Systeemi, ympäristö ja energian säilyminen

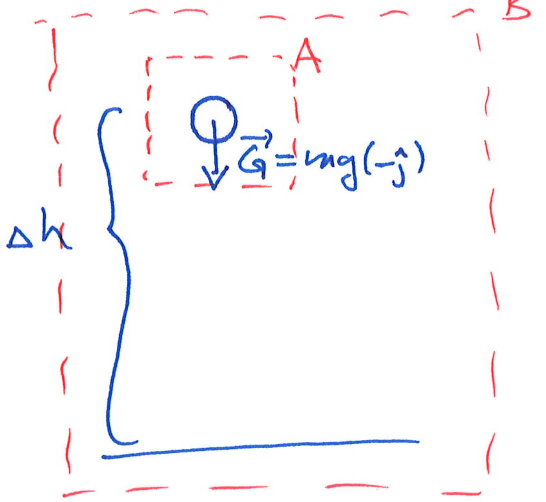
Eri systeemin valinta:

Putoava pallo: tekeekö maapallo (n gravitaatiokenttä) työtä?

pallo
- kyllä: gravitaatiovoima $G = mg$ → työ $W = mg\Delta h$.

pallo + maapallo
- ei: potentiaalienergia $mg\Delta h$ muuttuu kineettiseksi energiaksi mutta kokonaisenergia säilyy.

Systeemi & ympäristö



Systeemi A:

$\vec{G}$ ulkoinen voima
⇒ tekee työtä systeemiin
⇒ systeemin energia kasvaa

$E_A = K$ = kineettinen energia

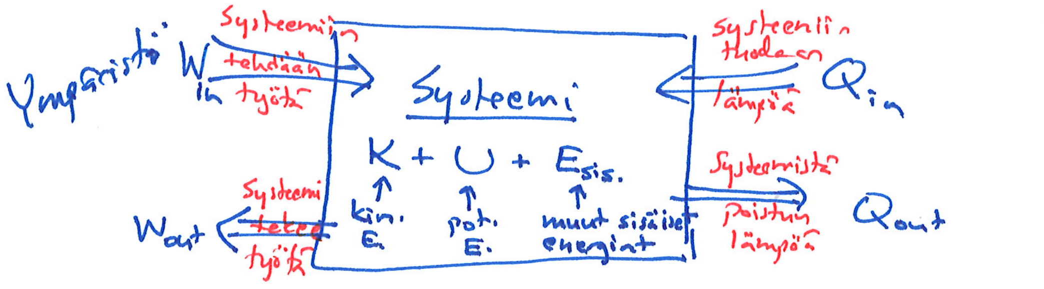
Systeemi B:

ei ulkoisia voimia
⇒ energia säilyy.
⇒ gravitaatiovoima sisäinen
⇒ gravitaatiopotentiaalienergia

⇒ $E_B = K + U$

K: kin. energia, U: potentiaali-energia

Yleisemmin



Voi lisätä muitakin energiamuotoja: säteily, massa, $\vec{E}$, $\vec{B}$, ...

- U = kaikki sisäiset konservatiiviset energiat E_{sis} = kaikki muut

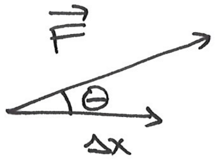
Työ ja konservatiiviset sekä epäkonservatiiviset voimat

Lukion fysiikasta:

Voiman $\vec{F}$ siirtymässä $\Delta\vec{x}$ tekemä työ on

$$W = F\Delta x \cdot \cos\theta$$

missä θ on voiman $\vec{F}$ ja siirtymän $\Delta\vec{x}$ välinen kulma.



Erityisesti

jos $\theta = 0^\circ \Rightarrow W = F\cdot\Delta x$

jos $\theta = 90^\circ \Rightarrow W = 0.$

jos $\theta = 180^\circ \Rightarrow W = -F\cdot\Delta x.$

Vektoreille: $W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{x}$ ↑ pistetulo!

siirtymällä on suuruus & suunta → vektorisuure.

