PHYS-A1110 Yliopistofysiikan perusteet (SCI)

Petri Salo

Syksy 2022, II periodi

Petri.Salo@aalto.fi

https://mycourses.aalto.fi/

Kurssikirja: D.C. Giancoli, Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics (4th Edition, Pearson Prentice Hall)

1 Johdanto

Fysiikka on *kokeellinen luonnontiede*. Fysiikan tehtävä on

- havainnoida ja mitata erilaisia luonnonilmiöitä
  - mittauksen tulee olla deterministinen
  - mittauksen tulee olla toistettavissa
- etsiä lainalaisuuksia erilaisten matemaattisten mallien avulla
  - lineaarinen, polynominen, eksponentiaalinen, logaritminen, trigonometrinen, jne. sovitus
- luoda näiden pohjalta erilaisia fysiikan teorioita, periaatteita ja säilymislakeja, joiden tulee
  - olla sopusoinnussa kokeellisten mittausten kanssa
  - antaa ennusteita systeemin käyttäytymisestä erilaisissa olosuhteissa ja tilanteissa
- testata kokeellisesti fysiikan teorioita
  - löytää teorian pätevyysalue
  - luoda uusi teoria vanhan tilalle, jos uudet kokeelliset tulokset eivät ole vanhan teorian kanssa sopusoinnussa

1 Johdanto

- Jokaisesta teoriasta pitää kuitenkin tietää, milloin sitä voidaan soveltaa ja milloin ei. Jokaisella teorialla on oma sovellusalueensa, jonka ulkopuolella se ei enää päde. Esimerkiksi
- Newtonin liikeyhtälö toimii hyvin, kun nopeudet ovat pieniä, mutta suurilla nopeuksilla se ei enää sellaisenaan päde.
- Kvanttimekaniikassa yksittäinen tapahtuma ei ole deterministinen vaan systeemiä pitää kuvata todennäköisyyksien avulla.

- Tekniikassa tunnettava fysiikan perusteet.
- Yleissivistys.

1 Johdanto

Suureet ja yksiköt

Fysikaalinen suure on kappaleen tai ilmiön *mitattava ominaisuus*.

Fysikaalinen suure = lukuarvo $*$ yksikkö ($*$ suunta).

Esim. 1 s, 2 m.

Taulukko 1. SI-perussuureet ja -yksiköt

suure	merkintä	yksikkö	merkintä
pituus	ℓ	metri	m
aika	t	sekunti	s
massa	m	kilogramma	kg
sähkövirta	I	ampeeri	A
lämpötila	T	kelvin	K
ainemäärä	n	mooli	mol
valovoima	I	kandela	cd

Taulukko 2. Johdannnaissuureita ja -yksiköitä

suure	merkintä	yksikkö
pinta-ala	A	m^2
tilavuus	V	m^3
tiheys	ρ	kg/m^3
nopeus	$\vec{v}$	m/s
kiihtyvyys	$\vec{a}$	m/s^2
voima	$\vec{F}$	$\mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$
työ, energia	W, E	$\mathrm{J} = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$
teho	P	$\mathrm{W} = \mathrm{J}/\mathrm{s} = \mathrm{VA}$
taajuus	f	$\mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$
sähkövaraus	Q	$\mathrm{C} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
jännite	V	$\mathrm{V} = \mathrm{J}/\mathrm{C}$
sähkökenttä	$\vec{E}$	$\mathrm{N}/\mathrm{C} = \mathrm{V}/\mathrm{m}$
resistanssi	R	$\Omega = \mathrm{V}/\mathrm{A}$
kapasitanssi	C	$\mathrm{F} = \mathrm{C}/\mathrm{V}$

1 Johdanto

Yksiköitä käytetään aivan samoin kuin lukuarvojakin.

Kertolaskussa tuloksen yksikkö on tulon alkioiden yksiköiden tulo.
Esim.

$$x = vt = \frac{90\ \mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times 3\ \mathrm{h} = 270\ \mathrm{km}.$$

Yhteenlaskussa suureiden yksiköiden pitää olla samat. Jos yksikköjärjestelmät ovat erilaiset, niin toinen yksikkö pitää muuttaa toiseksi ennen lopputuloken laskemista. Helpoin tapa yksiköiden muunnoksessa on kertoa lauseke identtiteetillä (=ykkösellä).
Esim.

$$\begin{aligned} 90\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} &= \frac{90\ \mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times \underbrace{\frac{1000\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}}}_{=1} \times \underbrace{\frac{1\ \mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s}}}_{=1} + 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &= \frac{90 \cdot 1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} + 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 25\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 40\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

1 Johdanto

Tieteellinen merkintätapa

Tarkasteltaessa hyvin suuria tai pieniä lukuja, lyhenteiden käyttö on hyödyksi. Taulukossa on esitetty lyhenteitä eri kymmenen potensseille. Esim. $2 \cdot 10^6$ J $= 2$ MJ.

Taulukko 3. Yksiköiden etuliitteet

nimi	liite	10^x	nimi	liite	10^x
eksa	E	10^{18}	desi	d	10^{-1}
peta	P	10^{15}	sentti	c	10^{-2}
tera	T	10^{12}	milli	m	10^{-3}
giga	G	10^9	mikro	μ	10^{-6}
mega	M	10^6	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^3	piko	p	10^{-12}
hehto	h	10^2	femto	f	10^{-15}
deka	da	10^1	atto	a	10^{-18}

1 Johdanto

Merkitsevät numerot

- Fysikaalisten suureiden arvojen tarkkuudet riippuvat mittaustarkkuudesta.

Esim. Pöydän pituudeksi mitataan $\ell = 2{,}50$ m. Tällöin merkitsevien numeroiden lukumäärä on 3. Tarkkuus annetaan virherajoilla $\ell = (2{,}50 \pm 0{,}01)$ m. (Vrt. laboratoriotyöt.)

- Kerto- ja jakolaskussa tulos ilmoitetaan niin monella merkitsevällä numerolla kuin on vähiten tarkimmassa luvussa.

Esim. $12{,}34 \cdot 4{,}2 = 52$

- Yhteen- ja vähennyslaskussa tulos ilmoitetaan niin monella desimaalilla kuin on vähiten desimaaleja sisältävässä luvussa.

Esim. $12{,}3 \ + \ 0{,}4201 = 12{,}7$

Suuruusluokan arvioiminen

Suuruusluokalla tarkoitetaan karkeaa luvun suuruuden arviointia, jossa käytetään järkeviä oletuksia ja yksinkertaisia laskuja ja joka esitetään lähinnä olevalla kymmenen potenssilla. Käytetään, kun jonkin lukuarvon suuruutta ei tunneta tai kun tarkat laskut olisivat liian monimutkaisia.

Esim. Ajettaessa autoa autonrenkaan pinta kuluu noin

$$\frac{1\,\mathrm{cm}}{100000\,\mathrm{km}} \approx 0{,}1\,\mu\mathrm{m}/\mathrm{km}.$$

Suuruusluokan arvioinnilla saadaan selville, onko saatu tai väitetty tulos oikean suuntainen.

2 Yksiulotteinen liike

Kinematiikka tarkastelee kappaleiden liikettä.

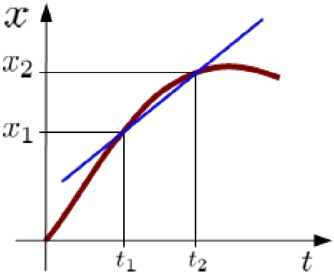
Liikkuessaan pistemäinen kappaleen paikka muuttuu ajan muuttuessa; mitattavat suureet: *paikka* (x) ja *aika* (t).

Kappaleen siirtymä on

$$\Delta x = x_2 - x_1. \qquad (1)$$

Kappaleen keskimääräinen nopeus on

$$v_{\mathrm{av}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (2)$$



Nopeuden yksikkö: $[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

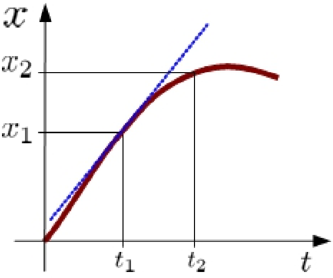
Huom: nopeus = vauhti $*$ suunta.

2 Yksiulotteinen liike

Hetkellinen nopeus on

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}, \qquad (3)$$

jossa $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ ja joka on paikan x derivaatta ajan t suhteen. Hetkellinen nopeus v on käyrän $x(t)$ tangentin kulmakerroin pisteessä t.



Kappaleen keskimääräinen kiihtyvyys on

$$a_{\mathrm{av}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Kiihtyvyyden yksikkö: $[a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

2 Yksiulotteinen liike

Hetkellinen kiihtyvyys on

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}, \tag{5}$$

mikä on v–t-käyrän tangentin kulmakerroin pisteessä t. Lisäksi saadaan

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{6}$$

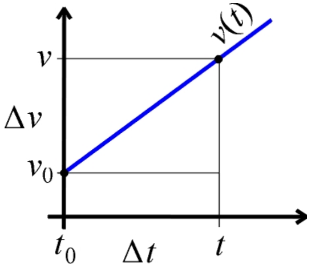
Jos tiedämme kiihtyvyyden a ja kappaleen paikan $x(t_0)$ ja nopeuden $v(t_0)$ jollakin hetkellä t_0, voimme määrätä kappaleen paikan kaikille myöhäisemmille hetkille t.

Dynamiikan yhteydessä nähdään, että kappaleen saama kiihtyvyys määräytyy kappaleeseen kohdistuvista voimista. Siis jos voimat tunnetaan, voidaan kappaleen liike ratkaista.

2 Yksiulotteinen liike

Esim. Tasaisesti kiihtyvä liike: $a =$ vakio

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= x - x_0 \\
\Delta v &= v - v_0 \\
\Delta t &= t - t_0 \\
t_0 &= 0 \\
x_0 &= x(t_0) \\
v_0 &= v(t_0).
\end{aligned}
$$

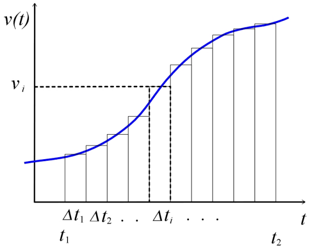


Nyt voidaan johtaa yhtälöt

$$
\begin{aligned}
v(t) &= v_0 + at && (7) \\
x(t) &= x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 && (8) \\
v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta x && (9) \\
v_{\mathrm{av}} &= \tfrac{1}{2}(v_0 + v). && (10)
\end{aligned}
$$

Paikka ja nopeus yleisesti

Tarkastellaan yleisesti $v(t)$–t-käyrää aikavälillä $[t_1, t_2]$, joka jaetaan pienempiin aikaväleihin Δt_i.



Suorakulmioiden pinta-alojen summa on

$$\begin{aligned} &\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_i + \ldots \\ &\approx v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \ldots + v_i \Delta t_i + \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

eli

$$\Delta x \approx \sum_i v_i \Delta t_i, \tag{12}$$

mikä on siirtymä $x_2 - x_1$ aikavälillä $t_2 - t_1$.

2 Yksiulotteinen liike

Kun $\Delta t_i \to 0$, niin summaa yli (infinitesimaalisen) pienten alkioiden kutsutaan integraaliksi

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \tag{13}$$

Integraali antaa $v(t)$-käyrän ja t-akselin rajoittaman alueen fysikaalisen pinta-alan. Toisaalta nopeuden määritelmästä saadaan

$$x = \int v(t)dt, \tag{14}$$

jossa integroimisvakio määräytyy alkuehdosta.
Vastaavasti voidaan johtaa nopeuden muutokselle

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i a_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt \tag{15}$$

tai suoraan määritelmästä

$$v = \int a(t)dt, \tag{16}$$

jossa integroimisvakio määräytyy jälleen alkuehdosta ja jota pitää käyttää, jos kiihtyvyys a ei ole vakio.

2 Yksiulotteinen liike

Tehtävänratkaisuohje:

1. Tutustu hyvin ongelmaan. Mieti, mitä osaa systeemistä tarkastelet ja mitä oletuksia systeemistä voit tehdä.
2. Piirrä kaaviokuva. Valitse koordinaatiston origo ja akselien positiivinen suunta.
3. Kirjoita tunnetut suureet (kaaviokuvaan).
4. Kirjaa periaatteet (tasainen kiihtyvyys, energia säilyy, jne.).
5. Mieti, mitä kysytään. Montako tuntematonta on? $\Rightarrow$ Vähintään yhtä monta yhtälöä.
6. Kirjoita yhtälö(t) ja ratkaise symboleilla kysytty suure.
7. Sijoita lukuarvot ja laske lopputulos. Pidä yksiköt mukana.
8. Tarkista tuloksen i) yksikkö ja ii) tarkkuus, iii) onko suuruusluokka oikein ja tulos järkevä sekä iv) onko fysiikka oikein.
9. Esitä lopputulos.

3 Useampiulotteinen liike

Vektorit

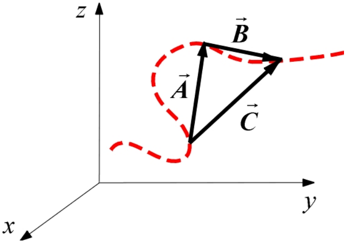
Kun liike tapahtuu useammassa ulottuvuudessa, niin kappaleen siirtymää kuvataan vektorilla, jolla on sekä suuruus että suunta (myös yksikkö). Vektoria merkitään $\vec{A}$ (suuruus $A = |\vec{A}|$).
Vektorisuureita: $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{F}$, ...
Suureita, joilla on suuruus mutta ei suuntaa, kutsutaan skalaareiksi.
Skalaarisuureita: t, T, m, ρ, ...

