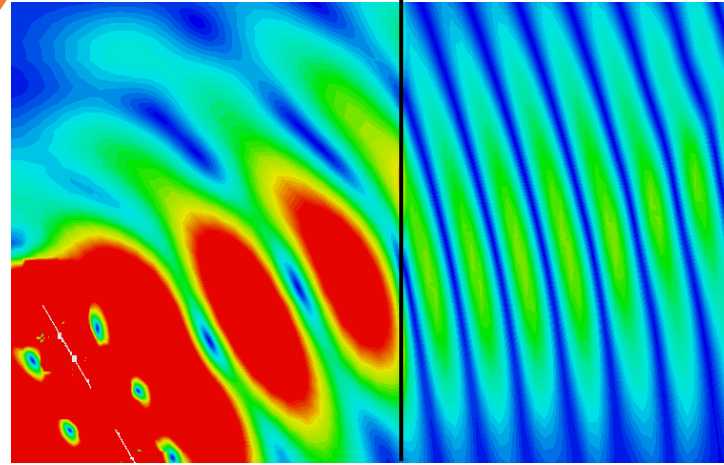
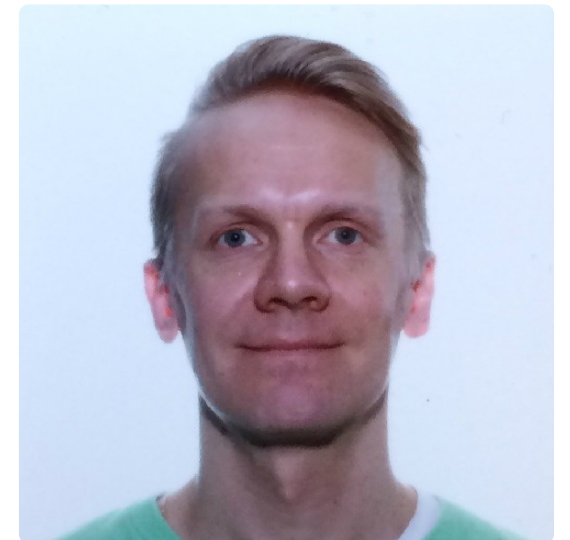


Kenttäteoria

Viikko 10: Tasoaaltojen
heijastus ja läpäisy



Hei, olen
vanhempi
yliopistonlehtori
Jari Holopainen



Viikon tiivistelmä

Tällä viikolla käsitellään tasoaaltojen käyttäytymistä kahden aineen rajapinnassa. Sähkömagneettisen aallon heijastuksista ja taitumisesta voi olla joko hyötyä tai haittaa. Esimerkiksi heijastusten ansiosta WiFi-signaali (2.4 tai 5 GHz:n mikroaalto) kuuluu yleensä hyvin, vaikka reititin olisikin eri huoneessa. Toisaalta viereisestä asunnosta kuuluva reititin voi joskus harmillisesti häiritä omaa yhteyttä. Mikroaaltojen heijastumista lentokoneesta tai sadepisaroista hyödynnetään ilmavalvonta- ja säätutkissa. Viikon aikana johdetaan esimerkiksi kuuluisa Snellin laki Maxwellin yhtälöihin perustuen.

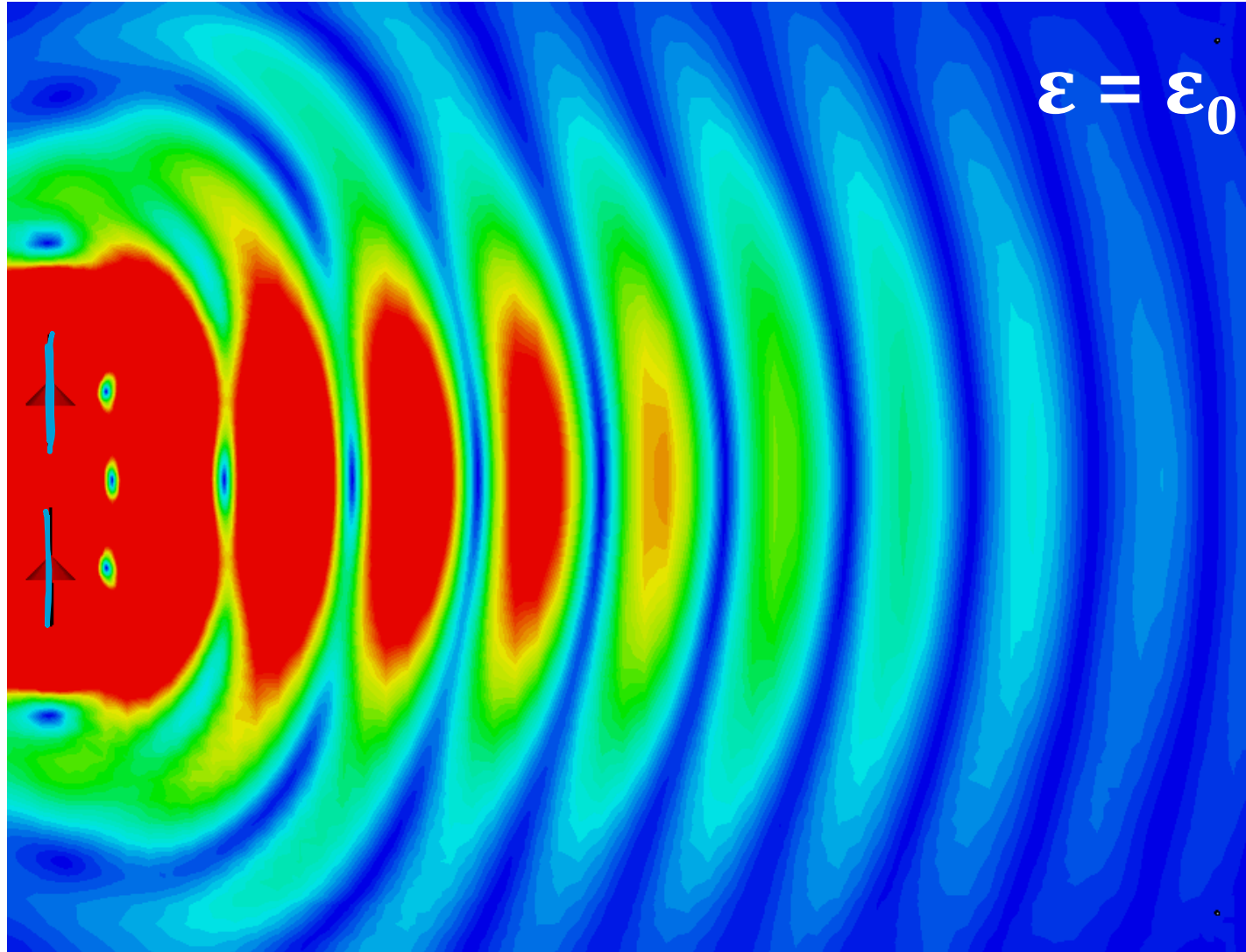
Tämän viikon oppimistavoitteet ja sisältö

- Opiskelija osaa **mallintaa** tasoallot aikaharmonisilla kompleksivektoreilla ja **ratkaista** etenemis-, vaimenemis- (← edelliset viikot), (tämä viikko→) **heijastus- ja läpäisytehtäviä** erilaisissa polarisaatio-tilanteissa aikaharmonisten Maxwellin yhtälöiden avulla.
 - Tasoaalto häviöllisessä väliaineessa (viime viikko) kertausta
 - Tasoallon kohtisuora heijastus metalliseinästä
 - Tasoallon kohtisuora heijastus ja läpäisy
 - Monikerrosrakenteista
 - Tasoallon vino heijastus ja läpäisy
- tiistaina*
- keskiviikkona*

Nämä luentokalvot ja -muistiinpanot **eivät** ole suunniteltu itseopiskeluun. Itseopiskeluun käy parhaiten oppikirjan 2. dynaamiset kentät luvut 2.3 ja 2.4

Kaksi dipoliantennia säteilee ilmassa, onko kyseessä tasoaalto vai palloaalto?

Kaksi dipoli-antennia, jotka lähettävät jatkuvasti mikroaalloja samassa vaiheessa



suuri
 $|\mathbf{E}|$

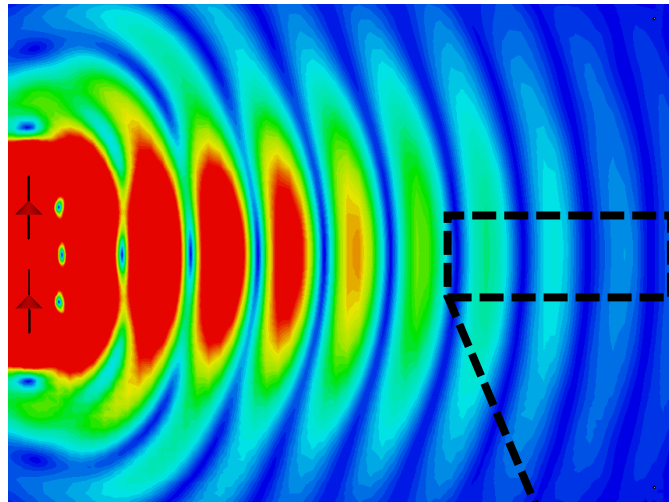


pieni
 $|\mathbf{E}|$

Mitä on esitetty?
sähkökentän voimakkuuden itseisarvo $|\mathbf{E}|$ (V/m)