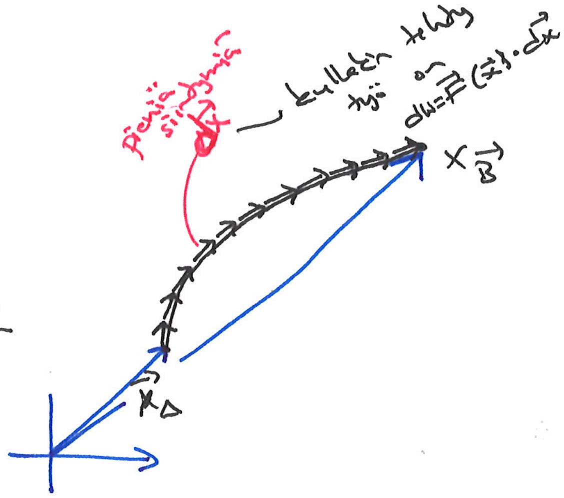
Yo. pätee jos voima on vakio (ei riipu paikasta). Yleisemmin tämä voidaan olettaa vain hyvin pienille siirtymille $d\vec{x}$

$$dW = \vec{F}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

paikan funktio

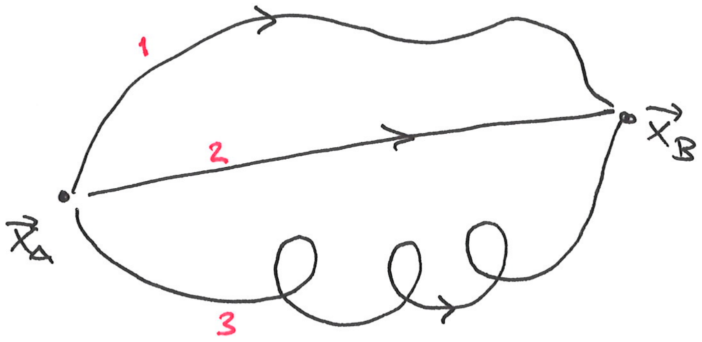
Pitkällä siirtymällä pisteestä $\vec{x}_A$ pisteeseen $\vec{x}_B$ tehty työ saadaan pilkkomalla siirtymä pieniin paloihin ja summaamalla ts. integroimalla

$$W_{AB} = \int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} dW = \int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} \vec{F}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$



Mahdollisia reittejä pisteestä $\vec{x}_A$ pisteeseen $\vec{x}_B$ on monia!

eli polkuja



Kullekin reitille (polulle) voidaan laskea voiman $\vec{F}(\vec{x})$ tekemä työ

$$W_1 = \int_{\vec{x}_A,\ \text{pitkin polkua } 1}^{\vec{x}_B} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

$$W_2 = \int_{\vec{x}_A,\ \text{pitkin polkua } 2}^{\vec{x}_B} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

jne...

Jos tehty työ ei riipu reitistä (polusta)
$\Longrightarrow$ voima $\vec{F}$ on <u>konservatiivinen</u>. (esim. gravitaatio, staattiset sähkökentät)

Jos tehty työ riippuu reitin valinnasta
$\Longrightarrow$ voima $\vec{F}$ on <u>epäkonservatiivinen</u> (esim. kitkavoimat)

Potentiaalienergia

Konservatiiviselle voimalle (tai voimakentälle) voidaan määritellä paikasta $\vec{r}$ riippuva potentiaali $V(\vec{r})$ tai potentiaalienergia $U(\vec{r})$:

- valitse jokin piste $\vec{r}_A$ "nollatasoksi" $\Rightarrow U(\vec{r}_A) = 0$.
- pisteen $\vec{r}$ potentiaalienergia on siirtymällä $\vec{r}_A \to \vec{r}$ voimaa vastaan tehty työ:

$$U(\vec{r}) = -W_{\vec{r}_A \to \vec{r}} = \boxed{-\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = U(\vec{r})}$$

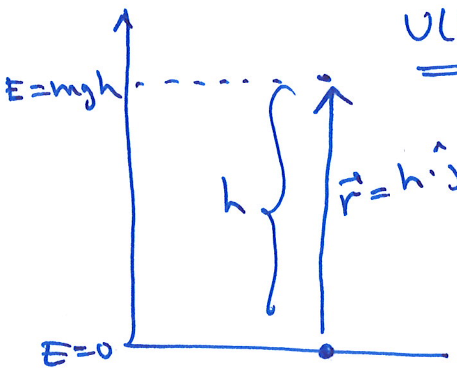
- voimaa $\vec{F}$ vastaan tehty työ W "varastoituu" potentiaalienergiaksi

Huomioita:

- $U(\vec{r})$ ei riipu polusta $\to$ vain yhden paikan $\vec{r}$ funktio.
- jos $\vec{r} = \vec{r}_A \to U(\vec{r}) = 0$, eli suljetulle polulle tehty työ $= 0$.