Kaksi vektoria $\vec{A}$ ja $\vec{B}$ ovat yhtäsuuret, kun

$$A = B \quad \text{ja} \quad \vec{A} \uparrow\uparrow \vec{B}. \qquad (17)$$

Siirtymävektorin yhteenlasku

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}. \qquad (18)$$



3 Useampiulotteinen liike

Kommutatiivisuus

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \tag{19}$$

Assosiatiivisuus

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}). \tag{20}$$

Vektorin $\vec{A}$ vastavektori on $-\vec{A}$, jolle

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}. \tag{21}$$

Vähennyslasku

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}). \tag{22}$$

Skalaarilla kertominen

$$\vec{B} = s\vec{A}, \tag{23}$$

missä $s\vec{A} || \vec{A}$.

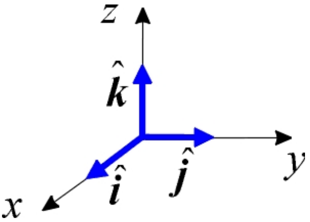
Esim. Voima $\vec{F} = m\vec{a}$.

3 Useampiulotteinen liike

Vektori $\vec{A}$ voidaan esittää yksikkövektoriensa $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ ja $\hat{k}$ ($|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$) avulla komponenttimuodossa

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}, \tag{24}$$

missä A_x, A_y ja A_z ovat skalaareja. Yksikkövektorit valitaan usein siten, että ne ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden.

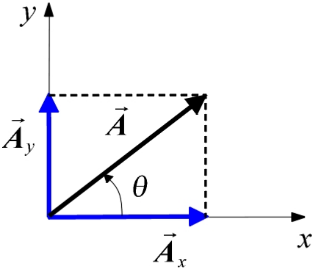


xy-tasossa oleva vektori $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$ voidaan jakaa komponentteihinsa

$$A_x = \vec{A}\cdot\hat{\imath} = A\cos\theta \tag{25}$$
$$A_y = \vec{A}\cdot\hat{\jmath} = A\sin\theta, \tag{26}$$

joista edelleen

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}. \tag{27}$$



3 Useampiulotteinen liike

Vektorin $\vec{A}$ pituus on

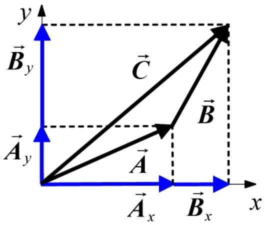
$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{28}$$

ja vektorin $\vec{A}$ suuntainen yksikkövektori

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{A}\hat{\imath} + \frac{A_y}{A}\hat{\jmath} + \frac{A_z}{A}\hat{k}. \tag{29}$$

Tarkastellaan kahta kolmiulotteista vektoria
$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ ja $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$.
Vektorien summa on

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} \\ &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k} \\ &\equiv C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} + C_z\hat{k}. \end{aligned} \tag{30}$$



3 Useampiulotteinen liike

Vektorien skalaaritulo (pistetulo, sisätulo) määritellään (G 7–2)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{31}$$

Skalaaritulo antaa tulokseksi skalaarin.

Esim. Työ $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Skalaaritulo voidaan laskea myös kaavalla

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta, \tag{32}$$

missä $\theta \in [0, \pi]$ on vektorien välinen kulma. Tätä voidaan käyttää myös laskettaessa vektorien välistä kulmaa.
Kohtisuorassa oleville yksikkövektoreille on

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \tag{33}$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0, \tag{34}$$

joka oletetaan jatkossa.

3 Useampiulotteinen liike

Kahden vektorin $\vec{A}$ ja $\vec{B}$ vektoritulo (ristitulo) määritellään (G 11-2)

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= -\vec{B}\times\vec{A} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} \\ &\quad + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \qquad (35)\\ &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \qquad (36)\end{aligned}$$

Näin määritelty vektoritulo on voimassa oikeakätiselle koordinaatistolle.

<u>Esim</u>. Vääntömomentti $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$.

Vektoritulon tulos on myös vektori ja sen pituus saadaan laskettua kaavasta

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta, \qquad (37)$$

missä $\theta \in [0,\pi]$ on vektorien välinen kulma.

3 Useampiulotteinen liike

Vektoritulo on aina kohtisuorassa tulon alkioidensa kanssa:

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k}, \tag{38}$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath}, \tag{39}$$

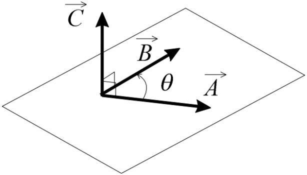
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath} \tag{40}$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0. \tag{41}$$

Yleisesti kaksi vektoria (elleivät ole yhdensuuntaiset) määrää kolmiulotteisessa avaruudessa tason. Näiden vektorien vektoritulo on kohtisuorassa tähän tasoon nähden

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \, \hat{n} = \vec{C}, \tag{42}$$

missä $\hat{n}$ on tason normaali.

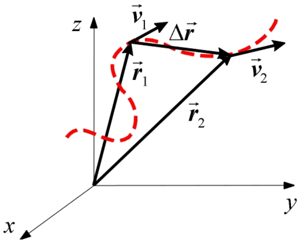


3 Useampiulotteinen liike

Kolmiulotteinen liike

- 3D-liikkeessä tarkastellaan vektorisuureita: $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$.
- Usein 3D-liike kannattaa jakaa sopivasti eri komponentteihinsa ja ratkaista saatava skaalaarisuureiden yhtälöryhmä.
- Usein 3D-liike voidaan rajoittaa tasoon ja tarkastella ainoastaan kahta komponenttia.

Paikka ja nopeus



Kappaleen paikkavektori on

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}. \qquad (43)$$

Kappaleen siirtymävektori on

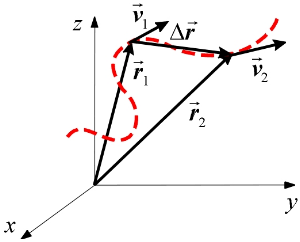
$$\begin{aligned} \Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k} \\ &= \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}. \qquad (44) \end{aligned}$$

3 Useampiulotteinen liike

Kappaleen keskimääräinen nopeusvektori on

$$\vec{v}_{\mathrm{av}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \qquad (45)$$

Hetkellinen nopeusvektori on



$$\begin{aligned}\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \\ &= v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}. \qquad (46)\end{aligned}$$

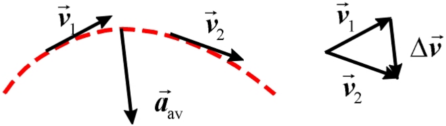
Jokaisessa käyrän pisteessä nopeusvektori on käyrän tangentin suuntainen kyseisessä pisteessä.

3 Useampiulotteinen liike

Kiihtyvyys

Kappaleen keskimääräinen kiihtyvyysvektori on

$$\vec{a}_{\mathrm{av}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (47)$$



Hetkellinen kiihtyvyysvektori on

$$\begin{aligned}\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \\ &= a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}. \end{aligned} \quad (48)$$

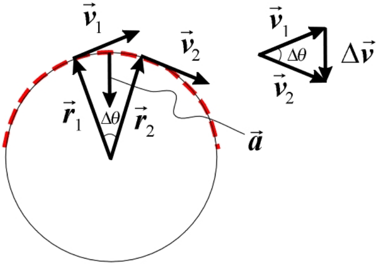
Lisäksi voidaan johtaa lauseke

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}. \quad (49)$$

3 Useampiulotteinen liike

Esim. Tasainen ympyräliike (G 5-2)

$$v_1 = v_2 = v \quad = \quad \text{vakio}$$
$$r_1 = r_2 = r \quad = \quad \text{vakio}$$



Nopeuden suunta muuttuu, joten kappaleeseen vaikuttaa keskeiskiihtyvyys

$$a_\mathrm{r} = \frac{v^2}{r}, \qquad (50)$$

joka osoittaa ympyrän keskipistettä kohti. Tasaisessa ympyräliikkessä olevan kappaleen vauhti on

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \qquad (51)$$

missä $2\pi r$ on ympyrän kehän pituus ja T sen kulkemiseen käytetty aika.

3 Useampiulotteinen liike

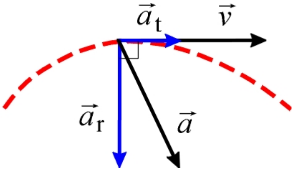
Jotta vektori pysyisi vakiona, pitää sen suuruuden lisäksi suunnankin pysyä muuttumattomana. Esimerkiksi jos auto ajaa vakiovauhdilla kaarteessa, niin silloin sillä on kiihtyvyyttä, koska nopeuden suunta muuttuu. Keskeiskiihtyvyys (*keskihakukiihtyvyys*) osoittaa radan kaarevuuskeskipistettä kohti ja se aiheutuu tien pinnan kitkasta.

Käytännöllinen tapa on jakaa kiihtyvyys komponentteihin a_r ja a_t. Näistä radiaalinen komponentti a_r muuttaa nopeuden suuntaa ja tangentiaalinen komponentti a_t nopeuden suuruutta. Tällöin

$$\vec{a} = \vec{a}_\mathrm{r} + \vec{a}_\mathrm{t}, \tag{52}$$

missä

$$a_\mathrm{r} = \frac{v^2}{r} \quad \text{ja} \quad a_\mathrm{t} = \frac{dv}{dt}. \tag{53}$$

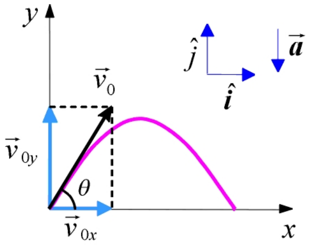


3 Useampiulotteinen liike

Esim. Vino heittoliike ilman ilmanvastusta.

Ilman ilmanvastusta liike voidaan erottaa toisistaan eri koordinaattiakselien suunnissa. Alkunopeus

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \tag{54}$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta. \tag{55}$$



Kiihtyvyys

$$a_x = 0 \tag{56}$$
$$a_y = -g. \tag{57}$$

Tällöin nopeudelle saadaan

$$v_x = v_{0x} \tag{58}$$

$$v_y(t) = v_{0y} - gt, \tag{59}$$

eli liike on tasaista x-suunnassa ja tasaisesti kiihtyvää y-suunnassa. Vastaavasti paikalle

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \tag{60}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{61}$$

Kantamalle saadaan lauseke alkuehdosta $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ja

$$y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_{0y}}{g} \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = v_{0x}t = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta. \tag{62}$$

Kun alku- ja loppupisteen ovat samalla korkeudella, niin maksimikantama saadaan lähtökulman arvolla $\theta = 45°$.

Lakikorkeudelle saadaan lauseke ehdosta

$$
\begin{aligned}
v_y(t) &= 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0y}}{g} \quad \Rightarrow \\
y(t) &= v_{0y}\,t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta. \qquad (63)
\end{aligned}
$$

Ratakäyrälle $y(x)$ voidaan johtaa lauseke

$$
\begin{aligned}
y(x) &= (\tan\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2 \qquad (64) \\
&\equiv bx - cx^2,
\end{aligned}
$$

mikä on alaspäin aukeavan paraabelin yhtälö.

Huom: Jos ilmanvastus otetaan huomioon, niin $\vec{a} \neq$ vakio.

3 Useampiulotteinen liike

Suhteellinen liike

Kaksi koordinaattisysteemiä xyz ja $x'y'z'$ liikkuvat toistensa suhteen pienellä vakionopeudella $\vec{u}$. Tällöin pisteen P paikka $x'y'z'$-koordinaatistossa on

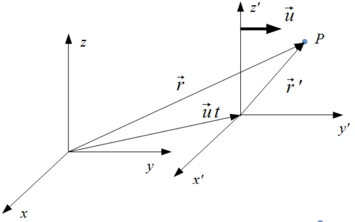
$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{u}t. \tag{65}$$

Tästä derivoimalla t:n suhteen saadaan nopeuksille

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u} \tag{66}$$

ja edelleen derivoimalla kiihtyvyyksille

$$\vec{a}\,' = \vec{a}. \tag{67}$$

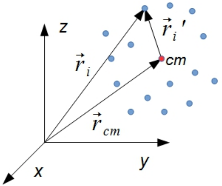


Lisäksi on voimassa $t' = t$. Yhtälöt muodostavat klassisen fysiikan ns. *Galilei-muunnoksen*.

Esim. Massakeskipistekoordinaatistossa (G 9.8) ($\vec{v}_{\rm cm}$ = vakio)

$$\vec{r}_i\,' = \vec{r}_i - \vec{r}_{\rm cm}. \tag{68}$$

$$\vec{v}_i\,' = \vec{v}_i - \vec{v}_{\rm cm}. \tag{69}$$



Dynamiikka

Klassinen mekaniikka perustuu kappaleiden liikkeeseen voiman vaikutuksesta.
Dynamiikassa keskeiset suureet ovat massa m ja kiihtyvyys $\vec{a}$.

Voima ja vuorovaikutus

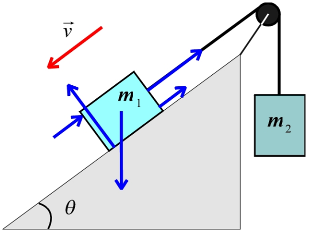
Kosketusvuorovaikutuksia mm.

- pinnan tukivoima
- kitka
- jousen välittämä voima
- narun välittämä voima
- väliaineen vastus
- nesteen tai kaasun noste.