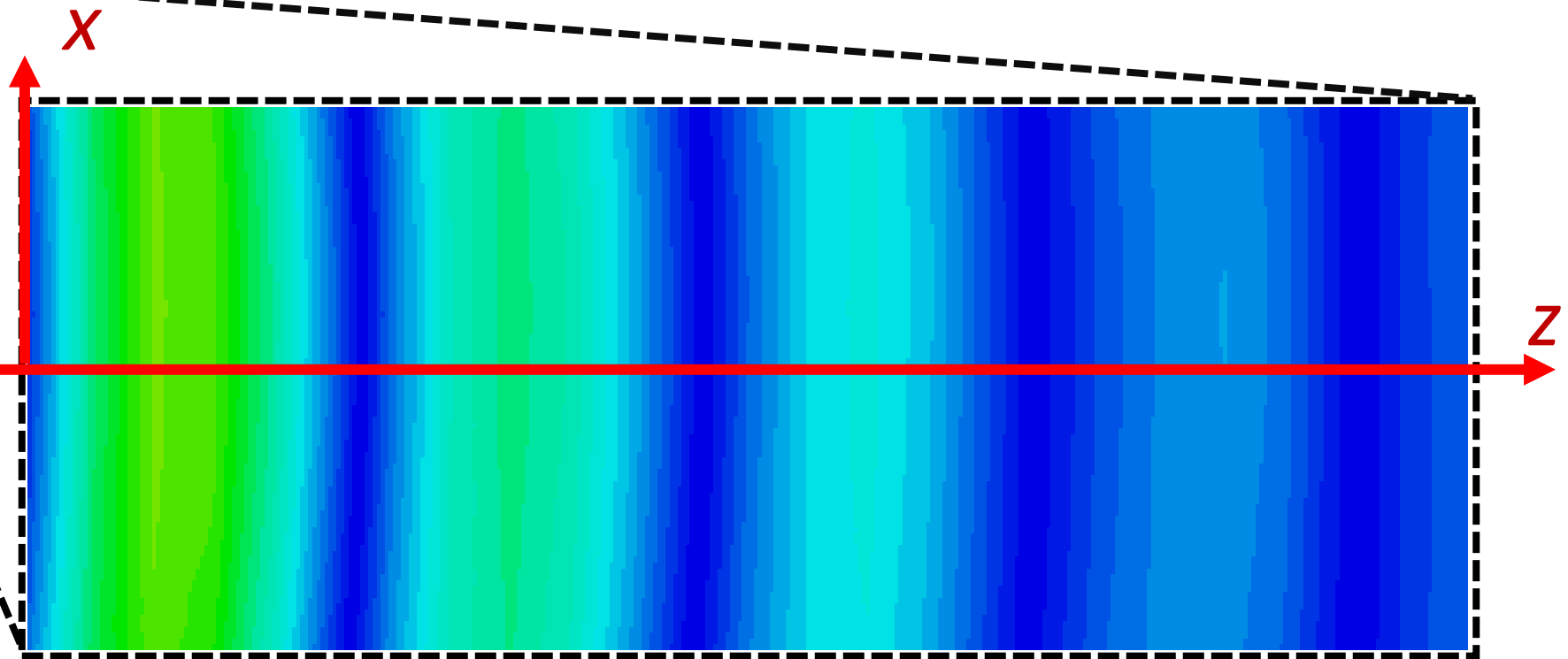
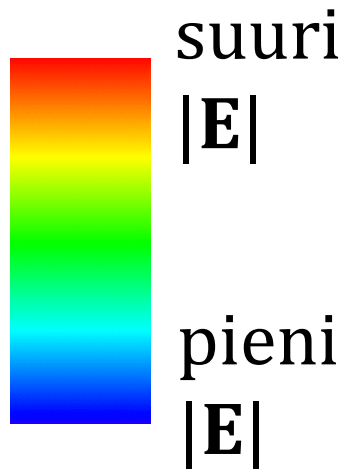
Milloin/missä tasoaalto-olettamus on voimassa?

Milloin todellista aaltoa ("palloaalto") voidaan pitää tasoaaltona?



$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{u}_x E_0 e^{-jkz}$$

-kaukana lähteestä
-pienellä alueella



Viime viikon kertausta: positiivisen z-akselin suuntaan kulkeva tasoaaltoratkaisu

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 (\epsilon_r - j\sigma/\epsilon_0\omega) \mu_0}$$

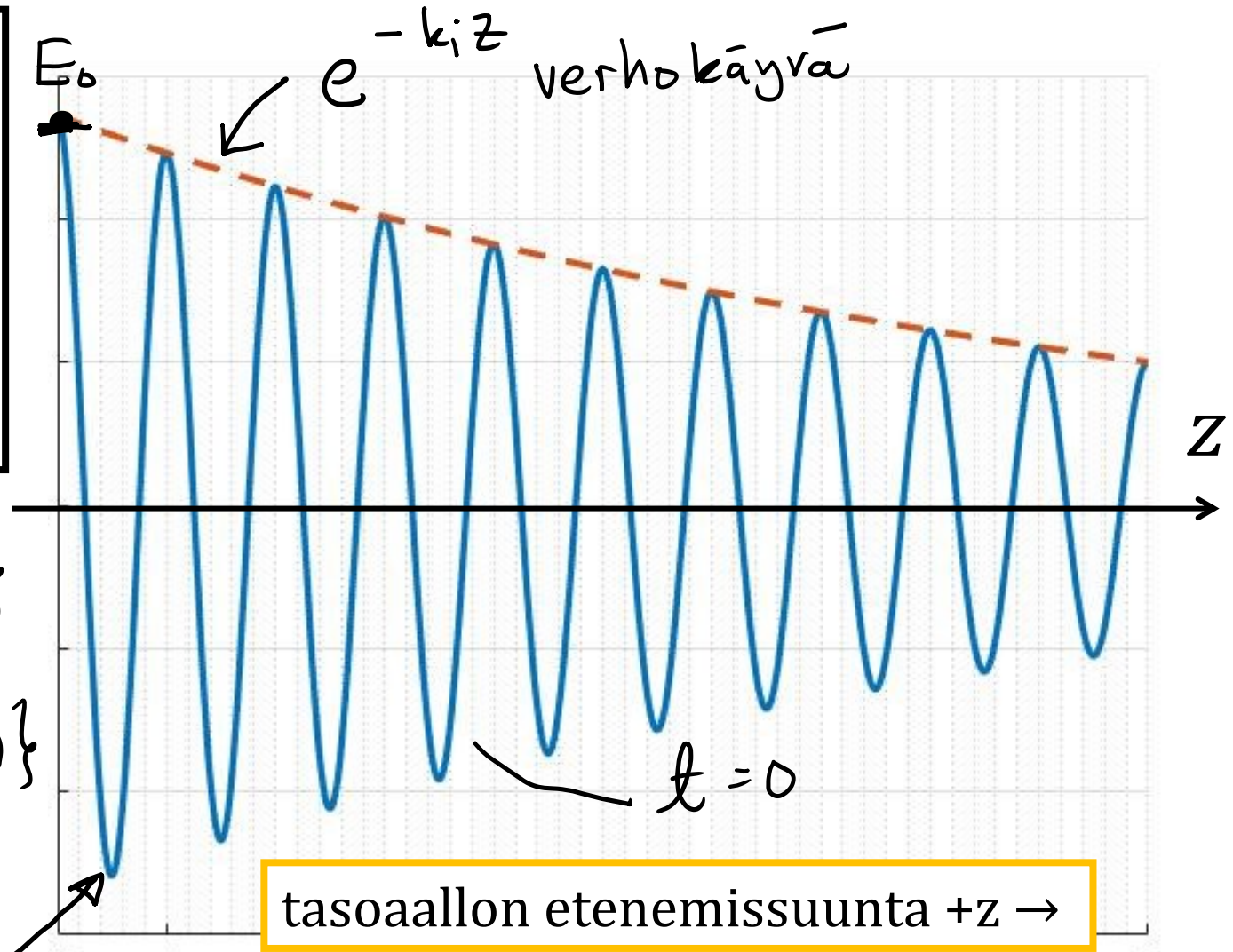
= kompleksinen etenemiskerroin (1/m)

$$= k_r \pm j k_i \quad (k_r \text{ ja } k_i \text{ reaalisia})$$

$$\underline{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{u} E_0 e^{-jkz} = \mathbf{u} E_0 e^{\pm k_i z} e^{-jk_r z}$$

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\{\underline{\mathbf{E}}(z) e^{j\omega t}\}, \quad \mathbf{u}, E_0 \text{ reaalisia}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}(z, t) &= \text{Re}\left\{ \bar{u} E_0 e^{\pm k_i z} e^{j(\omega t - k_r z)} \right\} \\ &= \bar{u} E_0 e^{\pm k_i z} \text{Re}\left\{ \cos(\omega t - k_r z) + j \sin(\omega t - k_r z) \right\} \\ &= \bar{u} E_0 e^{\pm k_i z} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - k_r z)} \end{aligned}$$