Esim. Gravitaatiopotentiaalienergia (pienille etäisyyksille)

$$\vec{G} = -mg\hat{j}$$

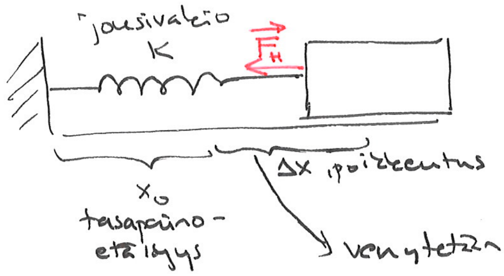


$$\underline{\underline{U(h)}} = -\int_0^h \underbrace{\vec{G}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}}_{-mg\,dx} = -\int_0^h (-mg)\,dx$$

$$= \underbrace{-(-mg)}_{mg} \underbrace{\int_0^h dx}_{h} = \underline{\underline{mgh}}.$$

ELASTISUUSTEORIAA

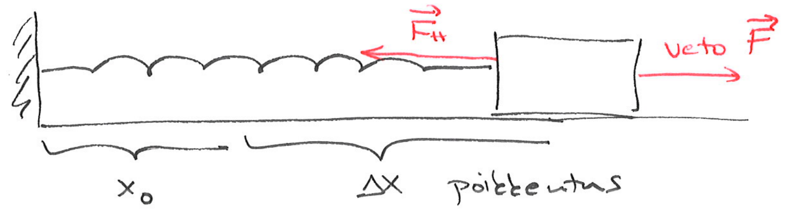
Jousen venytys & Hooken laki

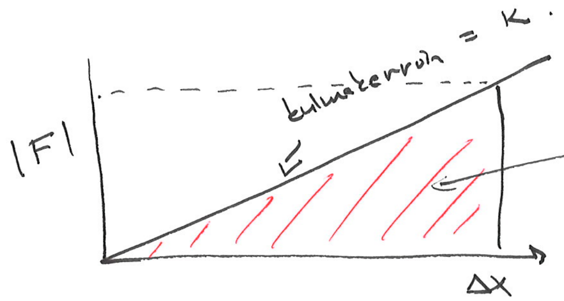


Hooken laki

$$F_H = -k\cdot\Delta x$$

↑ poikkeutus tasapainotilasta





pinta-ala venytyksessä tehtävä työ

$$W = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{(k\cdot\Delta x)}_{\text{korkeus}}\cdot\underbrace{\Delta x}_{\text{leveys}} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2.$$

↑ kolmion pinta-ala

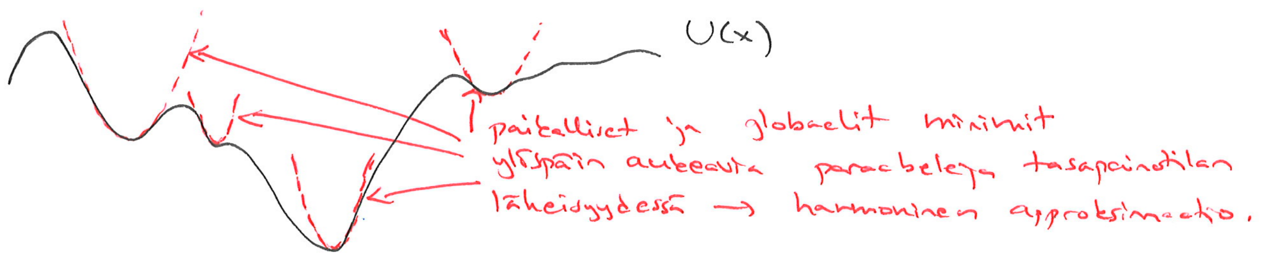
Venytyksen vaatima työ/energia varastoituu jousen potentiaalienergiaksi.

Konservatiivinen voimakenttä

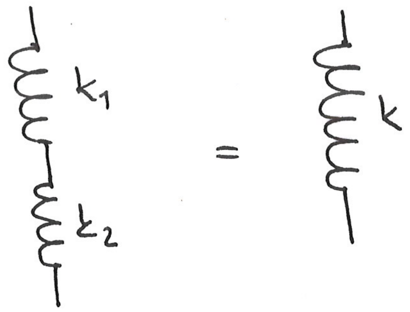
$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

"harmoninen voimakenttä"

(Lähes) mielivaltaisen konservatiivisen voimakentän potentiaalienergia tasapainotilan läheisyydessä on harmoninen:

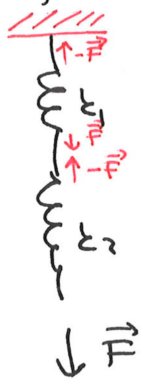


Sarjaan kytketyt jouset



, $k = ?$

Vedetään jousijärjestelmää voimalla $\vec{F}$:



Samansuuruinen voima $|\vec{F}|$ vetää tasapainotilassa nyt molempia jousia.