Nämä vuorovaikutukset saavat alkunsa molekyylien tai atomien välisistä sähköisistä vuorovaikutuksista.

Etävuorovaikutuksia mm.

- kappaleen paino (gravitaatio).



4 Newtonin lait

Newtonin I laki (jatkavuuden- tai hitauslaki):

Kappale pysyy levossa niin kauan, kun siihen ei vaikuta ulkoisia voimia. Vastaavasti liikkuva kappale jatkaa liikettään tasaisella nopeudella, ellei siihen vaikuta ulkoisia voimia.

Newton I ei tee eroa paikallaan olevan kappaleen ja tasaisella nopeudella liikkuvan kappaleen välillä. Asia voidaan kuvata myös toistensa suhteen tasaisella nopeudella liikkuvilla koordinaatistoilla, joissa kappaleet pysyvät paikallaan. Tällaisia koordinaatistoja, joissa pätevät Newtonin lait, kutsutaan *inertiaalikoordinaatistoiksi*.

Esim. Tasaisella nopeudella liikkuva juna, junan lattialla oleva pallo sekä ratapenkalla paikallaan oleva havaitsija ovat inertiaalijärjestelmiä. Tasaisesti kiihtyvässä liikkessä oleva juna ei ole inertiaalijärjestelmä.

Newtonin II laki (dynamiikan peruslaki):

Kappaleeseen vaikuttava ulkoinen kokonaisvoima $\vec{F}_{\mathrm{tot}}$ saa aikaan kappaleen kiihtyvyyden

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{tot}}}{m} \tag{70}$$

eli

$$\vec{F}_{\mathrm{tot}} = \sum \vec{F} = m\vec{a}. \tag{71}$$

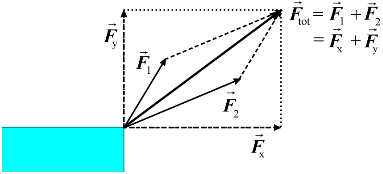
Yksiköt: $[m] = \mathrm{kg}$, $[F] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$.

Kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on summa kaikista kappaleeseen vaikuttavista voimista

$$\vec{F}_{\mathrm{tot}} = \sum \vec{F}_i, \tag{72}$$

joka voidaan edelleen jakaa komponentteihinsa

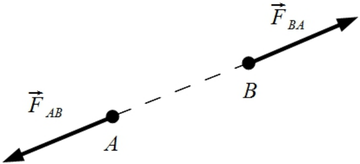
$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}. \tag{73}$$



Newtonin III laki (voiman ja vastavoiman laki):

Jos kappale B vaikuttaa kappaleeseen A voimalla $\vec{F}_{AB}$, niin kappale A vaikuttaa kappaleeseen B samansuuruisella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla $-\vec{F}_{BA}$, eli

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \tag{74}$$



Huom: Voimat esiintyvät aina pareittain. Voimaparien voimat vaikuttavat aina eri kappaleisiin.

Gravitaation aiheuttama paino

Maan painovoimakentässä kaikilla (pudotettuilla) esineillä (ilmanvastusta ei nyt huomioida) on sama kiihtyvyys $\vec{g}$, joka lähellä maan pintaa on vakio ($g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$). Kappaleeseen kohdistuvaa gravitaatiovoimaa kutsutaan kappaleen painoksi

$$\vec{w} = m\vec{g}. \tag{75}$$

Yksikkö: $[w] = \mathrm{N}$. Paino voidaan merkitä myös $\vec{F}_{\mathrm{G}}$, $\vec{F}_g$ tai $\vec{G}$.

Normaalivoima

Kun kappale on jollakin pinnalla, pinta kohdistaa kappaleeseen tukivoiman, jota kutsutaan normaalivoimaksi, merkitään $\vec{F}_N$ tai $\vec{N}$. Normaalivoima on kohtisuorassa pintaan nähden.

5 Newtonin lakien sovelluksia

Vapaakappalekuvaaja (vkk) tai voimakuvio (vk) esittää kaikki kappaleeseen kohdistuvat voimat. Lisäys tehtävänratkaisuohjeeseen:

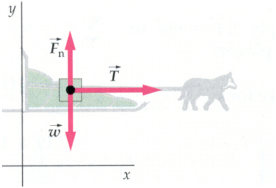
1. Piirrä vk jokaiselle kappaleelle. Mieti, mitkä voimat vaikuttavat kuhunkin kappaleeseen (kiinnitys- ja kontaktipisteet, gravitaatio).
2. Valitse jokaiselle vk:lle oma koordinaatistonsa ja sovella NII:ta komponenttimuodossa. Akselit kannattaa valita siten, että joku akseleista osoittaa kiihtyvyyden, kaltevan tason tai kysytyn/tuntemattoman suureen suuntaan.
3. Katso huolellisesti, miten eri vk:t yhtyvät. Jos kaksi tai useampia kappaleita on liitetty toisiinsa (esim. jousella, narulla tai vaijerilla), niin systeemiä sitoo jotkin rajoitusehdot (esim. naru on venymätön ja tiukalla). Kytketyn systeemin kappaleilla pitää olla sama vauhti ja saman suuruinen kiihtyvyys, vaikka "suunnat" voivat erotakin toisistaan. Suorassa kontaktissa kappaleiden toisiinsa kohdistamat voimat pitää olla yhtä suuret, mutta vastakkaissuuntaiset (Newton III).

5 Newtonin lakien sovelluksia

Esim. Koiravaljakko jäällä (ilman kitkavoimia).

NII antaa komponettimuodossa

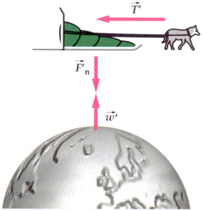
$$\sum F_y = F_n - w = 0 \quad \text{(rajoitusehto)}$$
$$\sum F_x = T = ma_x,$$



mistä liike voidaan ratkaista.

Huom: $\vec{w}$ ja $\vec{F}_n$ eivät ole toistensa vastavoimia NIII:n mielessä, vaikka ne ovat yhtä suuret ja vastakkaismerkkiset, sillä ne kohdistuvat samaan kappaleeseen.

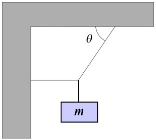
Kuvaajaan ei piirretä vastavoimia, jotka eivät vaikuta kappaleen liikkeeseen, mutta ovat silti olemassa Newton III:n mukaisesti. Kuvaajaan ei myöskään piirretä suuretta $m\vec{a}$, joka ei ole voima, vaan *voiman seuraus*.



5 Newtonin lakien sovelluksia

Pistemäinen kappale tasapainossa

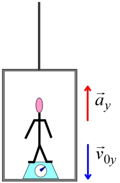
Newton II: $\sum \vec{F}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0,$
jolloin kappale pysyy paikallaan, jos se on alunperin paikallaan.



Pistemäinen kappale liikkeessä

Liike tasaista ($\vec{v}$ = vakio):
Newton II: $\sum \vec{F}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0,$

Yleisesti:
Newton II: $\sum \vec{F}_i = m\vec{a} \qquad (\vec{a} \neq 0)$



5 Newtonin lakien sovelluksia

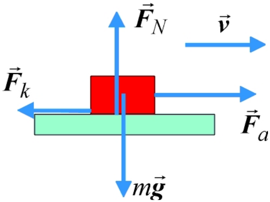
Kitka

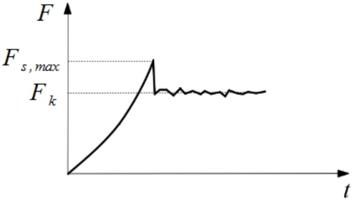
Kun kappaletta aletaan vetää, kappaleen ja tason välinen kitka estää liikkeen. Kun voima ylittää tietyn raja-arvon, niin kappale lähtee liikkeelle.

Voima, joka vastustaa kappaleen liikkeellelähtöä, on vastakkaissuuntainen vetävään voimaan nähden ja sitä kutsutaan lepokitkaksi

$$F_s \leq \mu_s F_N, \tag{76}$$

$$F_{s,\max} = \mu_s F_N, \tag{77}$$





missä μ_s on lepokitkakerroin, F_N pinnan tukivoima ja $F_{s,\max}$ ns. täysin kehittynyt lepokitka.

5 Newtonin lakien sovelluksia

Kun kappale on lähtenyt liikkeelle, liikettä vastustaa liikkeen suuntaa vastainen liikekitka (liukukitka)

$$F_k = \mu_k F_N \tag{78}$$

missä μ_k on liikekitkakerroin. Yleensä $\mu_k \leq \mu_s \leq 1$. Kun tarkoitetaan yleisesti kitkavoimaa, merkitään $\vec{F}_\mu$. Huom. $\vec{F}_\mu \perp \vec{F}_N$.

Tasainen ympyräliike ($v =$ vakio, $r =$ vakio)

Ympyräliikeessä kappaleeseen kohdistuu voima

$$F_\mathrm{r} = ma_\mathrm{r} = \frac{mv^2}{r}, \tag{79}$$

joka osoittaa ympyrän keskipistettä kohti.

Väliaineen vastus

Kun kappale liikkuu nesteessä tai kaasussa, väliaine vastustaa kappaleen liikettä. Väliaineen vastus on aina vastakkaissuuntainen kappaleen liikkeeseen (nopeuteen) nähden.

Esimerkiksi kappaleen pudotessa y-suuntaiselle liikkeelle

$$\sum F_y = mg - bv^n = ma_y, \tag{80}$$

missä b (> 0) riippuu kappaleen muodosta ja koosta. Pyörteettömälle väliaineen virtaukselle pienillä nopeuksilla $n = 1$, mutta nopeuden kasvaessa virtaukseen syntyy pyörteitä eli väliaineen virtaus on turbulenttia, jolloin $n \approx 2$. Rajanopeus, eli suurin mahdollinen nopeus saadaan tästä lausekkeesta $(a_y = 0)$

$$v(t \to \infty) = \left(\frac{mg}{b}\right)^{1/n}. \tag{81}$$

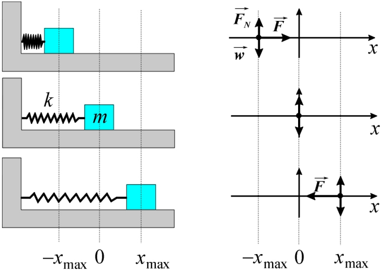
Huom. Samanlaiset mutta eri aineesta tehdyt kappaleet putoavat väliaineessa eri nopeuksilla.

5 Newtonin lakien sovelluksia

Jousivoima (G 14-1)

Tarkastellaan kappaleen ja jousen muodostamaa systeemiä.

- $\vec{F}$ tasapainoon palauttava voima
- x siirtymä tasapainosta
- $x_{\max} = A$ amplitudi
- $A \to -A \to A$ jakso
- T jaksonaika
- f taajuus, jaksoja aikayksikössä
- ω kulmataajuus.



Taajuus on

$$f = \frac{1}{T}. \tag{82}$$

Kulmataajuus on

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \tag{83}$$

Yksiköt: $[T] = \mathrm{s}$, $[f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$, $[\omega] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

5 Newtonin lakien sovelluksia

Liikettä, joka toistaa itseään samanlaisena säännöllisin väliajoin, kutsutaan jaksolliseksi tai harmoniseksi liikkeeksi. Yksinkertainen harmoninen värähtely syntyy, kun voima on suoraan verrannollinen siirtymään tasapainoasemasta ja suuntautunut tasapainoasemaa kohti (Hooken laki)

$$F = -kx, \tag{84}$$

missä k on jousivakio. Newton II:n mukaan kappale saa kiihtyvyyden

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x, \tag{85}$$

eli kiihtyvyys riippuu kappaleen paikasta.

Newtonin liikeyhtälö on itse asiassa *differentiaaliyhtälö*, mikä näkyy selvästi mm. väliaineen vastuksen ja harmonisen värähtelijän tapauksissa.

6 Gravitaatio

Newtonin gravitaatiolaki

Newton oletti, että kappale, jolla on massa m_2, vaikuttaa etäisyydellä r olevaan toiseen kappaleeseen, jonka massa on m_1, gravitaatiovoimalla, joka on

$$F_\mathrm{G} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{86}$$

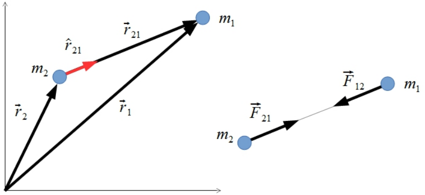
missä gravitaatiovakio on

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2. \tag{87}$$

Vektorimuodossa

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}, \tag{88}$$

missä $\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ on yksikkövektori.



6 Gravitaatio

Paino

Kappaleen paino lähellä maan pintaa on

$$w = F_{\mathrm{G}} = G\frac{m_E m}{r_E^2} = mg, \tag{89}$$

missä maan massa $m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg ja säde $r_E = 6{,}38 \cdot 10^6$ m. Painovoiman kiihtyvyys lähellä maan pintaa on siis

$$g = G\frac{m_E}{r_E^2}, \tag{90}$$

joka on riippumaton kappaleen massasta. Etäisyydellä $r - r_E$ ylöspäin maan pinnasta, m-massaisen kappaleen paino on

$$w = G\frac{m_E m}{r^2}. \tag{91}$$

6 Gravitaatio

Huom: Paino riippuu siitä, missä se mitataan. Massa on kappaleen sisäinen ominaisuus ja on siten riippumaton mittauspaikasta.

