Kertaus

__Täydennetty synteesi__ : Olkoon $A_{n\times n}$ neliömatriisi.
Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä :

1) On olemassa A^{-1}
2) $\det A \neq 0$
3) A:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat
4) A:n rivit ovat lineaarisesti riippumattomat
5) Yhtälöryhmällä $Ax = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla b
6) Yhtälöryhmällä $Ax = 0$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x = 0$
7) Nolla ei ole ominaisarvo

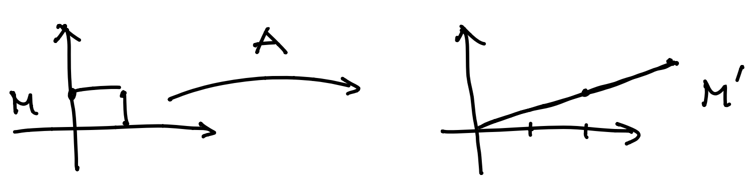
Geometrinen tulkinta :

Muodostetaan yksikköneliö : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Valitaan singulaarinen matriisi :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

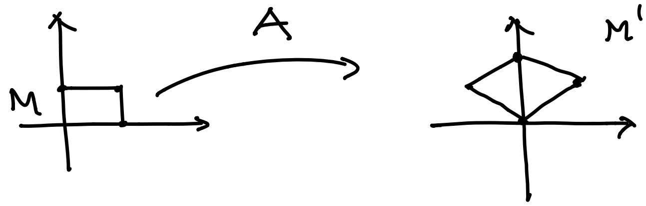
$M' = AM = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$



$\det A = 0$

Valitaan säännöllinen matriisi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad M' = AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



M:n pinta-ala $= 1$; M':n $= 2$

$\det A = 2$ (eli ns. kuvasuhde)

Matriiseja kaikkialla !

Kahden kompleksiluvun tulo:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\hat{=} \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Kahden vektorin ristitulo:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

$$\hat{=} A^{\times} b = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Keskeiset asiat:

(1) laskutoimitukset

(2) yhtälöryhmä

  – ratkaisujen lukumäärät

(3) $PA = LU$

(4) $Ax = \lambda x$; $A = S \Lambda S^{-1}$; $A = Q \Lambda Q^T$

<u>Cramerin sääntö</u> : Ratkaistaan $Ax = b$ algebrallisesti ilman eliminointia.

$$A \begin{pmatrix} x_1 & & \\ x_2 & 1 & \\ x_3 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = B_1$$

$$\Rightarrow \det A \, x_1 = \det B_1 \quad \Rightarrow x_1 = \det B_1 / \det A$$

Vastaavasti: $$(a_1 \; a_2 \; a_3) \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{(a_1 \, b \, a_3)}_{B_2}$$

$$\Rightarrow \det A \, x_2 = \det B_2 \quad \Rightarrow x_2 = \det B_2 / \det A$$

jne.

<u>Ominaisarvot</u> Matriisimuodossa

$AV = V\Lambda$ eli $A = V \Lambda V^{-1}$ jos diagonalisoituva.