatan av inversen

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (y = f(x))$$

Ex Invertera $f(x) = x^2$ om det går

Inte injektiv

Studera funktion då $x \geq 0$
Då är den injektiv och

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Alltså $\sqrt{x}$ är invers till x^2 för $x \geq 0$.

Ex Invertera $y = 2x+3$

Lös ut x!

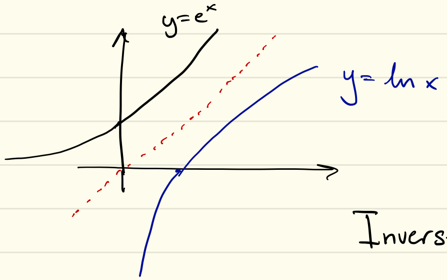
$$y = 2x+3$$

$$x = \frac{y-3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

Logaritmer

Också e^x kan inverteras



Inversen skrivs $y = \ln x$

Notera $e^{\ln x} = x$ samt $\ln e^x = x$

$\ln 1 = 0$ eftersom $e^0 = 1$

Dessutom $a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)}$

$$a \cdot b = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$$

$$\Longrightarrow \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$