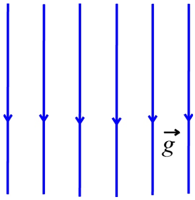
Huom: Painava massa (yhtälössä $w = mg$) ja hidas massa (yhtälössä $F = ma$) ovat kokeiden mukaan sama asia.

Huom: Koska maapallo pyörii, niin kappaleen näennäinen paino ei ole aivan sama kuin sen "todellinen" paino, vaan se riippuu siitä, millä leveysasteella kappale sijaitsee.

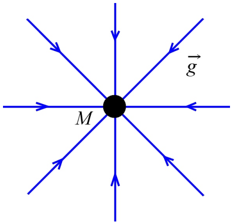
6 Gravitaatio

Gravitaatiokenttä

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{92}$$



$\vec{g} = \mathrm{vakio}$



$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}.$$

6 Gravitaatio

Esim. Gravitaatiovoima pitää satelliitin ympyräradalla. Newton II:

$$\frac{Gm_E m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}. \tag{93}$$

Tästä saadaan ratanopeus

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}} \tag{94}$$

ja kiertoaika

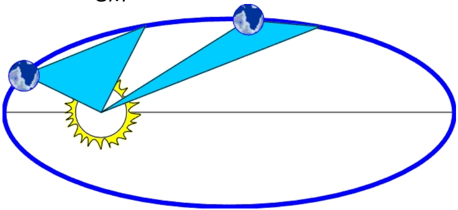
$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm_E}}. \tag{95}$$

Keplerin lait

Keplerin 1. laki: Kaikki planeetat liikkuvat auringon ympäri pitkin elliptisiä ratoja, joiden toisessa polttopisteessä aurinko sijaitsee.

Keplerin 2. laki: Planeetan ja auringon välinen jana pyyhkäisee aina samansuuruisen pinta-alan samassa ajassa.

Keplerin 3. laki: Planeetan radalle $T^2 = Cr^3$, jossa r on isoakselin puolikas ja jossa $C = \frac{4\pi^2}{GM}$ (ympyräliikkeen tapauksessa).



Keplerin lait voidaan johtaa Newtonin laeista.

Perusvuorovaikutukset

Etävuorovaikutuksia (pitkänkantaman vv.)

- Gravitaatio $\Rightarrow$ paino
- Sähkömagneettinen vuorovaikutus $\Rightarrow$ tukivoima, kitka, väliaineen vastus
- Heikko vuorovaikutus $\Rightarrow$ radioaktiivisuus
- Vahva vuorovaikutus $\Rightarrow$ ydinvoimat

7 Työ ja energia

Vakiovoiman tekemä työ

Vakiovoima F tekee työtä kappaleen liikuttamiseen tietyn matkan. Jos voima on liikkeen kanssa samansuuntainen, niin työ määritellään

$$W = Fs, \tag{96}$$

missä s on kappaleen siirtymä.

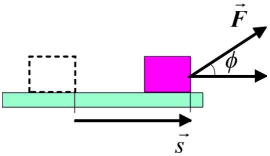
Energian käsite on läheisessä yhteydessä työn käsitteen kanssa. Energiaa siirtyy systeemiltä toiselle, kun systeemi tekee työtä toiseen systeemiin esim. kappaletta siirrettäessä.

- Liike-energia liittyy kappaleen liikkeeseen.
- Potentiaalienergia liittyy systeemin kappaleiden välisiin vuorovaikutuksiin tai konfiguraatioon, esim. kappaleen korkeuteen painovoimakentässä.

7 Työ ja energia

Koska voima on yleisesti vektorisuure, niin vakiovoiman $\vec{F}$ tekemä työ matkalla $\vec{s}$ määritellään

$$W = F\cos\phi\, s = \vec{F}\cdot\vec{s}. \qquad (97)$$



W on skalaarisuure. Yksikkö $[W] = \mathrm{N{\cdot}m} = \mathrm{J}$.

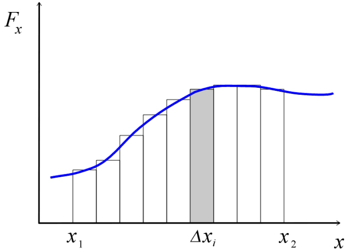
W:n *etumerkki* on tärkeä. Katso tarkkaan, *mikä voima tekee työtä*.

Muuttuvan voiman tekemä työ

Jos voima muuttuu työn aikana, niin

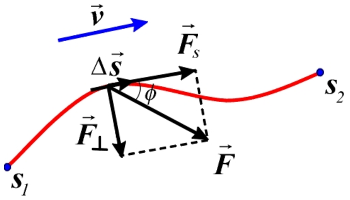
$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_x \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx, \qquad (98)$$

mikä on F_x-käyrän ja x-akselin väliin jäävän alueen fysikaalinen pinta-ala.



7 Työ ja energia

Kolmiulotteisen liikkeen tapauksessa kappaleeseen kohdistuva voima voidaan jakaa liikettä vastaan kohtisuoraan ($\vec{F}_\perp$) ja liikkeen suuntaiseen ($\vec{F}_s$) komponenttiin. Komponentti $\vec{F}_\perp$ pitää huolen keskeiskiihtyvyydestä, mutta se ei tee työtä.



Pistetulon määritelmää apuna käyttäen

$$dW = F_s\, ds = F \cos\phi\, ds = \vec{F} \cdot d\vec{s}, \tag{99}$$

joten työlle saadaan yleinen määritelmä

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \tag{100}$$

Liike-energia

Tehdyn työn ja systeemin alku- ja loppunopeuksien välillä on yhteys. Tarkastellaan taas aluksi vakiovoimaa. Kokonaistyölle saadaan dynamiikan peruslakia käyttäen

$$W_{\mathrm{tot}} = F_x \Delta x = m a_x \Delta x. \tag{101}$$

Vakiovoimalla kiihtyvyys on vakio, joten käyttämällä yhtälöä (9)

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_x \Delta x$$

työlle saadaan

$$W_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K, \tag{102}$$

missä K on liike-energia

$$K = \frac{1}{2} m v^2. \tag{103}$$

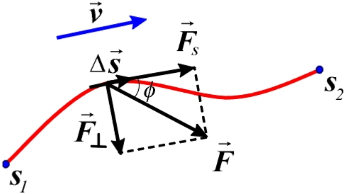
7 Työ ja energia

Yleisessä tapauksessa työlle saadaan

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \int_{s_1}^{s_2} F_s\, ds = \int_{s_1}^{s_2} m \frac{dv}{dt} ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} m \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} ds = \int_{s_1}^{s_2} m \frac{dv}{ds} v\, ds \\ &= \int_{v_1}^{v_2} mv\, dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2, \end{aligned} \tag{104}$$

eli sama tulos kuin edellä.
Systeemiin tehty kokonaistyö on siis sama kuin liike-energian muutos

$$W_{\text{tot}} = \Delta K. \tag{105}$$



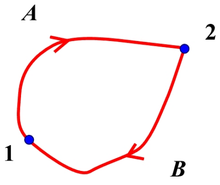
Tulosta kutsutaan työ–energia-periaatteeksi.

8 Energian säilyminen

Konservatiiviset ja ei-konservatiiviset voimat

Tarkastellaan kappaletta, joka liikkuu suljettua reittiä pitkin takaisin lähtöpisteeseensä. Jos voiman tekemä työ tällöin häviää, eli

$$W_{\mathrm{tot}} = 0, \tag{106}$$



niin voimaa kutsutaan konservatiiviseksi voimaksi. Konservatiivisen voiman tekemä työ on riippumaton kappaleen reitistä, eli se riippuu ainostaan alku- ja loppupisteistä:

$$W_{\mathrm{tot}} = W_{12}^{A} + W_{21}^{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{12}^{A} = -W_{21}^{B} = W_{12}^{B}. \tag{107}$$

Gravitaatio ja *jousivoima* ovat konservatiisia voimia, kitkavoima on ei-konservatiivinen voima.

8 Energian säilyminen

Potentiaalienergia

Usein työ tehdään systeemiin, joka muodostuu useasta erillisestä kappaleesta. Tällöin systeemiin tehty työ ei välttämättä kasvata systeemin liike-energiaa, vaan se varastoituu systeemin *potentiaalienergiaksi*, joka riippuu kappaleiden keskinäisestä sijainnista.

Esim. Gravitaation ja jousivoiman tekemä työ varastoituu systeemin potentiaalienergiaksi siten, että se voidaan myöhemmin käyttää kokonaan kappaleen liike-energian lisäämiseen.

Yleisesti konservatiisen voiman $\vec{F}$ potentiaalienergia U määritellään

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = U_1 - U_2 = -\Delta U. \tag{108}$$

Potentiaalienergia voidaan määrittää *vain konservatiivisille voimille*.

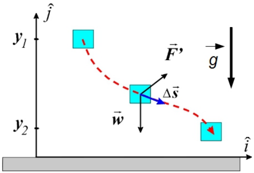
8 Energian säilyminen

<u>Esim</u>. Gravitaation potentiaalienergia

Nostettaessa kappaletta painovoimakentässä systeemiin varastoituu potentiaalienergiaa, koska systeemi koostuu kahdesta vuorovaikuttavasta kappaleesta (kappale+maapallo). Potentiaalienergia varastoituu koko systeemiin, ei yksittäiseen kappaleeseen.

Kappaleeseen vaikuttaa homogeeninen painovoima $\vec{w} = m\vec{g}$ ja mahdollisesti muita voimia $\vec{F}'$. Painovoiman tekemä työ matkalla $\Delta\vec{s}$ on

$$\vec{w} \cdot \Delta\vec{s} = -mg\,\hat{\jmath} \cdot (\Delta x\,\hat{\imath} + \Delta y\,\hat{\jmath}) = -mg\Delta y. \tag{109}$$



Painovoiman kokonaistyö matkalla $1 \to 2$ on

$$W_{\mathrm{g}} = -mg(y_2 - y_1) \equiv U_1 - U_2, \tag{110}$$

joten painovoiman potentiaalienergia määritellään

$$U = mgy + U_0. \tag{111}$$

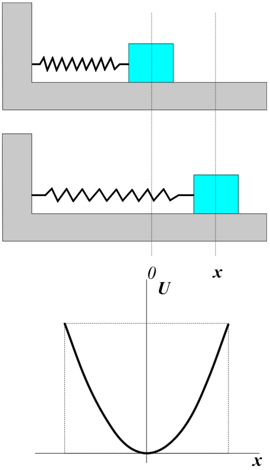
<u>Huom</u>: Koska potentiaalienergian muutoksella on vain merkitystä, gravitaation potentiaalienergian nollakohta voidaan valita vapaasti.

8 Energian säilyminen

Esim. Elastinen potentiaalienergia

Jousen (jousivoiman) tekemä työ kappaleeseen siirtymässä $x_1 \to x_2$ on

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx$$
$$= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \equiv U_1 - U_2. \quad (112)$$



Elastinen potentiaalienergia määritellään

$$U = \frac{1}{2}kx^2. \quad (113)$$

Huom: Elastisen potentiaalienergian nollakohdaksi pitää valita $x = 0$.

Voima ja potentiaalienergia

Yksiulotteisessa tapauksesa

$$W = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad F_x \Delta x = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}, \tag{114}$$

josta rajalla $\Delta x \to 0$ saadaan

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \tag{115}$$

Huom: 3D-tapauksessa $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$.

Esim. Kappale–jousi-systeemin potentiaalienergia on $U = \frac{1}{2}kx^2$, jolloin kappaleeseen kohdistunut jousivoima on

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx. \tag{116}$$

8 Energian säilyminen

Mekaanisen energian säilyminen

Kun systeemiin vaikuttaa ainoastaan konservatiivisia voimia, niin yhtälöistä $W_{\mathrm{tot}} = \Delta K$ ja $W_{\mathrm{tot}} = -\Delta U$ seuraa

$$\Delta K = -\Delta U, \tag{117}$$

eli

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = 0, \tag{118}$$

missä määritelty mekaaninen energia on

$$E_{\mathrm{mek}} = K + U = \mathrm{vakio}. \tag{119}$$

Mekaanisen energian säilymislaki: Jos systeemissä vain konservatiiviset voimat tekevät työtä, systeemin mekaaninen energia säilyy.