Jousen 1 venymä: $\Delta x_1 = \frac{F}{k_1}$

Jousen 2 venymä: $\Delta x_2 = \frac{F}{k_2}$

Kokonaisvenymä $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

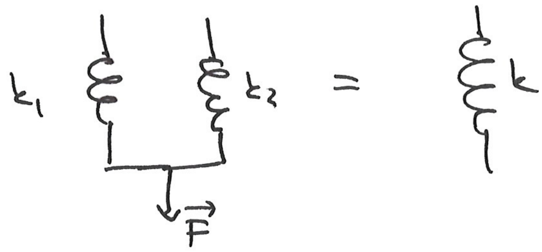
Venyttävä voima siis on $|\vec{F}|$ ja venymä on $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$

→ efektiivinen jousivakio on

$$k = \frac{|\vec{F}|}{\Delta x} = \frac{F}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{F}{\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.}$$

Rinnakkain kytketyt jouset



, $k = ?$

Nyt molempien jousien venymät ovat samat: $\overbrace{\Delta x_1 = \frac{F_1}{k_1}}^{F_1 = k_1 \Delta x_1} = \overbrace{\Delta x_2 = \frac{F_2}{k_2}}^{F_2 = k_2 \Delta x_2}$

Mutta voima $\vec{F}$ siis jakautuu kahden jousen kesken: $F = F_1 + F_2$.

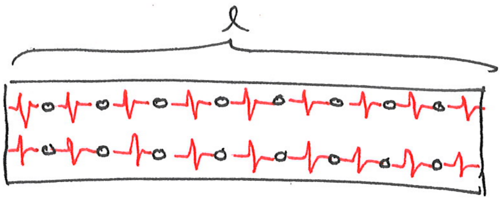
→ efektiivinen jousivakio on

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{F_1 + F_2}{\Delta x} = \frac{k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2}{\Delta x}$$

, koska venymät nyt samat $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$

$$\Rightarrow k = \frac{k_1 \Delta x + k_2 \Delta x}{\Delta x} = \boxed{k_1 + k_2 = k}$$

Palkin jousimalli

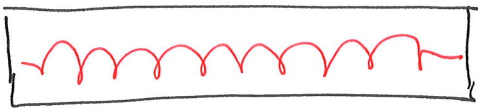


Kappale (palkki) koostuu monesta toisiinsa kytkeytyneistä molekyyleistä. Molekyylien välistä vuorovaikutusta voidaan kuvata yksinkertaisilla jousilla.

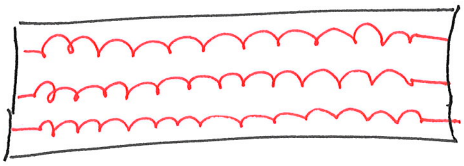
Jos yhden "alkeisjousen" jousivakio on k_0 niin

N peräkkäistä alkeisjousta k_0

vastaa

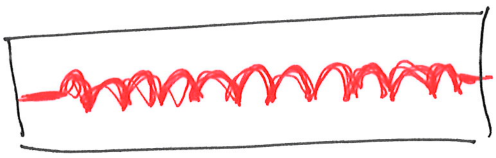


yhtä ekvivalenttia jousta, jonka jousivakio $k_1 = k_0/N$.



M rinnakkaista jousta k_1

vastaa



yhtä ekvivalenttia jousta $k = M \cdot k_1$.

⇒ Palkin "jousivakio"

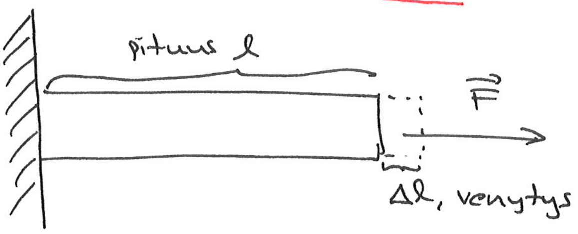
$$\boxed{k = E \cdot \frac{A}{l}}$$

poikkipinta-ala → verrannollinen rinnakkaisten jousten määrään M.

palkin pituus → verrannollinen peräkkäisten jousten määrään N.

jokin materiaalivakio (Youngin moduli)

Palkin venytys



venyttävä voima

Mallinetaan <u>elastisella</u> venytyksellä

Δl: venymä eli pituuden muutos.