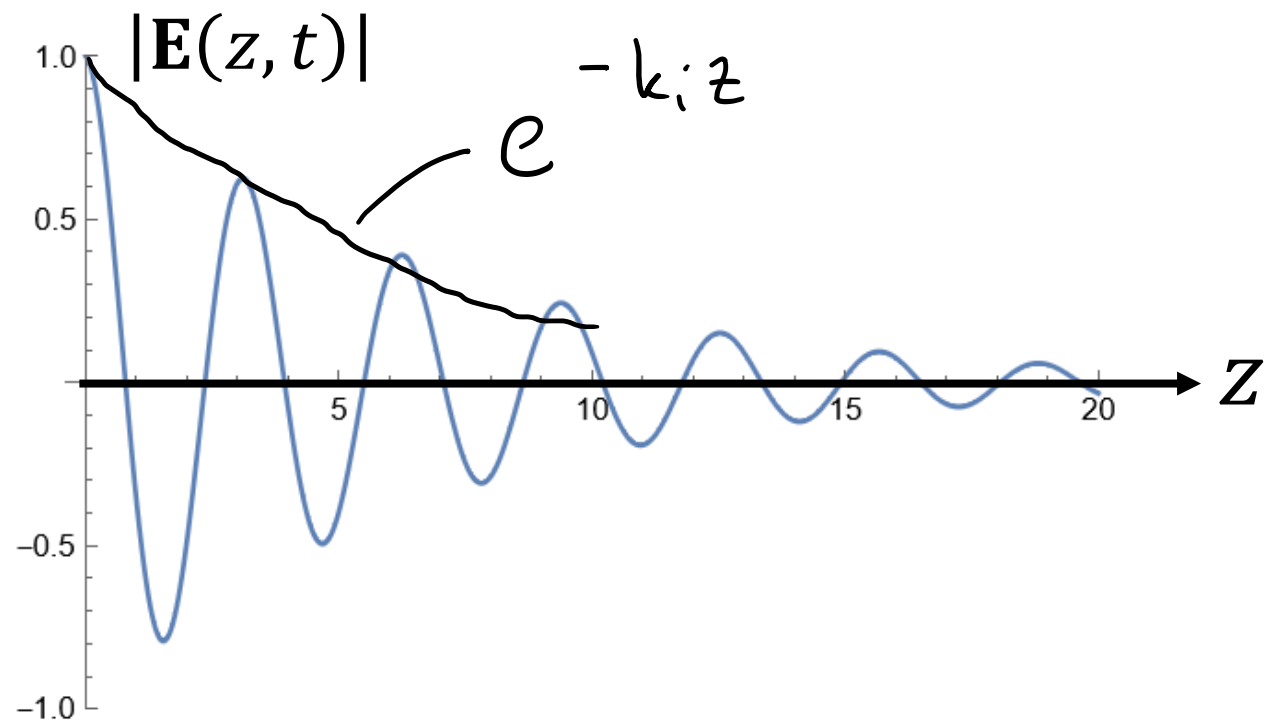
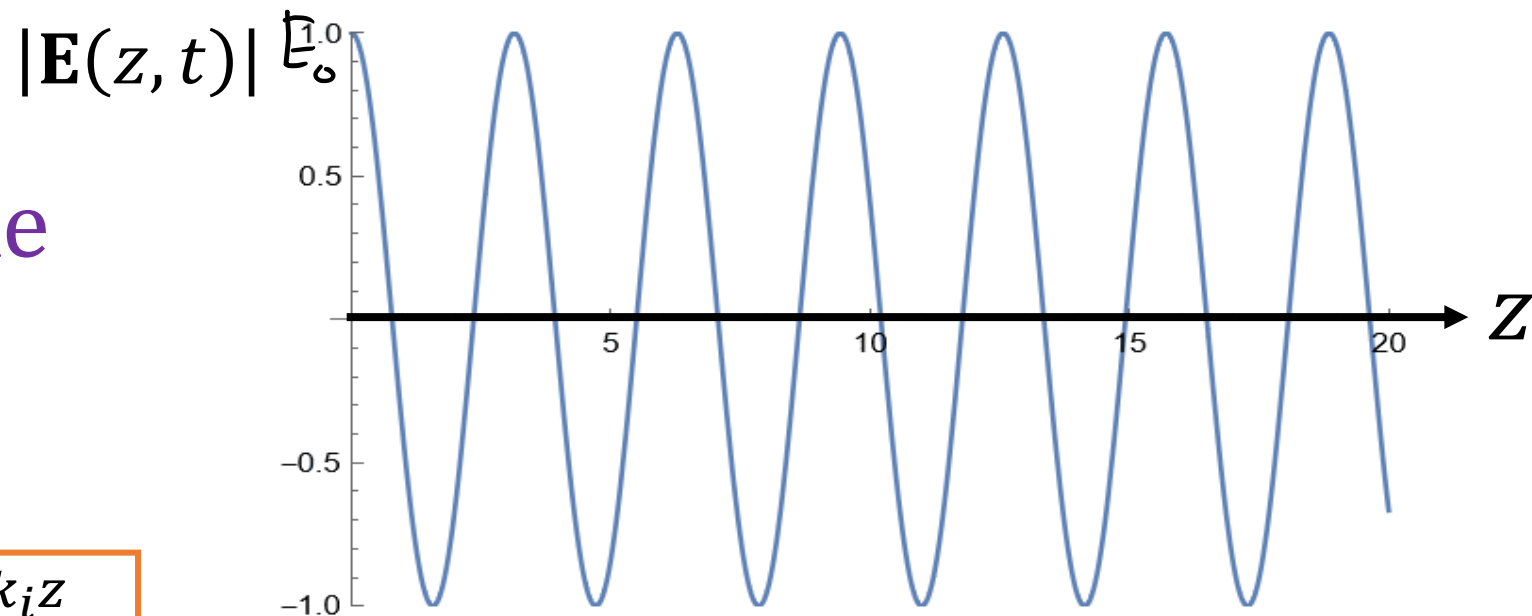
häviötön väliaine

$$k_r = 2 \frac{1}{\text{m}}; k_i = 0$$

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u} E_0 e^{-k_i z} * \cos(\omega t - k_r z)$$

häviöllinen väliaine

$$k_r = 2 \frac{1}{\text{m}}; k_i = 0,15 \frac{1}{\text{m}}$$



Tasoaallon kompleksinen aaltoluku eräässä
häviöllisessä väliaineessa on $k = 26 - j 0,10 \text{ 1/m}$.
Mikä on aallon tunkeutumissyvyys?

- 3 % a. 26 m
- 85% **b.** 10 m
- 3% c. 0,37 m
- 3% d. 0,26 m
- 3% e. 0,10 m
- 3% f. En osaa vastata

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{u}E_0 e^{-jk_r z} e^{-k_i z}$$

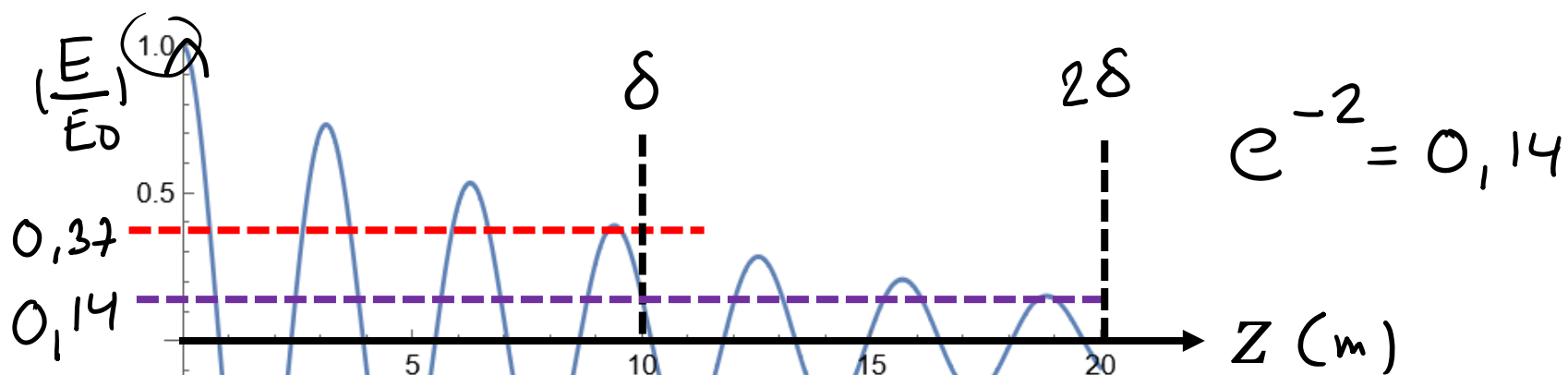
$$e^{-k_i z} = e^{-\frac{z}{\delta}}, \quad \delta = \text{tunkeutumis-} \\ \text{syvyys (m)}$$

$$\delta = \frac{1}{k_i} = \frac{1}{0,10 \frac{1}{\text{m}}} = \underline{\underline{10 \text{ m}}}$$

$$|\bar{E}(z = \delta = 10 \text{ m})| = E_0 e^{-\frac{\delta}{\delta}} = E_0 \underbrace{e^{-1}}_{0,37}$$

$$k_i = 0,10 \frac{1}{\text{m}}$$

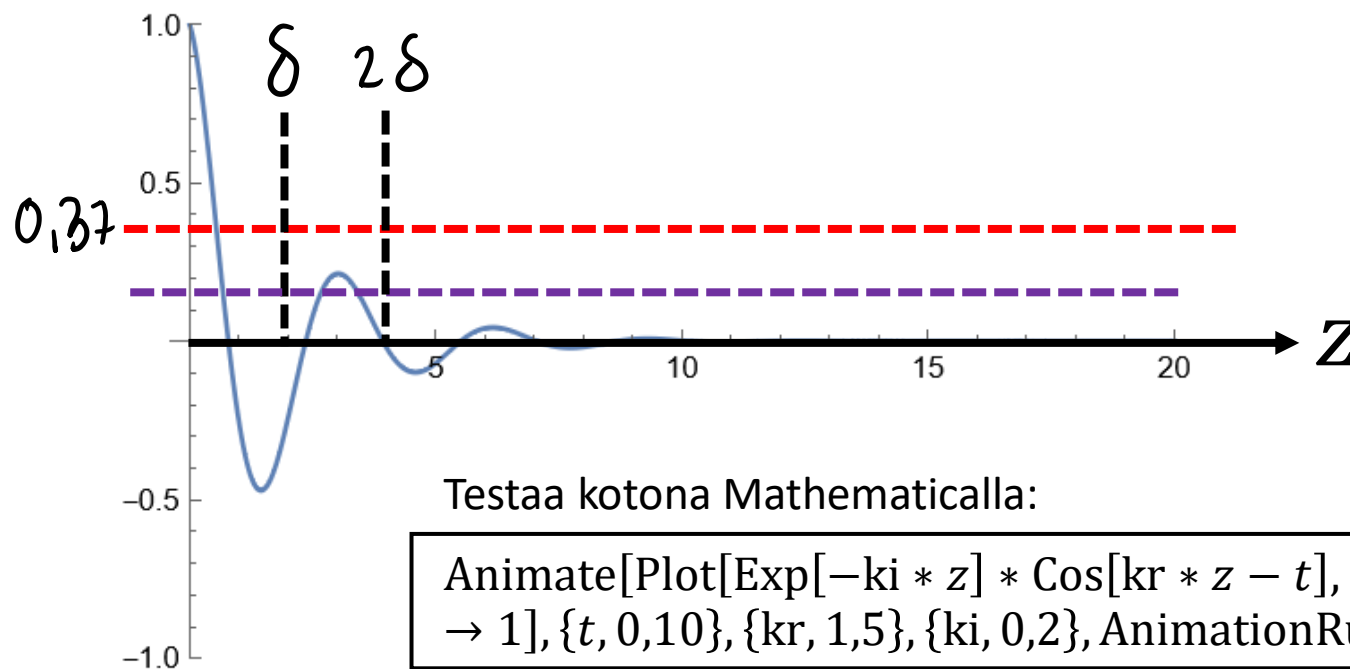
$$\delta = \frac{1}{k_i} = 10 \text{ m}$$