Tätä voidaan käyttää laskuissa hyväksi asettamalla

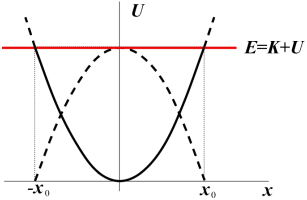
$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1. \tag{120}$$

8 Energian säilyminen

Esim. Harmonisen värähtelijän energia (G 14-3)

Jousivoima on konservatiivinen, joten yksinkertaisen harmonisen värähtelijän energia on

$$E_{\mathrm{mek}} = K + U = \mathrm{vakio}. \qquad (121)$$



Värähtelyjen ääripäissä (käännepisteissä $x = \pm x_0$) $K(\pm x_0) = 0$, joten

$$E_{\mathrm{mek}} = 0 + U = \tfrac{1}{2}kA^2 = \mathrm{vakio}, \qquad (122)$$

missä $A = x_0$ on värähtelyjen amplitudi. Värähtelyjen keskikohdassa ($x = 0$) $U(0) = 0$, joten kappaleella on suurin liike-energia:

$$E_{\mathrm{mek}} = K + 0 = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{max}}^2 = \mathrm{vakio}. \qquad (123)$$

Koska mekaaninen energia säilyy, niin

$$\tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}mv_{\mathrm{max}}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{k}{m}}A. \qquad (124)$$

Energian säilyminen

Jos systeemiin vaikuttavat *muut voimat* $\vec{F}\,'$ tekevät myös työtä, niin

$$W_{\mathrm{tot}} = W_{\mathrm{g}} + W\,' = -\Delta U + W\,' = \Delta K, \tag{125}$$

josta

$$W' = \Delta K + \Delta U = \Delta E_{\mathrm{mek}}. \tag{126}$$

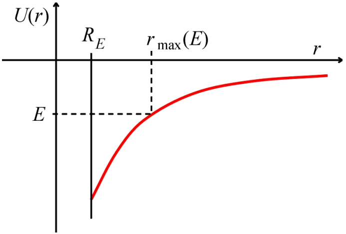
Energian säilymislaki: Eristetyn systeemin energia voi muuttaa muotoaan ja sitä voi siirtyä kappaleelta toiselle, mutta kokonaisenergian määrä on aina vakio

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\mathrm{muut}} = 0. \tag{127}$$

Esim. *Liikekitka ja väliaineen vastus* ovat aina liikettä vastaan, jolloin tehty työ on negatiivista, vaikka kuljettaisiinkin suljettua reittiä pitkin. Tällöin mekaaninen energia ei säily, vaan se pienenee. Mekaanisen energian pieneneminen kasvattaa jotain toista energian lajia, kuten lämpöliikkeeseen liittyvää energiaa. Kappale lämpenee.

Gravitaation aiheuttama potentiaalienergia

$$
\begin{aligned}
W_g &= \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -Gm_E m \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\
&= \frac{Gm_E m}{r_2} - \frac{Gm_E m}{r_1} \\
&\equiv U_1 - U_2, \qquad (128)
\end{aligned}
$$



missä potentiaalienergia

$$
U(r) = -\frac{Gm_E m}{r}, \quad U = 0, \text{ kun } r = \infty. \qquad (129)
$$

Lähellä maan pintaa

$$
\begin{aligned}
W_g &= \frac{Gm_E m}{r_2} - \frac{Gm_E m}{r_1} = \frac{Gm_E m}{r_1 r_2}(r_1 - r_2) \\
&\approx \frac{Gm_E m}{R_E^2} \underbrace{(r_1 - r_2)}_{=-h} = -mgh. \qquad (130)
\end{aligned}
$$

8 Energian säilyminen

Mekaaninen energia on

$$E_{\mathrm{mek}} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_E m}{r}. \tag{131}$$

Satelliitin mekaaninen energia (ratanopeus yhtälöstä (94))

$$E_{\mathrm{mek}} = \frac{1}{2}m\frac{Gm_E}{r} - \frac{Gm_E m}{r} = -\frac{1}{2}\frac{Gm_E m}{r} < 0. \tag{132}$$

Ratojen luokittelu: Systeemi on sidotussa tilassa, kun $E_{\mathrm{mek}} < 0$. Tällöin esim. komeetan rata auringon ympäri on ellipsi. Systeemin sidosenergia on $|E_{\mathrm{mek}}|$, mikä tarvitaan hajottamaan systeemi.

Systeemi on avoin, jos $E_{\mathrm{mek}} \geq 0$. Tällöin komeettaa ei sido mikään, jolloin se voi poistua vapaasti aurinkokunnasta. Komeetta on parabolisella radalla, jos $E_{\mathrm{mek}} = 0$, ja hyperbolisella radalla, jos $E_{\mathrm{mek}} > 0$.

8 Energian säilyminen

Pakonopeus. Jotta raketti pystyisi pakenemaan maan pinnalta kauas avaruuteen, pitää sillä olla vähintään tietty alkunopeus (*pakonopeus*). Jotta raketti pääsisi poistumaan maan painovoimakentästä, niin raketin mekaaniselle energialle

$$E_{\mathrm{mek}} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_E m}{R_E} \geq 0, \tag{133}$$

mistä pakonopeudelle saadaan, kun $E_{\mathrm{mek}} = 0$,

$$v_{\mathrm{pako}} = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E} = 11{,}2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}. \tag{134}$$

8 Energian säilyminen

Teho

Teho on työn suoritustahti. Kun aikavälillä Δt tehdään työ ΔW, niin keskimääräinen teho on

$$P_{\mathrm{av}} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{135}$$

Hetkellinen teho

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}. \tag{136}$$

Yksikkö: $[P] = \mathrm{W} = \mathrm{J/s}$.

Toisaalta

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \tag{137}$$

Lisäksi

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} dt = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_1^2 P(t)\, dt. \tag{138}$$

Potentiaalienergiadiagrammit

Potentiaalienergiakäyrällä tai -pinnalla

- systeemin perustilalla on pienin mahdollinen energia E_0
- muut minimit kuin perustila ovat lokaaleja minimejä
- stabiili tasapainopiste lokaalin minimin kohdalla
- epästabiili tasapainopiste lokaalin maksimin kohdalla
- potentiaalikaivot ja -vallit
- käännepisteet määräytyvät kohdissa, joissa $K = 0$ (eli $E = U$)

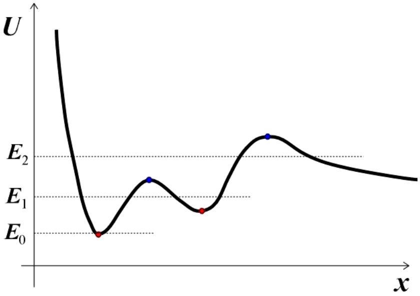
Konservatiiviselle voimalle

$$E_{\mathrm{mek}} = K + U = vakio$$

ja voima

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

pyrkii aina siirtämään systeemiä pienenevän potentiaalienergian suuntaan.



9 Liikemäärä

Liikemäärä

Kappaleeseen (m = vakio) kohdistuva kokonaisvoima (Newton II)

$$\vec{F}_{\mathrm{tot}} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad (139)$$

missä kappaleen liikemäärä määritellään

$$\vec{p} = m\vec{v}. \qquad (140)$$

Kun kaksi kappaletta vuorovaikuttavat keskenään, niin (Newton III)

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \qquad (141)$$

Jos kahden kappaleen systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia, niin

$$0 = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \qquad (142)$$

jossa $\vec{P}$ on kokonaisliikemäärä ja josta seuraa liikemäärän säilymislaki

$$\sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ulk}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \mathrm{vakio} \quad \mathrm{eli} \quad \vec{P}_{\mathrm{loppu}} = \vec{P}_{\mathrm{alku}}. \qquad (143)$$

9 Liikemäärä

Impulssi

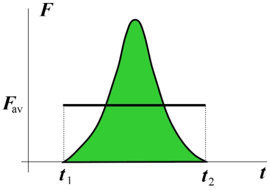
Tarkastellaan vakiovoimaa $\vec{F}$, joka kohdistuu kappaleeseen ajan Δt. Voiman kappaleeseen kohdistama impulssi määritellään

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}, \tag{144}$$

joka on impulssi–liikemäärä-teoreema.

Jos voima ei ole vakio, niin impulssi on

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt}dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}. \tag{145}$$



Impulssi voidaan esittää myös keksimääräisen voiman avulla

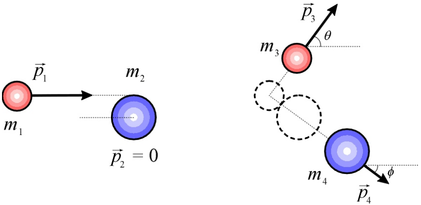
$$\vec{J} = \vec{F}_{\mathrm{av}}\Delta t \tag{146}$$

9 Liikemäärä

Törmäykset

Kahden kappaleen törmäyksessä kappaleisiin kohdistuvat vuorovaikutusvoimat ovat yhtäsuuret mutta vastakkaissuuntaiset ja ne ovat hetkellisesti paljon suurempia kuin ulkoiset voimat. Vastaavasti vuorovaikutusaika on niin lyhyt, että kappaleiden siirtymät törmäyksen aikana voidaan jättää huomiotta, joten systeemin **kokonaisliikemäärä** säilyy.

Jos **kokonaisliike-energia** on sama ennen ja jälkeen törmäyksen, törmäys on *elastinen* eli kimmoinen, muutoin *epäelastinen* eli kimmoton.



Elastiset törmäykset (1D)

Tarkastellaan 1-ulotteista törmäystä. Kun kaksi kappaletta A ja B, joiden massa ovat m_A ja m_B ja alkunopeudet v_{A1} ja v_{B1}, törmäävät toisiinsa elastisesti, niin liikemäärä säilyy

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v_{A2} + m_B v_{B2} \tag{147}$$

ja liike-energiat ovat samat alussa ja lopussa (vain konservatiivisia voimia)

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2. \tag{148}$$

Neliöllinen muoto on usein hankala käyttää. Yhtälöä (147) apuna käyttäen yhtälö (148) saadaan sievennettyä muotoon

$$v_{B2} + v_{B1} = v_{A2} + v_{A1} \tag{149}$$

tai

$$v_{B2} - v_{A2} = -(v_{B1} - v_{A1}). \tag{150}$$

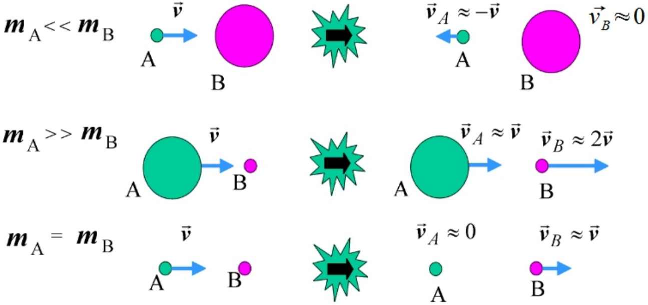
9 Liikemäärä

Esim. Tarkastellaan tilannetta, jossa B on aluksi levossa ($v_{B1} = 0$). Tällöin

$$v_{A2} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1}, \quad (151)$$

$$v_{B2} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1}. \quad (152)$$

Kuvassa on esitetty muutamia tilanteita.



Täysin epäelastinen törmäys

Kun kaksi kappaletta A ja B törmäävät toisiinsa täysin epäelastisesti, ne tarttuvat toisiinsa kiinni, jolloin loppunopeuksille saadaan

$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_{\mathrm{cm}}. \tag{153}$$

Liikemäärän säilymisestä seuraa *massakeskipisteen* nopeudelle

$$\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1}}{m_A + m_B}. \tag{154}$$

Esim. Oletetaan, että kappale B on aluksi levossa ($v_{B1} = 0$).
Liike-energia on alussa

$$K_1 = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2. \tag{155}$$

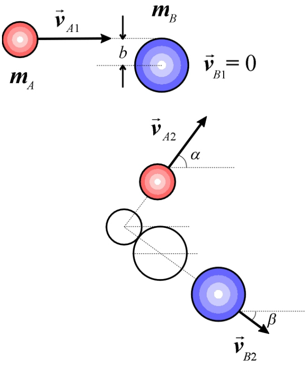
Törmäyksen jälkeen liike-energia on lopussa

$$K_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_{\mathrm{cm}}^2 = \frac{1}{2} m_A \left(\frac{m_A}{m_A + m_B} \right) v_{A1}^2 < K_1, \tag{156}$$

joten osa liike-energiasta on mennyt törmäyksessä lämpöhäviöihin, muodonmuutoksiin, äänen muodostumiseen jne.

9 Liikemäärä

Törmäykset 2D tai 3D



Törmäykset useampiulotteisessa avaruudessa ovat haastavia ongelmia. Kuvan mukaisessa epäkeskisessä törmäyksessä *törmäysparametri* b yhdessä kappaleiden ominaisuuksien ja törmäyksen luonteen kanssa määräävät suunnat, joihin kappaleet liikkuvat törmäyksen jälkeen.

Liikemäärä säilyy törmäyksessä ($v_{B1} = 0$)

$$\vec{P} = m_A \vec{v}_{A1} = m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2}. \quad (157)$$

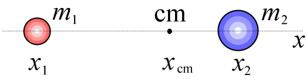
Nopeusvektorit ovat samassa tasossa (esim. xy-taso), jolloin tuntemattomia muuttujia on enää neljä (v_{A2x}, v_{A2y}, v_{B2x} ja v_{B2y} tai v_{A2}, v_{B2}, α ja β). Liikemäärän säilyminen antaa kaksi yhtälöä (x- ja y-suunnat), kaksi muuta yhtälö pitää saada vuorovaikutuksen luonteesta (täysin epäelastinen, elastinen) ja törmäysparametrista.

9 Liikemäärä

Massakeskipiste

Massakeskipiste määritellään yksiulotteisessa tapauksessa

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2,}{m_1 + m_2} \qquad (158)$$



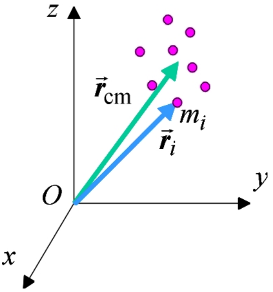
Yleisemmässä tapauksessa massakeskipistevektorille saadaan

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}, \qquad (159)$$

missä $M = \sum_i m_i$.

Jatkuville systeemeille summa pitää korvata integraalilla

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm, \qquad (160)$$



missä $dm = \rho(r) dV$ on massa-alkio pisteessä $\vec{r}$.

