Exponentialfunktionen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(x^2)}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(x^2 + O(x^3)\right)}{\left(\frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+O(x)}{\frac{1}{4}+O(x)} = 4$$

Exponentialfunktionen

Vilken funktion är sin egen derivata?

$$y' = y \qquad y(0) = 1$$

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots =$$

$$= y(x_0) + y(x_0)(x-x_0) + \frac{y(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

Speciellt då $x_0 = 0$ får vi

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

och om $x_0 = a$ och $x = a+b$ så

$$y(a+b) = y(a)\,y(b)$$

Precis sådan här egenskaper har exponentialfunktioner

$$y(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e \approx 2{,}71$$

OBS! Def: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Alltså $y(x) = e^x$ och $y'(x) = e^x$

Dessutom $e^0 = 1$ & $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Ex $y(x) = e^{kx}$

$$y'(x) = ke^{kx} = ky(x)$$

Inverterbara funktioner

Inverterbara funktioner

En funktion som är injektiv och surjektiv kallas för bijektiv. Dessa funktioner kan inverteras.

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

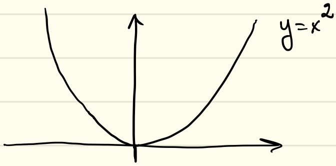
Notera $\quad f^{-1}(f(x)) = x$ och $f(f^{-1}(y)) = y$

Detta ger en möjlighet att få en formel för derivatan av inversen

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = \left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (y = f(x))$$

Ex Invertera $f(x) = x^2$ om det går



Inte injektiv

Studera funktion då $x \geq 0$
Då är den injektiv och

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Alltså $\sqrt{x}$ är invers till x^2 för $x \geq 0$.

<u>Ex</u> Invertera $y = 2x+3$

Lös ut x!

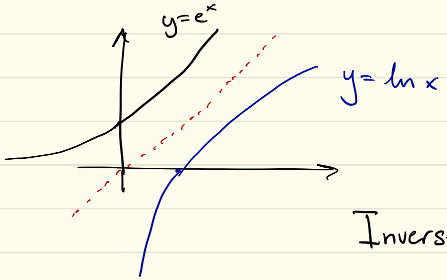
$$y = 2x + 3$$

$$x = \frac{y-3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

Logaritmer

Också e^x kan inverteras



Inversen skrivs $y = \ln x$

<u>Notera</u> $e^{\ln x} = x$ samt $\ln e^x = x$

$\ln 1 = 0$ eftersom $e^0 = 1$

Dessutom $a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)}$

$$a \cdot b = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$$

$$\Longrightarrow \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

På samma sätt

$$\left.\begin{array}{l} a^b = e^{\ln(a^b)} \\ \quad \| \\ (e^{\ln a})^b = e^{b \ln a} \end{array}\right\} \Longrightarrow b \ln a = \ln(a^b)$$

Vad är $\frac{d}{dy} \ln y$? $\quad y = e^x = f(x)$

$$\frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y}$$

Alltså $\quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1}$

Ex $\quad f(x) = 2^x \quad$ Beräkna $f'(x)$.

$$f(x) = 2^x = e^{x \ln 2}$$

$$f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2} = (\ln 2)\, 2^x$$

Logaritmer mer godtycklig bas

Dessutom $\quad y = a^x \iff x = \log_a y$

och $\quad y = a^x = e^{x \ln a} = e^{\ln y}$

$$\Longrightarrow \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

Ex

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

Eulers formel

Det finns ett vackert samband som involverar e^x, $\sin x$ och $\cos x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Stoppa in ix i formeln för e^x och kom ihåg $i^2 = -1$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \cos x + i \sin x$$

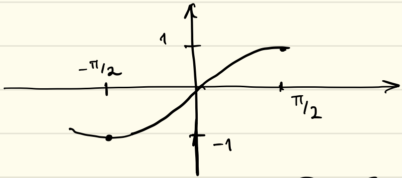
$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$ Eulers formel

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Trigonometriska funktioner

$y = \sin x$



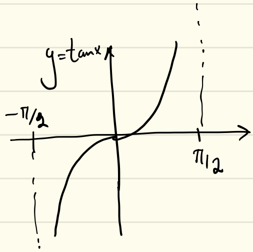
$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

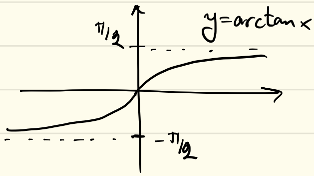
$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \sin x \iff \arcsin y = x \quad \left(\text{om } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$

arccos är invers till $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$

arctan är invers till $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$





Integration och areaberäkning

Vad är $\frac{d}{dx}\arctan x$?

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = f(x) \qquad x = \arctan y = f^{-1}(y)$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Alltså $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

På samma sätt $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Integration och areaberäkning

Areaberäkning

Vad är area? Ett mått på hur mycket yta en figur består av. Vi kan beräkna area av enkla figurer.