$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{u} E_0 e^{-k_i z} \cos(\omega t - k_r z)$$

$$k_i = 0,50 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\delta = \frac{1}{k_i} = 2,0 \text{ m}$$



Testaa kotona Mathematicalla:

```
Animate[Plot[Exp[-ki * z] * Cos[kr * z - t], {z, 0, 10}, PlotRange -> 1], {t, 0, 10}, {kr, 1, 5}, {ki, 0, 2}, AnimationRunning -> False]
```

Tunkeutumissyvyys ja virran ahtautuminen

Sähkövirta kulkee suoran ympyrälierion muotoisessa johtimessa lierion akselin suuntaisesti. Käsityksesi mukaan, missä osassa ympyränmuotoista poikkileikkausta on suurin sähkövirrantiheys J (A/m²)?

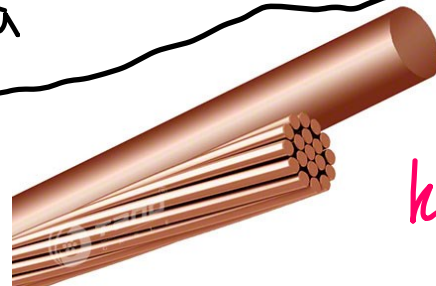
6%, a. Tasaisesti koko poikkileikkauksessa. vain DC:llä

8%, b. Pääosin johtimen keskellä (akselilla).

40%, c. Pääosin johtimen ulkoreunassa (johtimen pinnalla). AC:lla

42%, d. Riippuu taajuudesta.

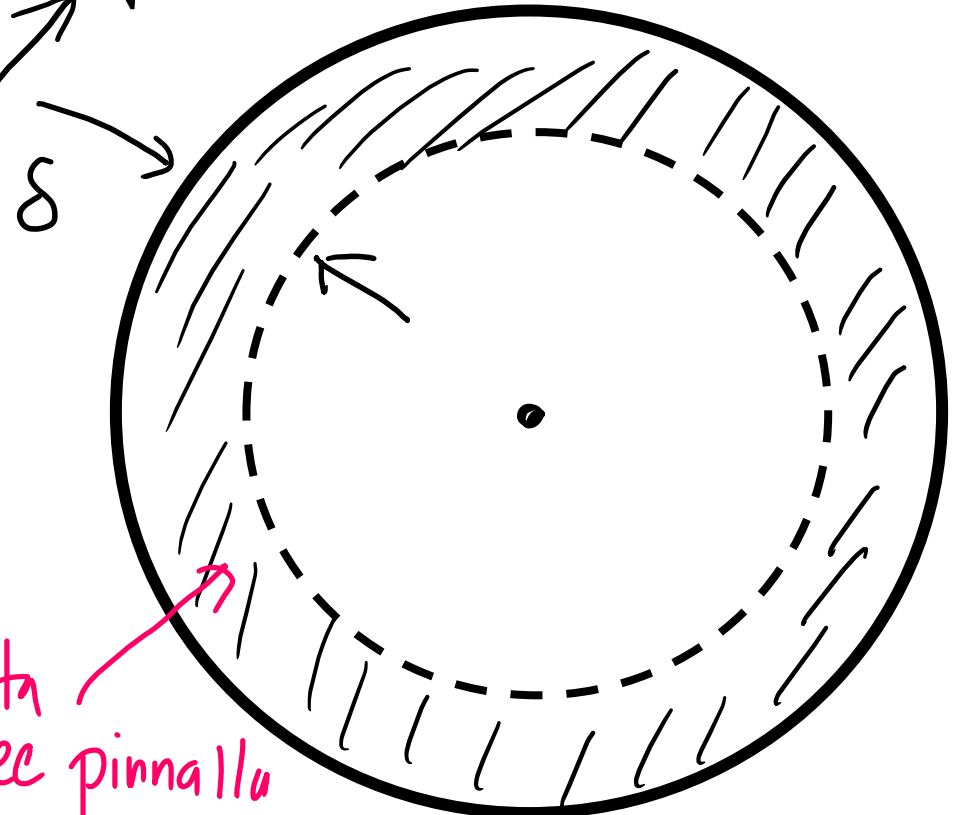
4%, e. En osaa vastata.



$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

σ = johtavuus

$$\omega = 2\pi f$$



virta kullee pinnalla

Kertausta: mikä seuraavista on sähkökentän rajapintaehto ideaalimetallin pinnalla? (tämä oli myös välikokeessa...)

- 3% a. Sähkökenttä on metallipinnalla nolla.
- 9% b. Metallipinnalla pinnan normaalin suuntainen sähkökenttä on nolla.
- 79% c. Metallipinnalla tangentin suuntainen sähkökenttä on nolla.
- 9% d. Metallipinnalla sähkökenttä on pinnan tangentin suuntainen.

VÄLIKOE

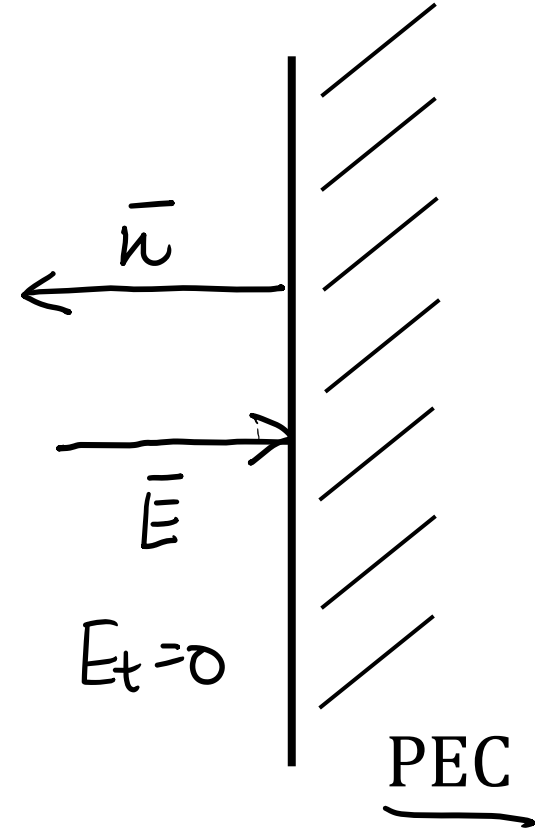
9%

10%

57%

20%

ei mitään 4%



Kertausta: miten ideaalimetallin reunaehto voidaan kirjoittaa matemaattisesti?

\mathbf{E} = sähkökentän voimakkuus ($\frac{V}{m}$)