9 Liikemäärä

Massakeskipisteen liike. Derivoimalla massakeskipisteen määrittelevää yhtälöä (159) saadaan (m_i = vakio)

$$M\frac{d\vec{r}_{\rm cm}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \Rightarrow \quad M\vec{v}_{\rm cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}. \tag{161}$$

Edelleen derivoimalla saadaan

$$M\vec{a}_{\rm cm} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}. \tag{162}$$

Voima voidaan jakaa sisäisiin ja ulkoisiin voimiin

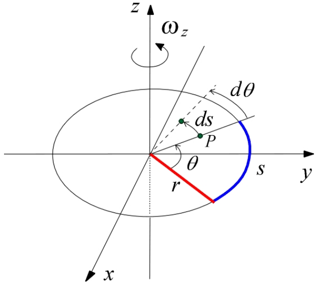
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\rm sis} + \vec{F}_i^{\rm ulk}. \tag{163}$$

Koska Newton III:n mukaan jokaisella voimalla on vastavoimansa, niin sisäisistä voimista löytyy aina voimaparit, jotka kumoavat toisensa. Tällöin NII

$$\vec{F}_{\rm tot}^{\rm ulk} = \sum_i \vec{F}_i^{\rm ulk} = M\vec{a}_{\rm cm}, \tag{164}$$

mikä tarkoittaa sitä, että systeemin massakeskipiste liikkuu ulkoisen kokonaisvoiman vaikutuksesta kuten sillä olisi massa $M = \sum_i m_i$.

Kulmanopeus ja -kiihtyvyys



Ei-pistemäisillä kappaleilla voi olla sekä lineaarista että pyörimisliikettä. Tarkastellaan jäykkää kappaletta, joka pyörii kiinnitetyn akselin suhteen. Kulmalle saadaan

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \Rightarrow \quad s = r\,\theta. \tag{165}$$

Positiivinen kulma kulkee vastapäivään. Yksikkö: $[\theta]=$ rad (radiaani)
Matka *ds* vaihtelee eri pisteille, mutta kulmasiirtymä on kaikille kiekon pisteille sama

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{166}$$

Keskimääräinen kulmanopeus määritellään

$$\omega_{\mathrm{av}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \tag{167}$$

joka on sama kiekon kaikille pisteille. Yksikkö: $[\omega] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1}$.

10 Pyörimisliike

Vastapäivään kierrettäessä kulman muutos on positiivinen, joten kulmanopeuskin on tällöin positiivinen. Hetkellinen kulmanopeus on

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{168}$$

Keskimääräinen kulmakiihtyvyys määritellään

$$\alpha_{\mathrm{av}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}. \tag{169}$$

Yksikkö: $[\alpha] = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{s}^{-2}$.

Hetkellinen kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{170}$$

Lisäksi

$$\alpha = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{171}$$

10 Pyörimisliike

Kun jäykkä kappale pyörii kiinnitetyn akselin suhteen, jokainen kappaleen piste on ympyräradalla ja sillä on lineaarinen nopeus ja kiihtyvyys. Tällöin pisteen P, joka on vakioetäisyydellä r pyörimisakselilta, lineaarinen nopeus saadaan derivoimalla yhtälöä (165)

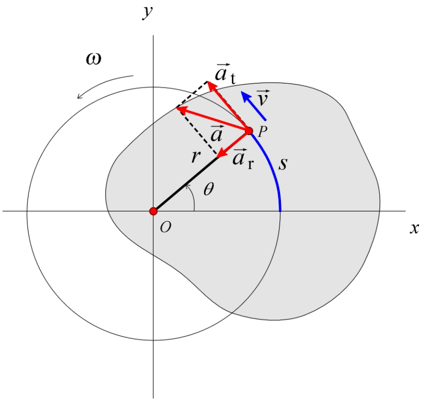
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{r\,d\theta}{dt} = r\,\omega, \qquad (172)$$

joka on pisteen ympyräliikkeen tangentin suuntainen. Vastaavasti tangentiaalinen kiihtyvyys on

$$a_{\rm t} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\,\alpha. \qquad (173)$$

Jokaisella pisteellä on myös keskeiskiihtyvyys

$$a_{\rm r} = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\,\omega)^2}{r} = r\,\omega^2. \qquad (174)$$



10 Pyörimisliike

Vakio kulmakiihtyvyys

Jos kulmakiihtyvyys $\alpha =$ vakio (tasaisesti kiihtyvä liike), pyörimisliikkeelle voidaan johtaa vastaavat lausekkeet kuin suoraviivaisellekin liikkeelle.

Taulukko. Analogia lineaarisen ja pyörimisliikkeen välillä.

lineaarinen liike	pyörimisliike
Δx	$\Delta\theta$
$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$

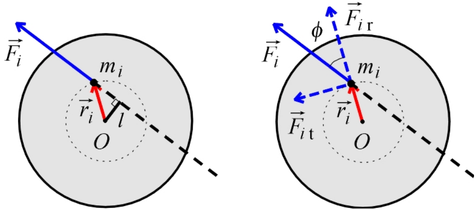
10 Pyörimisliike

Vääntömomentti (Voiman momentti)

Jos voima ei kohdistu pelkästään massakeskipisteeseen, niin kappale alkaa pyöriä eli sen kulmanopeus muuttuu. Voimaa, joka muuttaa kulmanopeutta pisteen O suhteen, sanotaan vääntömomentiksi

$$\tau_i = F_i \ell = F_i r_i \sin\phi = F_{i\mathrm{t}} r_i, \qquad (175)$$

missä F_i on kappaleeseen kohdistuva voima ja ℓ on vipuvarsi. Yksikkö $[\tau] = \mathrm{Nm}$.



Vääntömentti on positiivinen, kun se pyrkii kiertämään kappaletta vastapäivään. Yleisessä tapauksessa

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\phi \, \hat{n}, \qquad (176)$$

missä ϕ on vektorien välinen kulma ja $\hat{n}$ on vektorien määräämän tason normaalin suuntainen yksikkövektori.

10 Pyörimisliike

Pyörimisen dynamiikka

Tarkastellaan jäykän kappaleen alkioon m_i vaikuttavaa tangentiaalista voimaa

$$F_{i\mathrm{t}} = m_i a_{i\mathrm{t}} = m_i r_i \alpha, \tag{177}$$

jossa α on kaikille massa-alkioille sama. Massa-alkioon kohdistuva vääntömomentti on

$$\tau_i = F_{i\mathrm{t}} r_i = m_i r_i^2 \alpha. \tag{178}$$

Jäykän kappaleen kokonaisvääntömomentille

$$\sum_i \tau_i = \sum_i m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \alpha = I\,\alpha, \tag{179}$$

missä I on kappaleen hitausmomentti pisteen O suhteen ja se määritellään

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \tag{180}$$

missä m_i on etäisyydellä r_i pyörimisakselilta. Yksikkö: $[I]=$ kg$\cdot$m^2.

10 Pyörimisliike

Dynamiikka. Suoraviivaiselle liikkeen massakeskipisteen liikkeelle

$$\vec{F}_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{ulk}} = \sum_i \vec{F}_i^{\mathrm{ulk}} = M\vec{a}_{\mathrm{cm}}, \tag{181}$$

ja massakeskipisteen suhteen pyörimisliikkeelle

$$\vec{\tau}_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{ulk}} = \sum_i \vec{\tau}_i^{\mathrm{ulk}} = I_{\mathrm{cm}}\vec{\alpha}, \tag{182}$$

missä, kuten aikaisemminkin, kappaleen sisäiset voimat kumoavat toisensa (Newton III).

Vieriminen ilman liukumista. Monissa fysikaalisissa sovelluksissa esim. R-säteinen pyörä pyörii tasolla. Jos pyörä ei liu'u, niin sen massakeskipisteen lineaarinen nopeus on

$$v_{\mathrm{cm}} = R\,\omega, \tag{183}$$

mikä on vierimisehto. Vastaavasti voidaan kirjoittaa pyörän massakeskipisteen lineaarinen kiihtyvyys

$$a_{\mathrm{cm}} = R\,\alpha. \tag{184}$$

10 Pyörimisliike

Vieriminen liukuen. Kun pyörä liukuu alustalla, niin liikekitka pienentää sen massakeskipisteen suoraviivaista nopeutta ja saa pyörän lopulta vierimään. Suoraviivainen nopeus pienenee ja kulmanopeus kasvaa, kunnes vierimisehto täyttyy, minkä jälkeen pyörä vierii liukumatta.

Vierimiskitka.
Kun esim. pallo vierii alas kaltevaa tasoa, kitka pallon ja tason välissä on lepokitkaa, joten prosessissa ei ole energiahäviöitä. Todellisuudessa pallon ja tason välillä on vierimiskitkaa: pienet epätasaisuudet saavat aikaan sen, että toisaalta tason tukivoima tekee työtä pyörimisliikettä vastaan ja toisaalta epätasaisuudet muokkaavat palloa hävittäen näin osan mekaanisesta energiasta (junanpyörälle $\mu_r \sim 0{,}001$, autonrenkaalle $\mu_r \sim 0{,}01$).

10 Pyörimisliike

Hitausmomentin laskeminen

Hiukkassysteemin hitausmomentti voidaan laskea yhtälöstä (180).

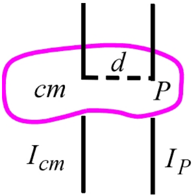
Jatkuvan kappaleen hitausmomentti voidaan laskea:

$$I = \int r^2\, dm = \int r^2 \rho\, dV, \tag{185}$$

missä massa-alkio $dm = \rho\, dV$ on etäisyydellä r pyörimisakselilta.

Yhdensuuntaisten akselien teoreema (Steinerin sääntö) helpottaa M-massaisen kappaleen hitausmomentin laskemista:

$$I_P = I_{\mathrm{cm}} + Md^2, \tag{186}$$



missä I_{cm} on hitausmomentti massakeskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen ja I_P on hitausmomentti pisteen P kautta kulkevan yhdensuuntaisen akselin suhteen, joka on etäsyydellä d massakeskipisteestä.

10 Pyörimisliike

Pyörimisliikkeen liike-energia

Kappaleen (massa m_i) liike-energia on

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2. \tag{187}$$

Laskemalla kaikki alkiot yhteen saadaan pyörivän kappaleen kokonaisliike-energiaksi

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{rot}} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega_i)^2 \\ &\overset{\omega_i = \omega}{=} \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2. \end{aligned} \tag{188}$$

Yleisessä tapauksessa

$$K = \tfrac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2 + \tfrac{1}{2} I_{\mathrm{cm}} \omega^2. \tag{189}$$

Systeemin liike-energia voidaan siis kirjoittaa massakeskipisteen liike-energian ja sen suhteen laskettavan pyörimisenergian avulla.

10 Pyörimisliike

Työ ja teho

Vääntömomentin tekemä kokonaistyö siirtymän $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ aikana on

$$W_{\text{tot}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta. \tag{190}$$

Kun vääntömomentti tekee työtä pyörivään jäykkään kappaleeseen, saadaan

$$\tau \, d\theta = (I\alpha) \, d\theta = I \frac{d\omega}{dt} \, d\theta = I \frac{d\theta}{dt} \, d\omega = I\omega \, d\omega, \tag{191}$$

josta kokonaistyö

$$W_{\text{tot}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega \, d\omega = \tfrac{1}{2} I\omega_2^2 - \tfrac{1}{2} I\omega_1^2. \tag{192}$$

Tahti, jolla vääntömomentin tekee työtä, on pyörimisliikkeen teho

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega. \tag{193}$$

11 Pyörimismäärä

Pyörimismäärä

Kappaleen, jonka hitausmomentti origon O suhteen on I ja kulmanopeus $\vec{\omega}$, pyörimismäärä $\vec{L}$ origon O suhteen määritellään

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \tag{194}$$

Yksikkö: $[L]=\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$.
Vääntömomentti on

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,\mathrm{ulk}} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{195}$$

Jos systeemiin ei vaikuta ulkoista vääntömomenttia, niin

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,\mathrm{ulk}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \mathrm{vakio} \quad \mathrm{eli} \quad \vec{L}_{\mathrm{loppu}} = \vec{L}_{\mathrm{alku}}, \tag{196}$$

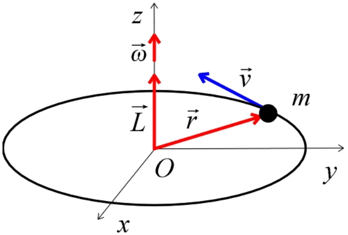
mikä on pyörimismäärän säilymislaki.

11 Pyörimismäärä

Pyörimismäärä yleisesti. Kappaleen, jonka massa on m ja nopeus $\vec{v}$, pyörimismäärä $\vec{L}$ origon O suhteen määritellään

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = mvr \sin\phi\, \hat{n}. \tag{197}$$

Jos $\vec{r}$ ja $\vec{p}$ ovat xy-tasossa, niin $\hat{n} = \hat{k}$, eli $\vec{L}$ osoittaa z-akselin suuntaan.



Pyörimismäärän muutosnopeus

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \end{aligned} \tag{198}$$

on sama kuin kokonaisvääntömomentti, joka vaikuttaa systeemiin.

11 Pyörimismäärä

Taulukko. Analogia lineaarisen ja pyörimisliikkeen välillä.

lineaarinen liike	pyörimisliike
m	I
$p = mv$	$L = I\omega$
$F = ma = \frac{dp}{dt}$	$\tau = I\alpha = \frac{dL}{dt}$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
$dW = F_s ds$	$dW = \tau d\theta$
$P = Fv$	$P = \tau\omega$

12 Tasapaino

Tasapainoehdot

Välttämättömät ehdot kappaleelle *staattisessa tasapainossa* ovat

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ulk}} = 0 \tag{199}$$

ja mv. pisteen suhteen

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\text{ulk}} = 0, \tag{200}$$

eli massakeskipiste ei liiku ja kappale ei pyöri.