Hooken laki: $\boxed{F = +k \cdot \Delta l}$

- F: venyttävä voima
- k: "jousivakio"
- $+$: tarkastellaan vain suuruuksia ⇒ kaikki suureet nyt positiivisia.

jousimalli: $\boxed{k = E \cdot \frac{A}{l}}$ palkin jousivakio

- A: poikkipinta-ala
- l: pituus
- E: materiaalin ominainen kimmomoduli (Youngin moduli)

⇒

$$F = +E \cdot \frac{A}{l} \cdot \Delta l \quad \Big| : A$$

⇒

$$\underbrace{\frac{F}{A}}_{\text{jännitys } =: \sigma} = +E \cdot \underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{\text{suhteellinen venymä } =: \varepsilon}$$

⇒

$$\sigma = +E \cdot \varepsilon$$

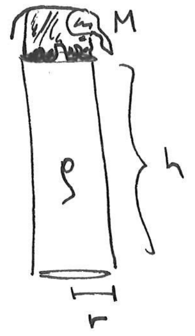
Eli

$$\sigma = E\varepsilon$$

- σ: jännitys
- E: Youngin moduli
- ε: suhteellinen venymä

Keskeistä termistöä

Esimerkki



Mikä oltava betonipylvään säde jotta pylväs kantaisi norsun?

Korkeus $h = 10\,\mathrm{m}$

Betonin tiheys $\rho \simeq 3000\ \mathrm{kg/m^3}$

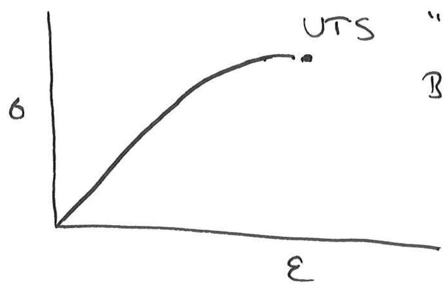
Norsun massa $M \approx 5000\,\mathrm{kg}$

Missä jännitys (puristus) suurin? Pohjalla.

Voima $F = M \cdot g + \underbrace{V \cdot \rho}_{\text{pylvään massa}} \cdot g$, $\quad V = \underset{\substack{\shortparallel \\ \pi r^2}}{A} \cdot h$

$\Rightarrow$ jännitys $\sigma = \dfrac{F}{A} = \dfrac{M \cdot g + V \cdot \rho \cdot g}{A} = \dfrac{Mg}{\underset{\shortparallel\,\pi r^2}{A}} + \rho h g.$

Milloin murtuu?



"Ultimate tensile strength" σ_{crit}.

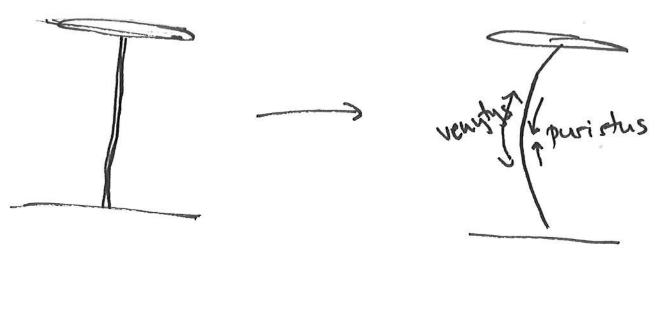
Betonille $\sigma_{crit} \approx 20\,\mathrm{MPa}$ puristuksessa

$\Rightarrow$ kriittinen (minimi) säde r_{crit} kun

$$\sigma = \sigma_{crit} = \frac{Mg}{\pi r_{crit}^2} + \rho h g$$

$$\Rightarrow \quad r_{crit} = \sqrt{\frac{Mg/\pi}{\sigma_{crit} - \rho h g}} \approx \sqrt{\frac{\dfrac{5000\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{\pi}}{20\,\mathrm{MPa} - \underbrace{3000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 10\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}_{3 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}}} \approx \underline{\underline{3\,\mathrm{cm}}}$$

Todellisuudessa 3cm tuskin riittää:



betonin "UTS" venytyksessä paljon puristuskestävyyttä pienempi.