\mathbf{n} = pinnan normaalivektori

a. $\mathbf{E} = 0$

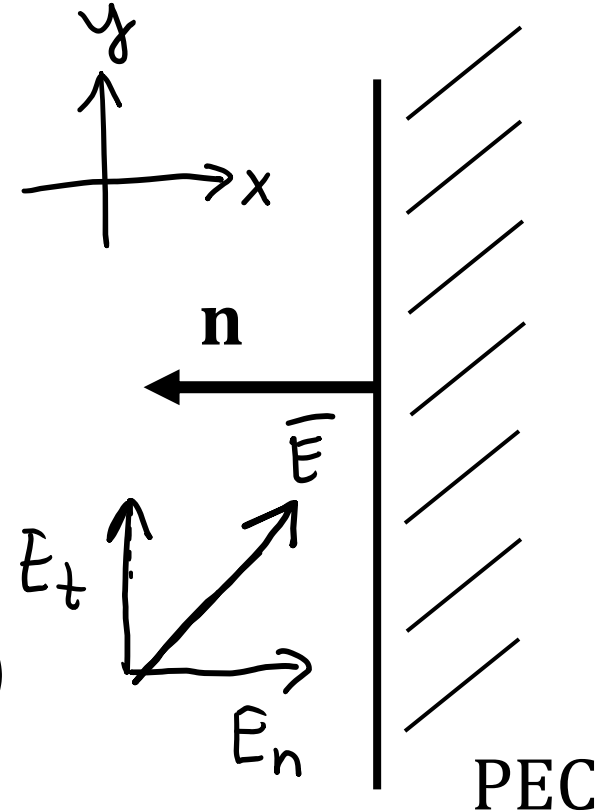
$$\bar{n} = -\bar{u}_x$$

b. $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$

$$\bar{\mathbf{E}} = E_x \bar{u}_x + E_y \bar{u}_y$$

c. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$

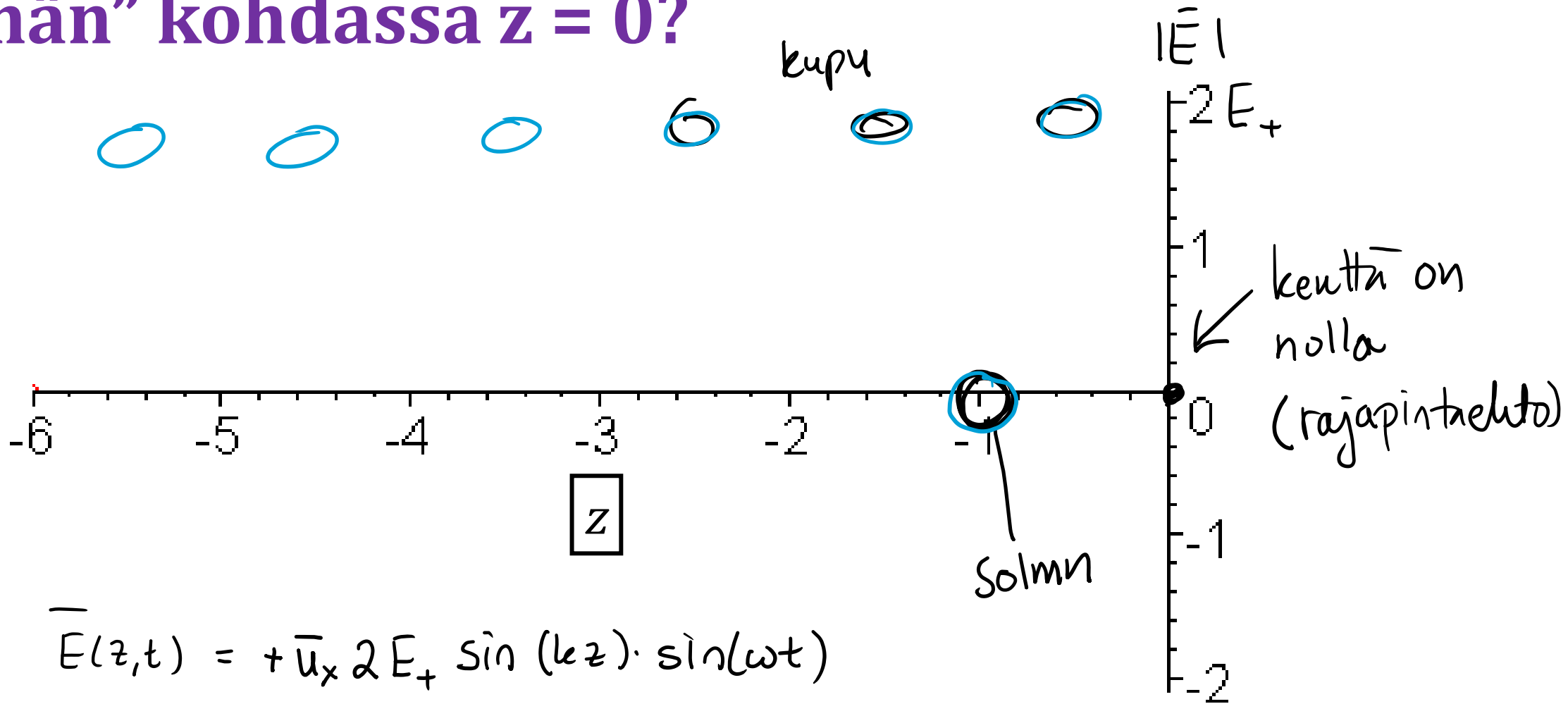
$$\bar{n} \times \bar{\mathbf{E}} = -\bar{u}_x \times (E_t \bar{u}_x + E_n \bar{u}_y)$$



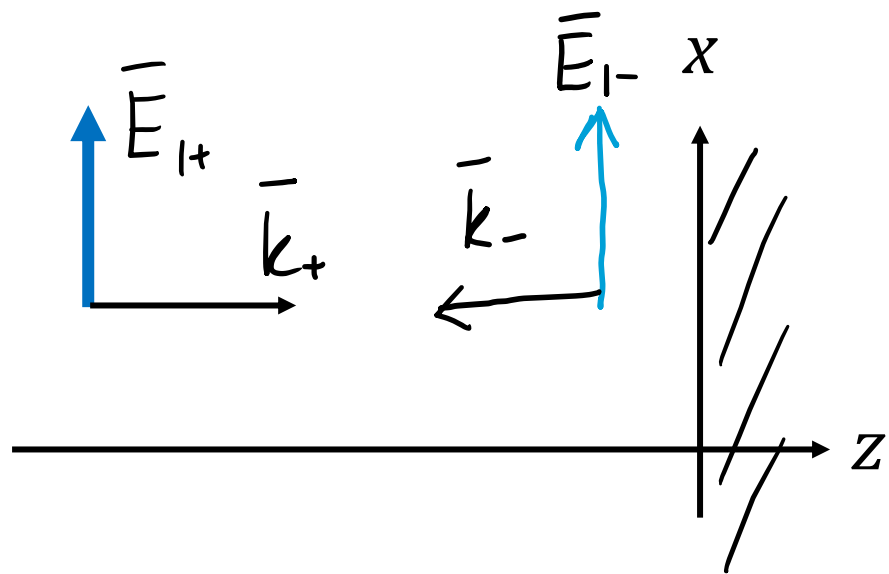
ristitulo poimii
tangentialikomponentin

$$= -\bar{u}_z E_t = 0 \Rightarrow \boxed{E_t = 0}$$

**Aalto etenee positiivisen z-akselin suuntaan.
Mitä animaatiossa tapahtuu, kun aalto kohtaa
"seinän" kohdassa $z = 0$?**



Kohtisuoraan saapuvan tasoaallon heijastuminen metallisestä



$$\bar{E}_1(z) = \bar{u}_x E_1 e^{-jkz}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz})$$

$$\sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz})$$

$$\bar{E}(z) = \bar{u}_x E_{1+} e^{-jkz} + \bar{u}_x E_{-} e^{+jkz}$$

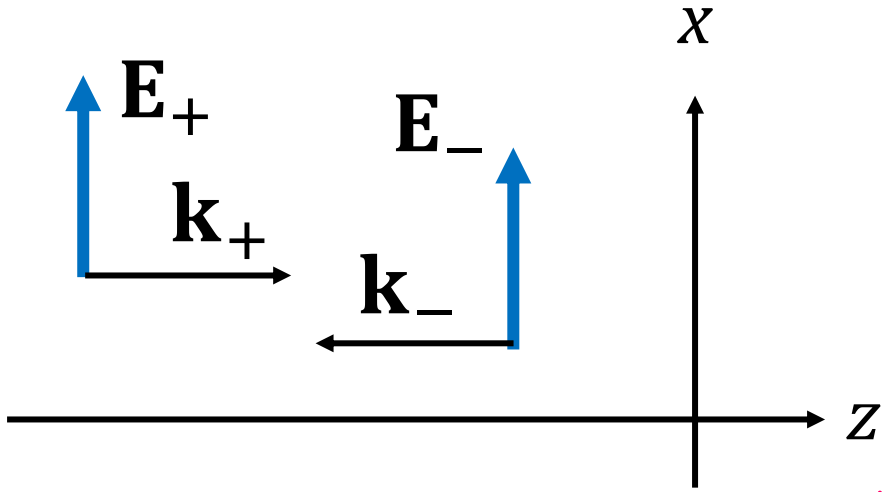
Reunaehto $\bar{E}(z=0) = 0 = \bar{u}_x E_{1+} e^{\overset{1}{\underbrace{0}}_0} + \bar{u}_x E_{1-} e^{\overset{1}{\underbrace{0}}_0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{E_{1-} = -E_{1+}}$

$$\bar{E}(z) = \bar{u}_x E_{1+} \underbrace{(e^{-jkz} - e^{+jkz})}_{-2j \sin(kz)}$$

$$= -\bar{u}_x 2j E_{1+} \sin(kz)$$

millainen aalto/kenttä?