Jäykän kappaleen tasapainotehtävät

Usein voidaan tarkastella voimia *xy*-tasossa, joten riittävät ehdot ovat

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0. \tag{201}$$

Valitaan tarkastelupiste siten, että laskut ovat mahdollisimman yksinkertaiset, ja käytetään sitä kaikkien voimakomponenttien vääntömomenttien laskemiseen.

21 Sähkövaraus ja -kenttä

Sähkövaraus (G 21-1)

Sähköstatiikka tutkii levossa olevia sähkövarauksia. Kokonaisvaraus säilyy, eli suljetun systeemin

kokonaisvaraus on vakio.

Varaus on lisäksi kvantittunut. Alkeisvaraus on

$$e = +1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}, \tag{202}$$

missä C on varauksen yksikkö, coulombi. 1 C (=As) on varaus, joka kulkee 1 s aikana johdossa, jossa on 1 A:n virta. Kaikki varaus voidaan esittää alkeisvarauksen avulla

$$Q = \pm Ne,\; N \in \mathcal{N}. \tag{203}$$

Makroskooppisissa kappaleissa, joissa on paljon alkeisvarauksia, varausta voidaan pitää jatkuvana suureena. Varauksen siirtyminen kappaleelta toiselle johtuu usein negatiivisesti varautuneiden elektronien siirtymisestä kappaleiden välillä kontaktitilanteessa.

21 Sähkövaraus ja -kenttä

Johteet ja eristeet (G 21-3)

Johteet

- esim. metallit
- vapaita elektroneja aineessa
- metalleissa tyypillisesti 1 vapaa elektroni/atomi

Eristeet

- esim. puu, lasi, muovi
- elektronit sidottu atomiytimiin

Puolijohteet

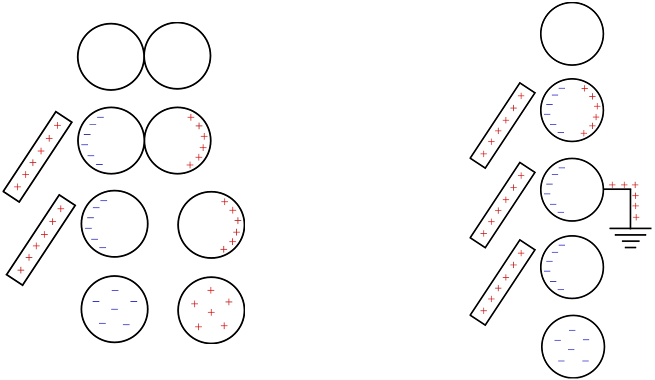
- ominaisuudet eristeiden ja johteiden väliltä.

Normaalisti aine on sähköisesti neutraalia, koska aineessa on elektroneja ($-e$) ja protoneja ($+e$) yhtä paljon. Aineen kokonaisvarausta voidaan muuttaa lisäämällä tai vähentämällä elektronien määrää. Johteiden ja eristeiden varausjakaumat ja varaamismekanismit eroavat toisistaan.

21 Sähkövaraus ja -kenttä

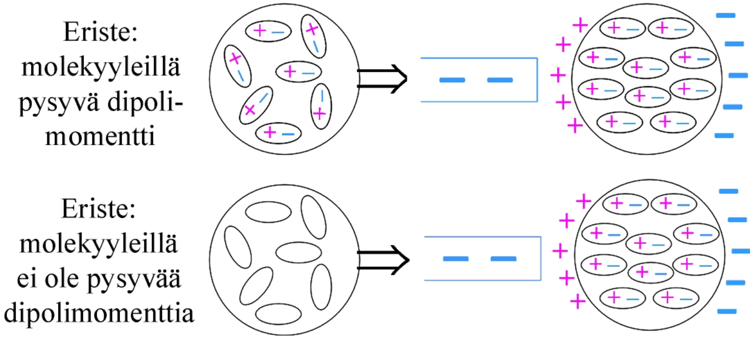
Indusoitunut varaus (G 21-4)

Metallien varaaminen sähköstaattisella induktiolla (influenssi) on yksi osoitus varauksen säilymisestä. Maapalloa voidaan pitää suurena johteena, jossa on varastoitunut suuri määrä vapaita varauksia. Kontaktissa maahan johde on maatettu (maadoitettu).



21 Sähkövaraus ja -kenttä

Eristeissä ei ole vapaita varauksia, jotka voisivat liikkua sähköisten voimien vaikutuksesta, mutta siellä voi olla joko pysyviä tai indusoituja *sähködipoleja*, jotka polarisoituvat sähkökentässä.



21 Sähkövaraus ja -kenttä

Coulombin laki (G 21-5)

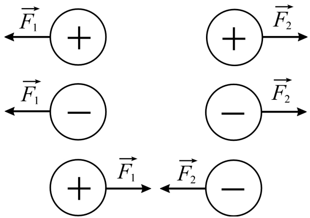
Varattujen kappaleiden välillä vaikuttaa Coulombin voima

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{204}$$

missä Coulombin vakio $k = 8{,}99 \cdot 10^9\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$. Coulombin vakio k voidaan esittää tyhjiön permittiivisyyden ϵ_0 avulla

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \tag{205}$$

missä $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2)$.



Samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan, erimerkkiset varaukset vetävät toisiaan puoleensa.

21 Sähkövaraus ja -kenttä

Coulombin laki vektorimuodossa. Varaus q_2 vaikuttaa varaukseen q_1 voimalla

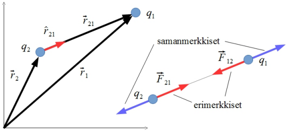
$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}. \tag{206}$$

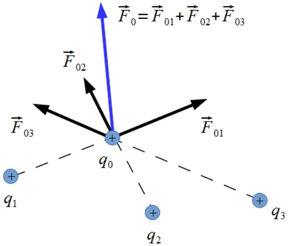
Varausten q_1 ja q_2 välinen etäisyys on r_{21} ja yksikkövektori määrää voiman suunnan

$$\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{207}$$

Kun varauksia on useita, niin tiettyyn varaukseen (q_0) vaikuttava voima on vektorisumma (superpositio) kaikkien muiden varausten (q_i, $i \neq 0$) aiheuttamista voimista

$$\vec{F}_0 = \sum_{i\neq 0}^{N} \vec{F}_{0i}. \tag{208}$$





21 Sähkövaraus ja -kenttä

Sähkökenttä (G 21-6)

Sähköinen voima välittyy sähkökentän $\vec{E}$ avulla.

Tarkastellaan testivarausta $+q_0$, joka oletetaan niin pieneksi, ettei sillä ole vaikutusta tarkasteltavien varausten muodostamaan varausjakaumaan. Tällöin muiden varausten aikaansaama sähkökenttä testivarauksen kohdalla on

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}, \tag{209}$$

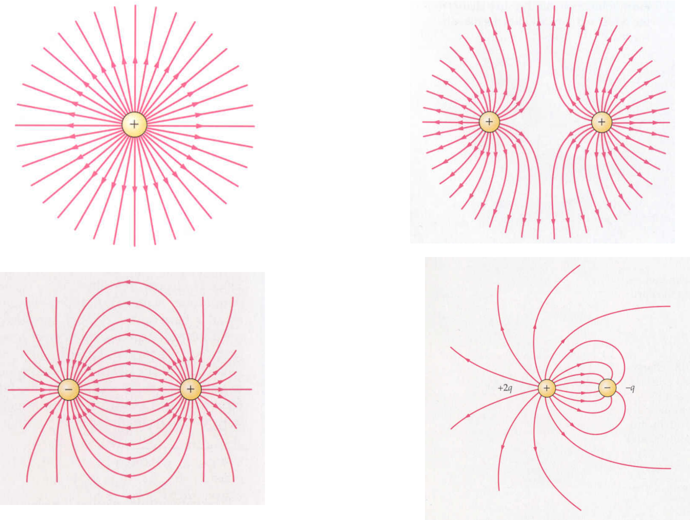
missä $\vec{F}_0$ on varausten vaikuttava voima testivaraukseen q_0.
Sähkökentän (sähkökentän voimakkuuden) yksikkö: $[E] = \mathrm{N/C}$.
Kuten voimankin tapauksessa, kenttä pisteessä P saadaan superpositiona yksittäisten varausten muodostamista kentistä

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_{i \neq 0} \frac{\vec{F}_{0i}}{q_0} = \sum_i k \frac{q_i}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}, \tag{210}$$

missä $\hat{r}_{i0}$ on yksikkövektori, joka osoittaa varauksesta q_i pisteeseen P, jossa sijaitsee testivaraus q_0.

21 Sähkövaraus ja -kenttä

Kenttäviivat (G 21-8)



21 Sähkövaraus ja -kenttä

Varauksen liike sähkökentässä (G 21-10)

Varaukseen q vaikuttava voima missä tahansa avaruuden pisteessä riippuu sähkökentästä ko. pisteessä. Voima on

$$\vec{F} = q\vec{E}. \tag{211}$$

Sähkökentässä $\vec{E}$ pistevaraus q saa kiihtyvyyden

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}, \tag{212}$$

missä m on pistevarauksen massa.

<u>Huom</u>: Elektronin nopeus tyhjiössä on usein lähellä valon nopeutta. Tällöin Newtonin liikelait pitää korvata Einsteinin vastaavilla relativistisilla yhtälöillä. Väliaineessa elektronin nopeus on huomattavasti pienempi (esim. johteissa kulkeutumisnopeus $\sim 10^{-4}$ m/s).

23 Sähköinen potentiaali

Potentiaalienergia ja potentiaali (G 23-1)

Potentiaalienergia U määriteltiin konservatiivisen voiman $\vec{F}$ tekemän työn avulla

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\Delta U = U_a - U_b. \qquad (213)$$

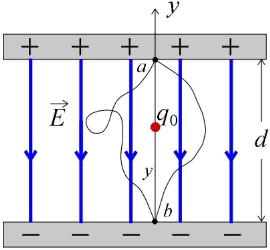
Esim. Homogeenisen kentän potentiaalienergia.

Tarkastellaan varattua hiukkasta ($q_0 > 0$), joka liikkuu homogeenisessa kentässä $\vec{E}$, joka on konservatiivinen. Kentän tekemä työ matkalla d on

$$W_{a\to b} = Fd = q_o E(y_a - y_b), \qquad (214)$$

joten potentiaalienergia on

$$U = q_0 E y + U_0. \qquad (215)$$



23 Sähköinen potentiaali

Sähköinen potentiaali määritellään potentiaalienergiana yksikkövarausta kohden

$$V = \frac{U}{q_0}. \tag{216}$$

Yksikkö: $[V]$ = V (voltti) = J/C.

Kentän tekemä työ yksikkövarauksen siirrossa $a \to b$ yksikkövarausta kohden on

$$\begin{aligned} \frac{W_{a\to b}}{q_0} &= -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) \\ &= -(V_b - V_a) = V_a - V_b. \end{aligned} \tag{217}$$

Potentiaaliero $V_a - V_b \equiv V_{ab}$ on a:n potentiaali suhteessa b:hen, sähköpiirissä V_{ab} on nimeltään *jännite*.

23 Sähköinen potentiaali

Yhteys suureiden välillä (G 23-2)

Potentiaalienergialle

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q_0(V_a - V_b), \qquad (218)$$

josta jakamalla yksikkövarauksella q_0 saadaan potentiaalierolle

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \qquad (219)$$

Yksikkö: $[E] = \mathrm{N/C} = \mathrm{V/m}$.

Esim. Homogeenisen kentän potentiaaliero on $V_a - V_b = Ed$.

Huom: Kuten potentiaalienergian tapauksessa, ainoastaan potentiaalin muutokset ovat tärkeitä, joten nollakohta voidaan valita (lähes) vapaasti. Tällöin vaikka jossakin pisteessä esim. $V_b = 0$, niin kentän ja varauksen ei tarvitse hävitä tässä pisteessä.

23 Sähköinen potentiaali

Kenttä ja potentiaali (G 23-7)

Vastaavalla tavalla kuin saatiin voiman ja potentiaalienergian välinen yhteys yksiulotteisessa tapauksessa

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}, \tag{220}$$

niin saadaan kentän ja potentiaalin välille yhteys (jakamalla q_0:lla)

$$E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \tag{221}$$

Kolmiulotteisessa tapauksessa

$$\vec{E} = \left(E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{k}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) = -\nabla V, \tag{222}$$

eli sähkökenttä on potentiaalin negatiivinen gradientti.

Elektronivoltti (G 23-8). Pienille energioille on yksikkö

$$1\ \text{eV} = 1{,}602\cdot10^{-19}\ \text{C}\cdot\text{V} = 1{,}602\cdot10^{-19}\ \text{J}.$$

24 Kapasitanssi

Kondensaattori (G 24-1)

Kondensaattori on laite, joka varastoi varausta ja energiaa ja joka koostuu kahdesta erillisestä johteesta, joilla on samansuuruiset mutta erimerkkiset varaukset ($+Q$ ja $-Q$). Kondensaattorin *kapasitanssi* määritellään

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}, \tag{223}$$

missä Q on jomman kumman johteen varauksen suuruus ja V_{ab} on johteiden välinen potentiaaliero. Yksikkö: $[C]$ = F (faradi) = C/V.

