BECS-C2102 Sähkö ja magnetismi: ortogonaaliset funktiojoukot **15.1.2016**

Tässä monisteessa käyn lyhyesti läpi funktiojoukon ortogonaalisuuden ja täydellisyyden kevennetyllä matematiikalla eli ikään kuin fyysikon työkalu -näkökulmasta. Jos löydät tästä virheen tai fysikaalisesti merkittävän epätäsmällisyyden, kerro toki!

Olkoon funktiojoukko $U_n(\xi),\ n \in \mathbb{Z}_+$, joka on neliöllisesti integroituva välillä $a \leq \xi \leq b$. Funktiojoukko on ortogonaalinen välillä $a \leq \xi \leq b$, jos joukon minkä tähansa kahden eri funktion välinen sisätulo on nolla:

$$\int_a^b U_m^*(\xi) U_n(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, m \neq n \\ c_n, m = n. \end{cases} \tag{1}$$

Jos $c_n = 1\ \forall n$, joukko on myös normeerattu (eli ortonormaali). Hommaa voi havainnollistaa vaikkapa kantavektorien pistetulolla, $\hat{x} \cdot \hat{y} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ ja $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$.

Funktiojoukko $U_n(\xi)$ on täydellinen välillä $a \leq \xi \leq b$, jos mikä tahansa ”järkevä” funktio tällä välillä voidaan lausua joukon lineaarikombinaationa:

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\xi), \tag{2}$$

jossa notaatio $\sum\limits_{n=1}^{\infty}() = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}()$. Järkevä tarkoittaa tässä funktiota, joka voisi esittää fysikaalista suuretta; pitää esim. olla äärellinen määrä äärellisiä ääriarvoja. Ortogonaalisessa ja täydellisessä funktiojoukossa (eli kannassa) lineaarikombinaation kertoimet a_i voidaan määritellä kertomalla (2) funktiolla U_m^* ja integroimalla ortogonaalisuusvälin yli:

$$\int_a^b U_m^*(\xi) f(\xi) d\xi = \sum_n a_n \int_a^b U_m^*(\xi) U_n(\xi) d\xi = a_n c(n) \delta_{mn} \tag{3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{c_n} \int_a^b U_n^*(\xi) f(\xi) d\xi. \tag{4}$$

Joissakin tapauksissa on joukko on kanta vain esim. parittomille tai parillisille funktioille; ks. sini ja kosini ja Fourierin sarjat. Muita tärkeitä kantoja ovat Legendren polynomit ja palloharmoniset funktiot. Näiden kaikkien ortogonaalisuusrelaatiot löydät kurssin kaavakokoelmasta. Kannat on usein järjestetty siten, että funktion approksimatiiviseen esittämiseen riittää muutama termi sarjaa — esim. palloharmonisissa funktioissa Y_l^m paikkataajuus kasvaa indeksin funktiona.

Matti Stenroos 2016