Kohtisuoraan saapuvan tasoaallon heijastuminen metalliseinästä



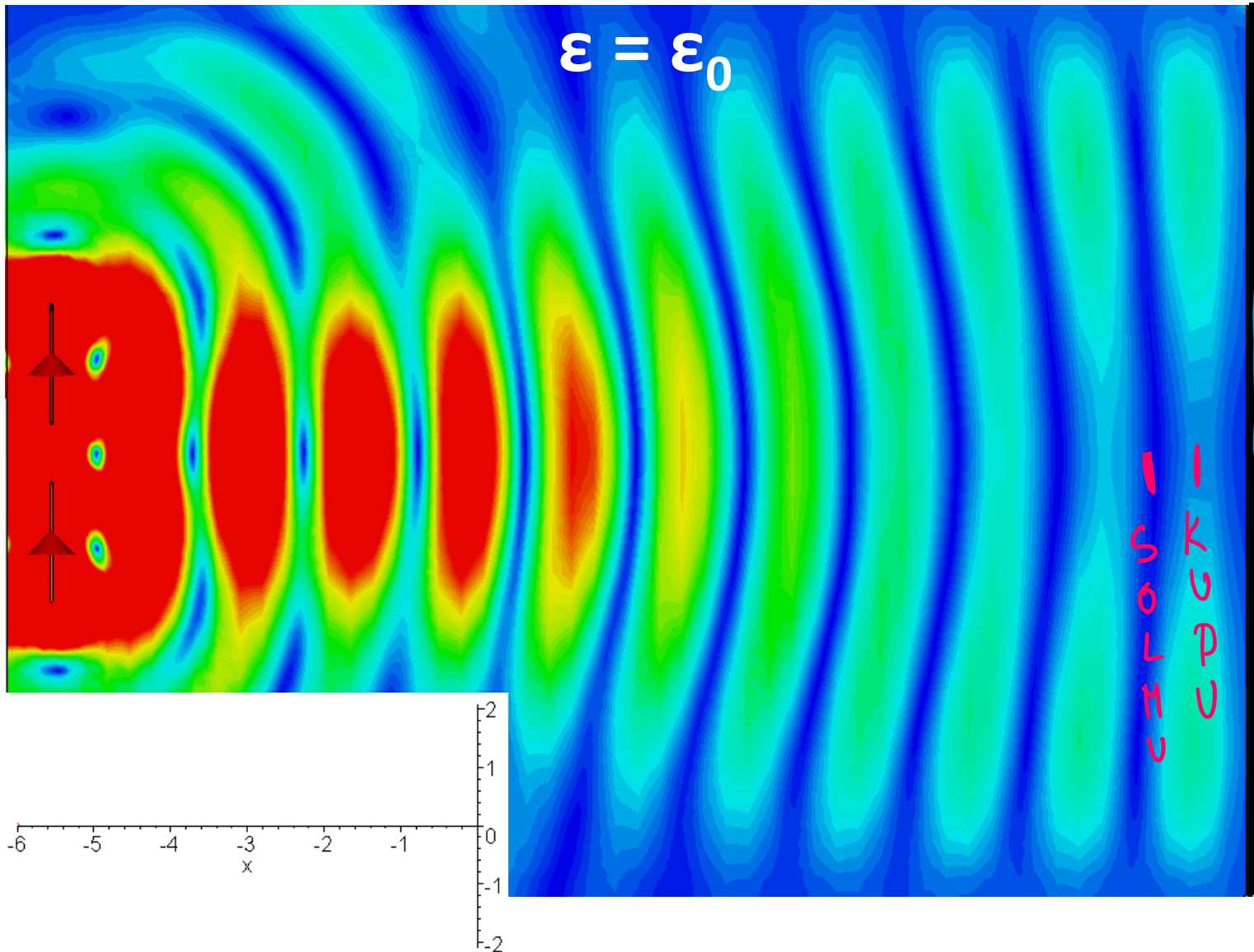
$$\mathbf{E}(z) = -\mathbf{u}_x 2j E_+ \sin(kz) \quad , \quad \underline{E_+ \text{ reaalinen}}$$

$$\overline{E}(z,t) = \text{Re} \{ \overline{E}(z) \cdot e^{j\omega t} \}$$

$$= \text{Re} \{ -\mathbf{u}_x 2 E_+ j \sin(kz) [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] \}$$

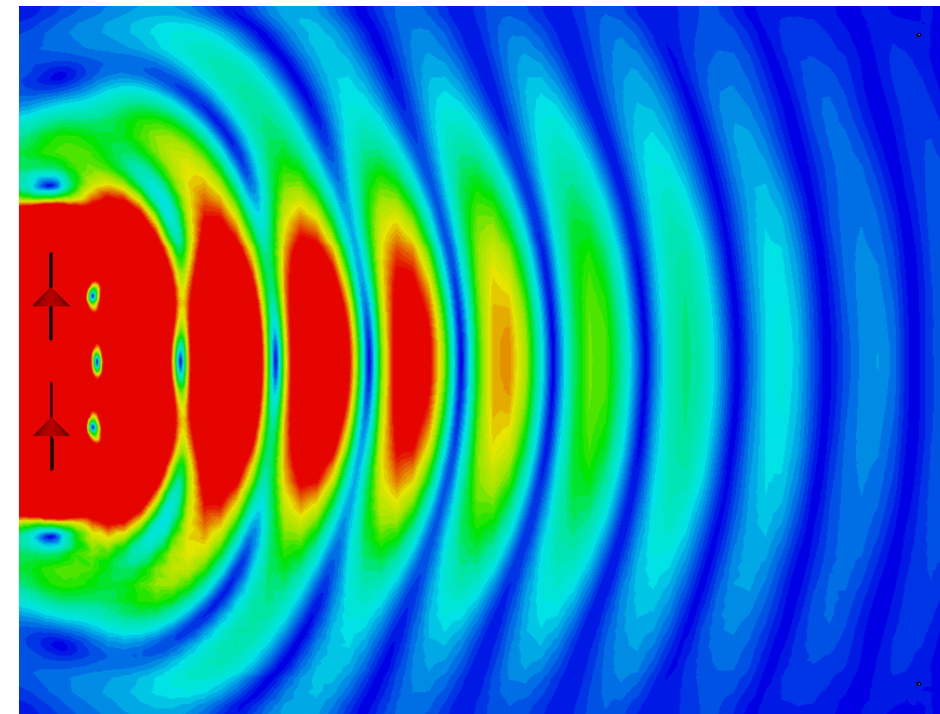
$$\overline{E}(z,t) = +\mathbf{u}_x 2 E_+ \sin(kz) \cdot \sin(\omega t)$$

Kohtisuora heijastus metalliseinästä



metalliseinä
 $\sigma = \text{"iso"}$, esim. $8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$