Kapasitanssi kuvastaa kondensaattorin kykyä varastoida varausta annetulla potentiaalierolla. Varauksen lisääminen lisää myös potentiaalieroa, joten kondensaattorin kapasitanssi pysyy vakiona.

Kondensaattoreita on kaikkialla: salamalaite, kiihtyvyysanturit (mm. turvatyynyt), radio- ja TV-vastaanottimet, jne.

24 Kapasitanssi

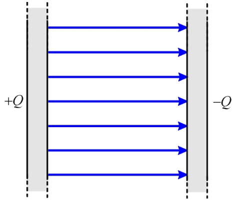
Kapasitanssin määrittäminen (G 24-2)

Yleisesti systeemin kapasitanssi riippuu johteiden koosta, muodosta ja geometrisesta ryhmittelystä sekä (eristävästä) väliaineesta johteiden välissä.

Esim. Levykondensaattorit

Levykondensaattorin levyjen pinta-ala A on huomattavasti suurempi kuin niiden välinen etäisyys d. Sähkökenttä levyjen välissä on siis homogeeninen. Levykondensaattorin kapasitanssi on

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \qquad (224)$$



Käytännössä levykondensaattori rakentuu kahdesta ohuesta metallikalvosta, joiden väliin on laitettu muovikalvo, ja koko systeemi on kierretty rullalle.

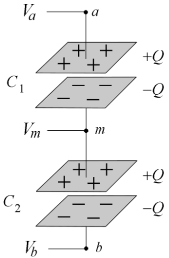
24 Kapasitanssi

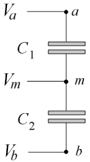
Kondensaattorit sarjassa (G 24-3)

Sarjaan kytketyillä kondensaattoreilla on **sama varaus** Q. Jännitteet ovat

$$V_1 = V_a - V_m = \frac{Q}{C_1} \qquad (225)$$

$$V_2 = V_m - V_b = \frac{Q}{C_2}. \qquad (226)$$





Koko systeemin jännite on

$$V_{ab} = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right). \qquad (227)$$

Sarjaan kytketyt kondensaattorit voidaan korvata yhdellä kondensaattorilla, jonka *ekvivalenttinen kapasitanssi* on

$$C_{\mathrm{eq}} = \frac{Q}{V_{ab}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \qquad (228)$$

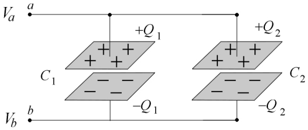
24 Kapasitanssi

Kondensaattorit rinnan (G 24-3)

Rinnan kytketyillä kondensaattoreilla on **sama jännite** V_{ab}. Varaukset ovat

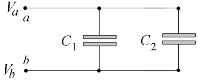
$$Q_1 = C_1 V_{ab} \tag{229}$$

$$Q_2 = C_2 V_{ab}. \tag{230}$$



Systeemin kokonaisvaraus on

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V_{ab} + C_2 V_{ab} = (C_1 + C_2) V_{ab} \tag{231}$$



Rinnan kytketyt kondensaattorit voidaan korvata yhdellä kondensaattorilla, jonka *ekvivalenttinen kapasitanssi* on

$$C_{\mathrm{eq}} = \frac{Q}{V_{ab}} = C_1 + C_2, \tag{232}$$

eli kondensaattorien lisääminen rinnalle lisää kapasitanssia ja siten kondensaattorisysteemin kykyä varastoida varausta.

24 Kapasitanssi

Varastoitunut energia (G 24-4)

Kondensaattoria varattaessa tehdään työtä varauksen siirtämiseen johteelta toiselle. Oletetaan, että varausta on siirtynyt johteiden välillä määrä q, jolloin niiden välillä on potentiaaliero $v = q/C$. Pienen varauksen dq siirtämisessä negatiiviselta johteelta positiiviselle potentiaalissa v tehdään työ

$$dW = v\,dq = \frac{q}{C}\,dq, \tag{233}$$

josta integroimalla

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}, \tag{234}$$

joka varastoituu kondensaattoriin ja joka voidaan tarvittaessa käyttää purkamalla kondensaattori. Käyttämällä kapasitanssin määritelmää (223) saadaan

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV, \tag{235}$$

ts. Q siirtyy keskimääräisellä potentiaalilla $\frac{1}{2}V$.

24 Kapasitanssi

<u>Huom</u>: Kondensaattori varataan usein kytkemällä se paristoon, jolla on jokin vakiojännite V. Työ, jonka paristo tekee kondensaattorin varaamisessa, on $W = QV$, joka on kaksi kertaa se, mitä kondensaattoriin varastoituu energiaa. Toinen puoli pariston tekemästä työstä menee lämpöhäviöihin.

<u>Esim</u>. Levykondensaattoriin varastoitunut energia on

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \frac{A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 (Ad), \tag{236}$$

josta saadaan sähkökentän *energiatiheys* (energia/tilavuus)

$$u_E = \frac{U}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \tag{237}$$

missä $\mathcal{V} = Ad$ on levyjen välisen alueen (ts. sähkökentän) tilavuus.

Saatu tulos on yleinen kaikille sähkökentille.

25 Sähkövirta ja resistanssi

Sähkövirta (G 25-2)

Sähkövirta I määritellään sähkövarausten virtausnopeutena

$$I = \frac{dQ}{dt}, \tag{238}$$

missä dQ on varaus, joka virtaa johteessa poikkipinta-alan A läpi ajassa dt. Yksikkö: $[I] = \mathrm{C/s} = \mathrm{A}$ (ampeeri).

Jotta piirissä kulkisi virta, pitää piirin olla suljettu.

Sähkövirta syntyy, kun sähkökenttä vaikuttaa johteessa vapaisiin varauksenkuljettajiin voimalla $\vec{F} = q\vec{E}$. $\vec{E}$ määrää siten positiivisten varausten eli virran kulkusuunnan sekä pienenevän potentiaalin suunnan. Kun varaus kulkee potentiaalieron läpi, pienenee sen potentiaalienergia, joka muuttuu mm. johdemateriaalin lämpöenergiaksi. Koska varaus säilyy, pitää virrankin säilyä.

25 Sähkövirta ja resistanssi

Ohmin laki (G 25-3)

Johteessa sähkövirta I kasvaa lineaarisesti, kun jännitettä V kasvatetaan. Tulokseksi saadaan

$$I = \frac{V}{R}, \tag{239}$$

missä R on johteen *resistanssi*. Yksikkö: $[R] = \Omega$ (ohmi) $= \mathrm{V/A}$.
Materiaalit, joiden resistanssi ei riipu jännitteestä tai virrasta, ovat ohmisia materiaaleja, joille

$$V = RI, \quad R = \mathrm{vakio}, \tag{240}$$

mikä on Ohmin laki.
Johtimen resistanssi on

$$R = \rho \frac{\ell}{A}, \tag{241}$$

missä ℓ on johtimen pituus, A sen poikkipinta-ala ja ρ on johteessa käytetyn materiaalin *resistiiivisyys* (G 25-4). Yksikkö: $[\rho] = \Omega \cdot \mathrm{m}$.

25 Sähkövirta ja resistanssi

Sähköteho (G 25-5)

Potentiaalienergian muutos aikayksikössä on *teho*

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} V = IV, \tag{242}$$

Yksikkö: $[P]$ = W (watti) = VA = J/s.

Komponentissa tehohäviö on

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}, \tag{243}$$

joka tarkoittaa sitä, millä teholla sähköistä potentiaalienergiaa siirtyy virtapiirin komponentteihin.

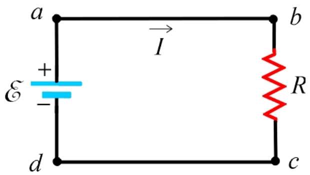
26 Tasavirtapiirit

Sähkömotorinen voima (smv) (G 26-1)

Suljetussa piirissä varaus säilyy ja siten virta on kaikkialla piirissä sama. Kun varaus kulkee potentiaalieron läpi, sen potentiaalienergia muuttuu, yleensä pienenee. Jotta tasainen virta voidaan pitää yllä, piirissä pitää olla paikka, jossa varauksen potentiaalienergia kasvaa.

Kun varaus kulkee *jännitelähteen* läpi, sen po- tentiaalienergia kasvaa. Työ, joka tehdään yksikkövarausta kohti, on *lähdejännite* $\mathcal{E}$ (sähkömotorinen voima, smv). Yksikkö: $[\mathcal{E}]$ = V

Jännitelähteitä voidaan kuvata myös niiden kokonaisvarauksella Q: $[Q]$= A·h = 3600 C.



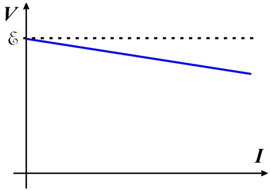
Jännitelähteitä ovat esimerkiksi paristo, akku, sähkögeneraattori, aurinkokenno, termopari ja polttokenno, jotka muutavat kemiallista, mekaanista, säteily-, lämpö- jne. energiaa sähköenergiaksi.

26 Tasavirtapiirit

Todellisessa jännitelähteessä napojen välillä oleva jännite, ns. *napajännite* ei ole sama kuin lähdejännite, vaan jännitelähteellä on myös sisäinen resistanssi. Tällöin napajännite on

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir, \tag{244}$$

missä r on jännitelähteen sisäinen resistanssi.



Huomioita:

- Johdinsilmukan ympäri kokonaispotentiaalin muutoksen pitää hävitä, koska energia säilyy, eli $\mathcal{E} - Ir - IR = 0$.
- Hyvällä paristolla tai akulla sisäinen resistanssi on hyvin pieni ($\sim$ 0,01 Ω).
- Vanhan tai kylmän akun tai pariston lähdejännite ei ole juurikaan pienentynyt alkuperäisestä, mutta sisäinen resistanssi on saattanut kasvaa useilla kertaluokilla.

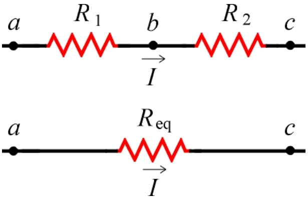
26 Tasavirtapiirit

Vastukset sarjassa (G 26-2)

Sarjaan kytketyjen vastusten läpi kulkee **sama virta** I (varaus säilyy). Jännitehäviöt vastuksissa

$$V_1 = IR_1 \tag{245}$$

$$V_2 = IR_2 \tag{246}$$



Kokonaisjännitehäviö (energia säilyy) on

$$V = V_1 + V_2 = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2). \tag{247}$$

Sarjaan kytkettyt vastukset voidaan korvata yhdellä vastuksella, jonka *ekvivalenttinen resistanssi* on

$$R_{eq} = R_1 + R_2. \tag{248}$$

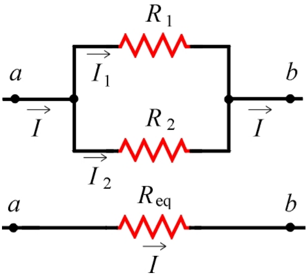
26 Tasavirtapiirit

Vastukset rinnan (G 26-2)

Rinnan kytketyjen vastusten yli on **sama jännitehäviö** V_{ab} (energia säilyy). Virta jakautuu eri vastuksille

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \tag{249}$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} \tag{250}$$



Kokonaisvirta (varaus säilyy) on

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{251}$$

Rinnan kytkettyt vastukset voidaan korvata yhdellä vastuksella, jonka *ekvivalenttinen resistanssi* on

$$R_{\mathrm{eq}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{252}$$

26 Tasavirtapiirit

Kirchhoffin lait (G 26-3)

Usein kuitenkin piirit ovat sellaisia, että niitä ei pystytä analysoimaan pelkästään tarkastelemalla systeemin ekvivalenttisia vastuksia. Esim. piirissä on useita jännitelähteitä. Kirchhoffin lait toimivat mille tahansa piirille:

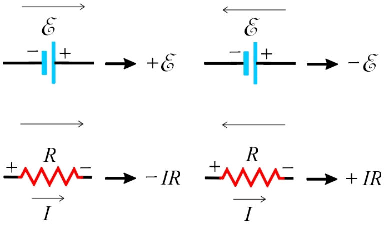
1. **Liitoskohtasääntö**: Missä tahansa liitoskohdassa, jossa virta voi jakautua, liitoskohtaan tulevien ja siitä lähtevien virtojen pitää olla yhtä suuret, eli
$$\sum_i I_i = 0. \tag{253}$$
2. **Silmukkasääntö**: Kun suljetussa johdinsilmukassa kulkee virta, niin potentiaalierojen summa silmukassa pitää olla nolla, eli
$$\sum_i V_i = 0. \tag{254}$$

Liitoskohtasääntö seuraa varauksen ja silmukkasääntö energian säilymisestä.

26 Tasavirtapiirit

Ratkaisuohje

1. Piirrä kytkentäkaavio.
2. Valitse virran kulkusuunta piirin jokaisessa osassa ja merkitse se kaavioon. Merkitse jokaisen jännitelähteen, vastuksen ja kondensaattorin korkeampi potentiaali '+'-merkillä ja alhaisempi potentiaali '−'-merkillä.
3. Sovella liitoskohtasääntöä jokaisessa kohdassa, missä virta jakautuu.
4. Sovella silmukkasääntöä niin moneen lenkkiin, että saat tarvittavat yhtälöt tuntemattomien ratkaisemiseksi. Silmukkaa ei tarvitse kiertää virran suuntaan.



5. Ratkaise yhtälöryhmä.
6. Tarkista tulos maadoittamalla yksi piste ja laskemalla potentiaalit muissa pisteissä käyttäen laskettuja virtoja.