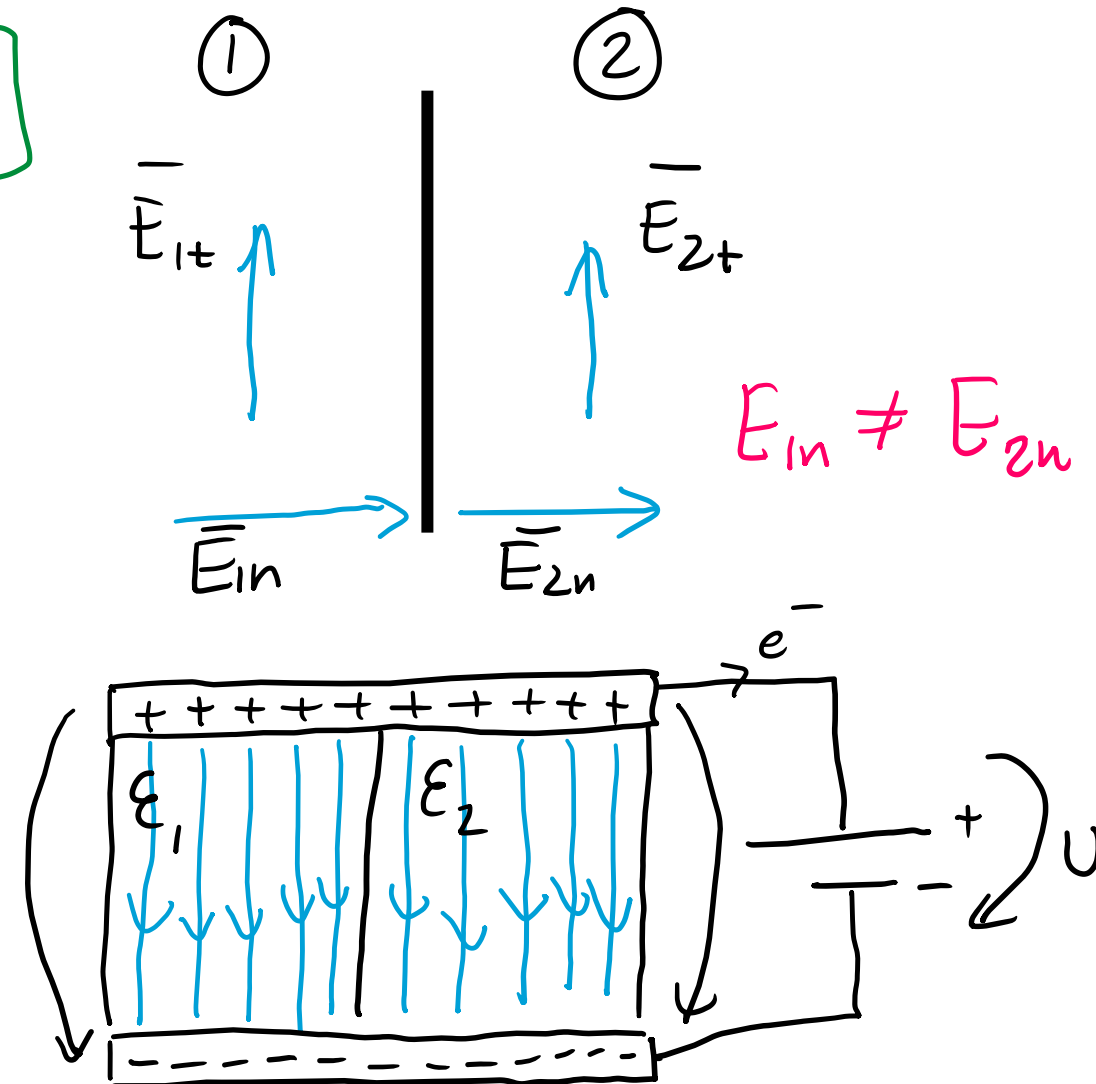
ilman metalliseinää



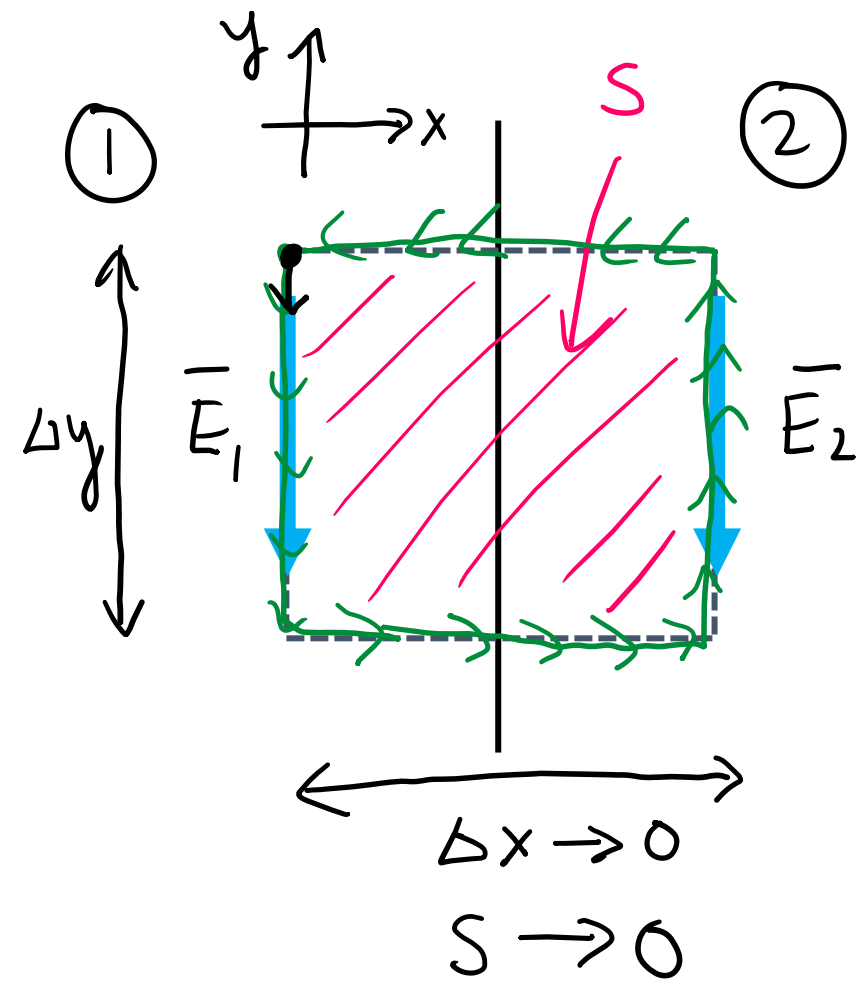
Kertausta: mikä seuraavista on sähkökentän rajapintaehto kahden dielektrisen aineen rajapinnalle?

- 10% a. Sähkökenttä on nolla.
- 6% b. Pinnan normaalin suuntainen sähkökenttä on nolla.
- 0% c. Pinnan tangentin suuntainen sähkökenttä on nolla.
- 45% d. Pinnan normaalin suuntainen sähkökentän komponentti on yhtä suuri rajapinnan molemmilla puolilla.
- 39% **e.** Pinnan tangentin suuntainen sähkökentän komponentti on yhtä suuri rajapinnan molemmilla puolilla.

$$E_{1t} = E_{2t}$$



Pinnan tangentin suuntainen sähkö-/magneettikenttä on yhtä suuri rajapinnan molemmilla puolilla



$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H}$ integroidaan pinnan S yli:

$$\iint \nabla \times \bar{E} \cdot d\bar{S} = -j\omega\mu \iint \bar{H} \cdot d\bar{S}$$

$$\oint_C \bar{E} \cdot d\bar{e} = -j\omega\mu \iint \bar{H} \cdot d\bar{S} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

\uparrow poimii tang. komp

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{e} = 0$$

$$E_1 \cdot \cancel{\Delta y} - E_2 \cdot \cancel{\Delta y} = 0 \Leftrightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

Koska $\nabla \times \bar{H} = j\omega\epsilon \bar{E} \rightarrow H_{1t} = H_{2t}$

Nablaoperaatiot

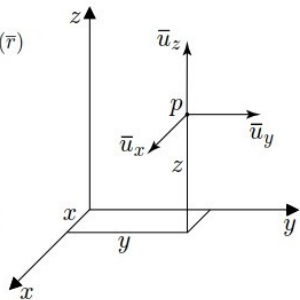
Kartesinen koordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}) + \bar{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{r}) + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\vec{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



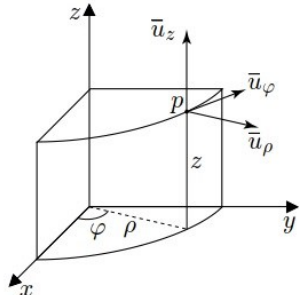
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \bar{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \bar{u}_\rho & \rho \bar{u}_\varphi & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



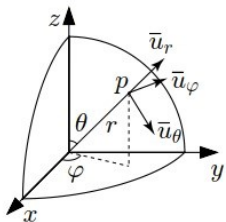
Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \bar{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \bar{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \bar{u}_r & r \bar{u}_\theta & r \sin \theta \bar{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin \theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$



Koordinaattimuunnokset vektorille \vec{f}

Kartesinen \leftrightarrow sylinterikoordinaatisto

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Kartesinen \leftrightarrow pallokoordinaatisto

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri \leftrightarrow pallokoordinaatisto

$$\rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Kartesinen koordinaatisto

$$\bar{d}\ell = \bar{u}_x dx + \bar{u}_y dy + \bar{u}_z dz$$

$$\bar{dS}_x = \bar{u}_x dy dz$$

$$\bar{dS}_y = \bar{u}_y dx dz$$

$$\bar{dS}_z = \bar{u}_z dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

Sylinterikoordinaatisto

$$\bar{d}\ell = \bar{u}_\rho d\rho + \bar{u}_\varphi \rho d\varphi + \bar{u}_z dz$$

$$\bar{dS}_\rho = \bar{u}_\rho \rho d\varphi dz$$

$$\bar{dS}_\varphi = \bar{u}_\varphi d\rho dz$$

$$\bar{dS}_z = \bar{u}_z \rho d\rho d\varphi$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

Pallokoordinaatisto

$$\bar{d}\ell = \bar{u}_r dr + \bar{u}_\theta r d\theta + \bar{u}_\varphi r \sin \theta d\varphi$$

$$\bar{dS}_r = \bar{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\bar{dS}_\theta = \bar{u}_\theta r \sin \theta dr d\varphi$$

$$\bar{dS}_\varphi = \bar{u}_\varphi r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\vec{\phi} \rightarrow \vec{E}$$

$$\text{Gaussin lause } \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \oint_S \vec{f} \cdot \bar{dS}$$

$$\text{Stokesin lause } \int_S \nabla \times \vec{f} \cdot \bar{dS} = \oint_C \vec{f} \cdot \bar{d}\ell$$

$$\uparrow \vec{E} \quad \uparrow \vec{E}$$

Vakioita

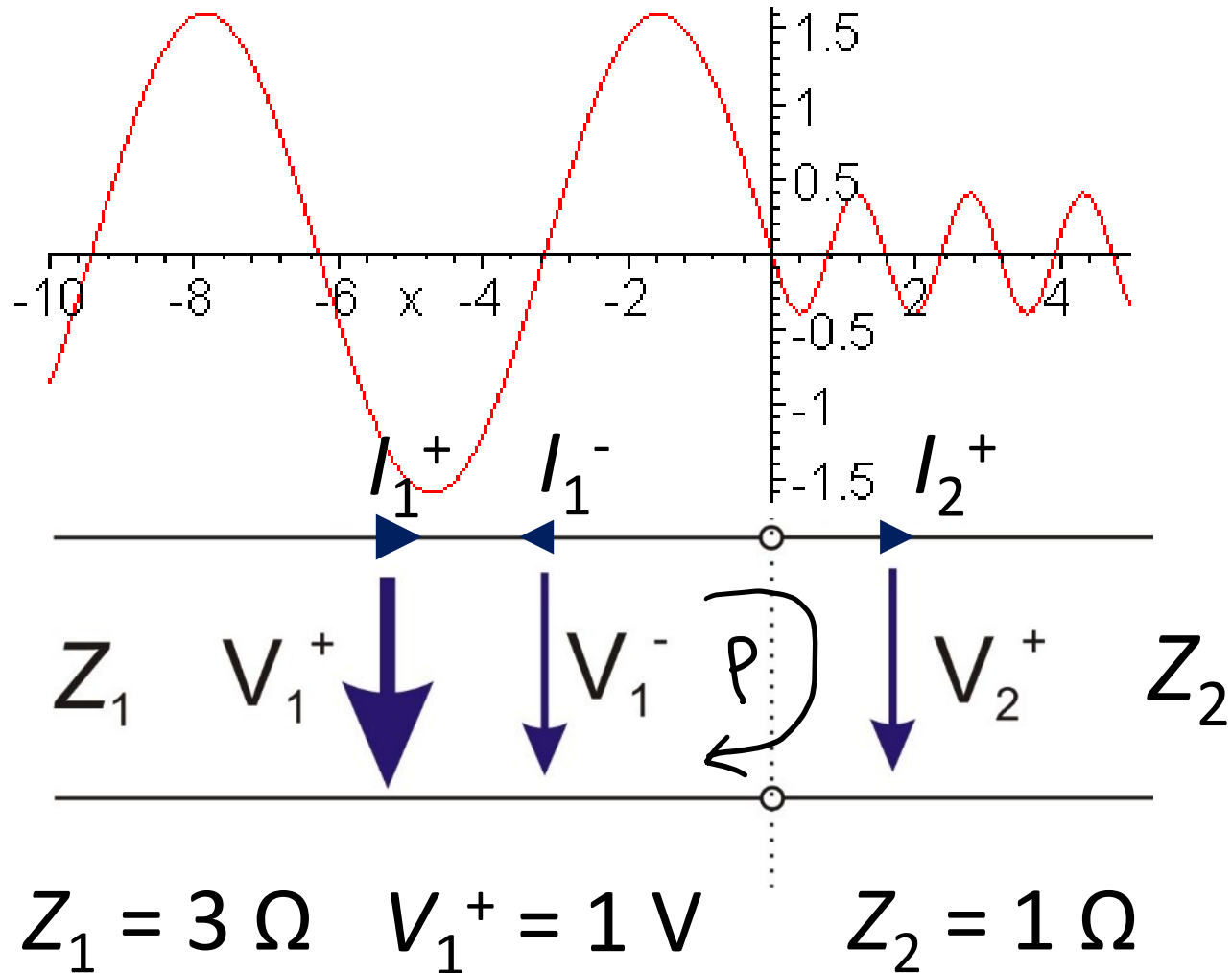
$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Piirianalyysi II: jänniteaalto heijastuu ja läpäisee kahden eri impedanssin rajapinnassa



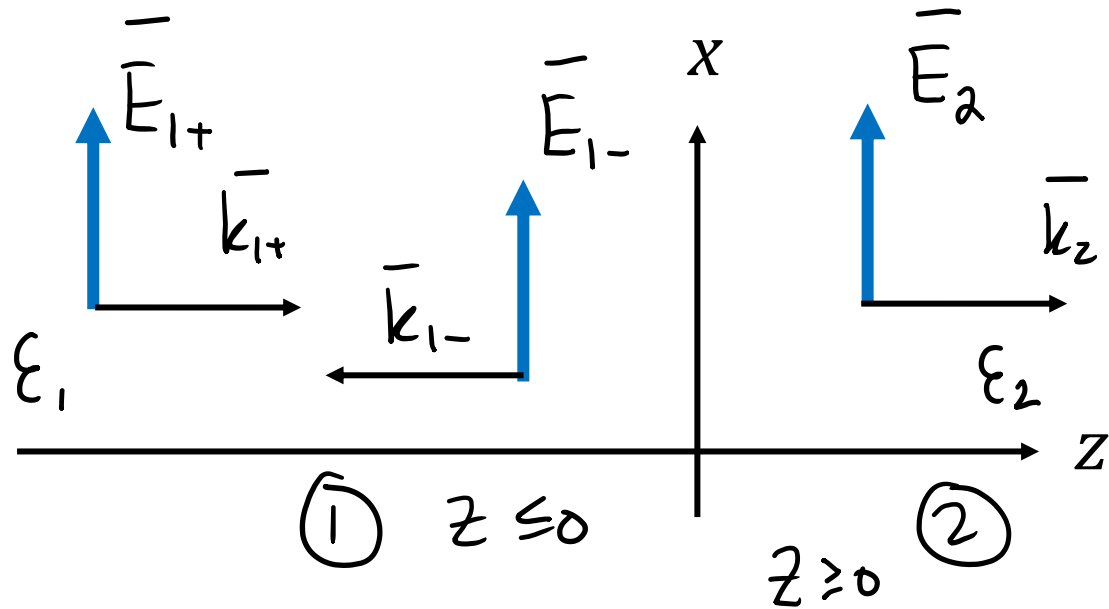
jännitteen heijastuskertoin:

$$\rho = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$V_{1+} + V_{1-} = V_2$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$$

Kohtisuoraan saapuvan tasoallon heijastuminen ja läpäisy dielektristen aineiden rajapinnasta



$$\vec{E}_1(z \leq 0) = \bar{u}_x E_{1+} e^{-j k_1 z} + \bar{u}_x E_{1-} e^{j k_1 z}$$

$$\vec{E}_2(z \geq 0) = \bar{u}_x E_2 e^{-j k_2 z}$$

$$k_i = \omega \sqrt{\epsilon_i \mu_i}$$

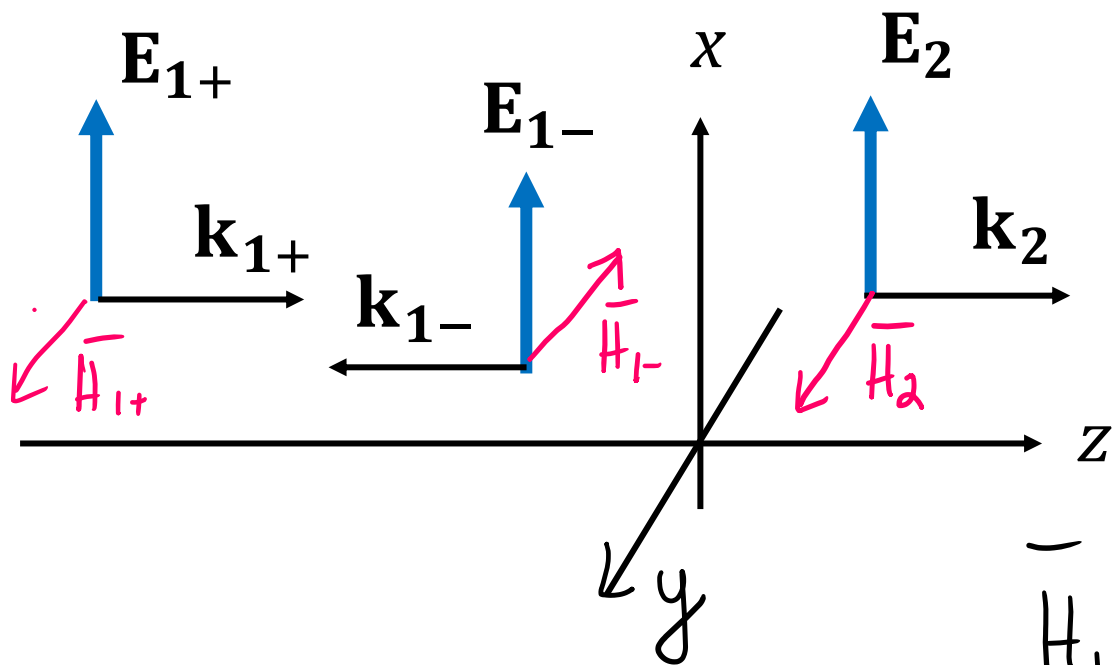
↑

Rajapintnehto: $\vec{E}_1(z=0) = \vec{E}_2(z=0)$ "jatkuva"

$$\bar{u}_x E_{1+} e^0 + \bar{u}_x E_{1-} e^0 = \bar{u}_x E_2 e^0$$

$$\boxed{E_{1+} + E_{1-} = E_2} \quad (1)$$

Kohtisuoraan saapuvan tasoaallon heijastuminen ja läpäisy dielektristen aineiden rajapinnasta



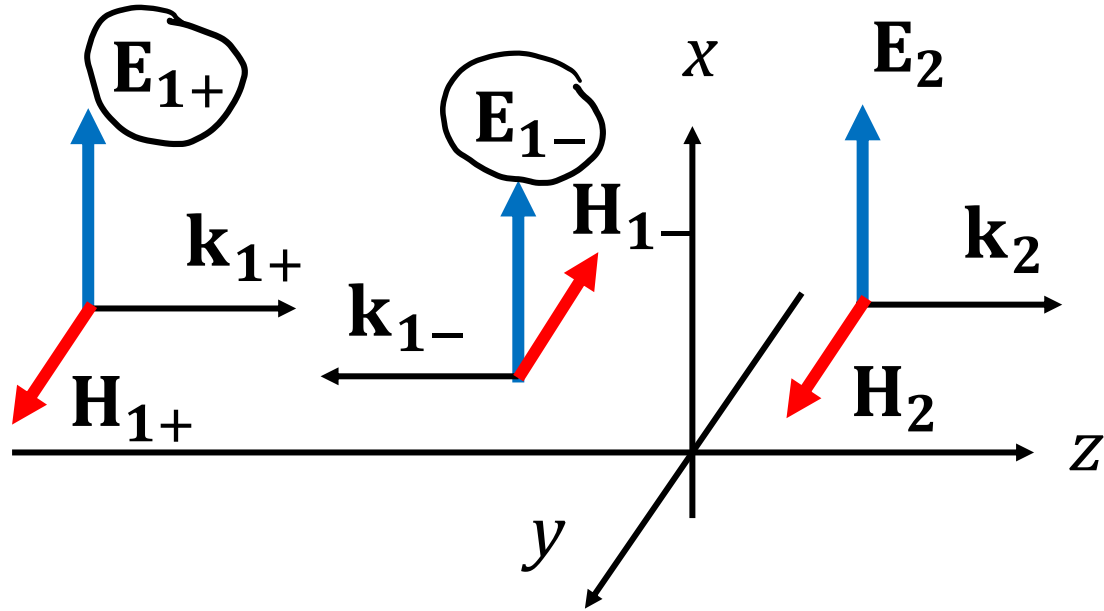
$$\bar{H}_1(z) = +\bar{u}_y \frac{E_{1+}}{\eta_1} e^{-jk_1 z} - \bar{u}_y \frac{E_{1-}}{\eta_1} e^{jk_1 z}$$

$$\bar{H}_2(z) = \bar{u}_y \frac{E_2}{\eta_2} e^{-jk_2 z}$$

$$\bar{H}_1(z=0) = \bar{H}_2(z=0)$$

$$\boxed{\frac{E_{1+}}{\eta_1} - \frac{E_{1-}}{\eta_1} = \frac{E_2}{\eta_2}} \quad (2)$$

Kohtisuoraan saapuvan tasoaallon heijastuminen ja läpäisy dielektristen aineiden rajapinnasta



$$\begin{cases} (1) & E_{1+} + E_{1-} = E_2 \\ (2) & \frac{E_{1+}}{\eta_1} - \frac{E_{1-}}{\eta_1} = \frac{E_2}{\eta_2} \end{cases}$$

määritellään

heijastuskertoim

$$R = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}; \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

- 11 -

läpäisykerron

$$T = \frac{E_2}{E_{1+}} = \frac{E_{1+} + E_{1-}}{E_{1+}} = 1 + R$$

Ionosfäärin permittiivisyys: $\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

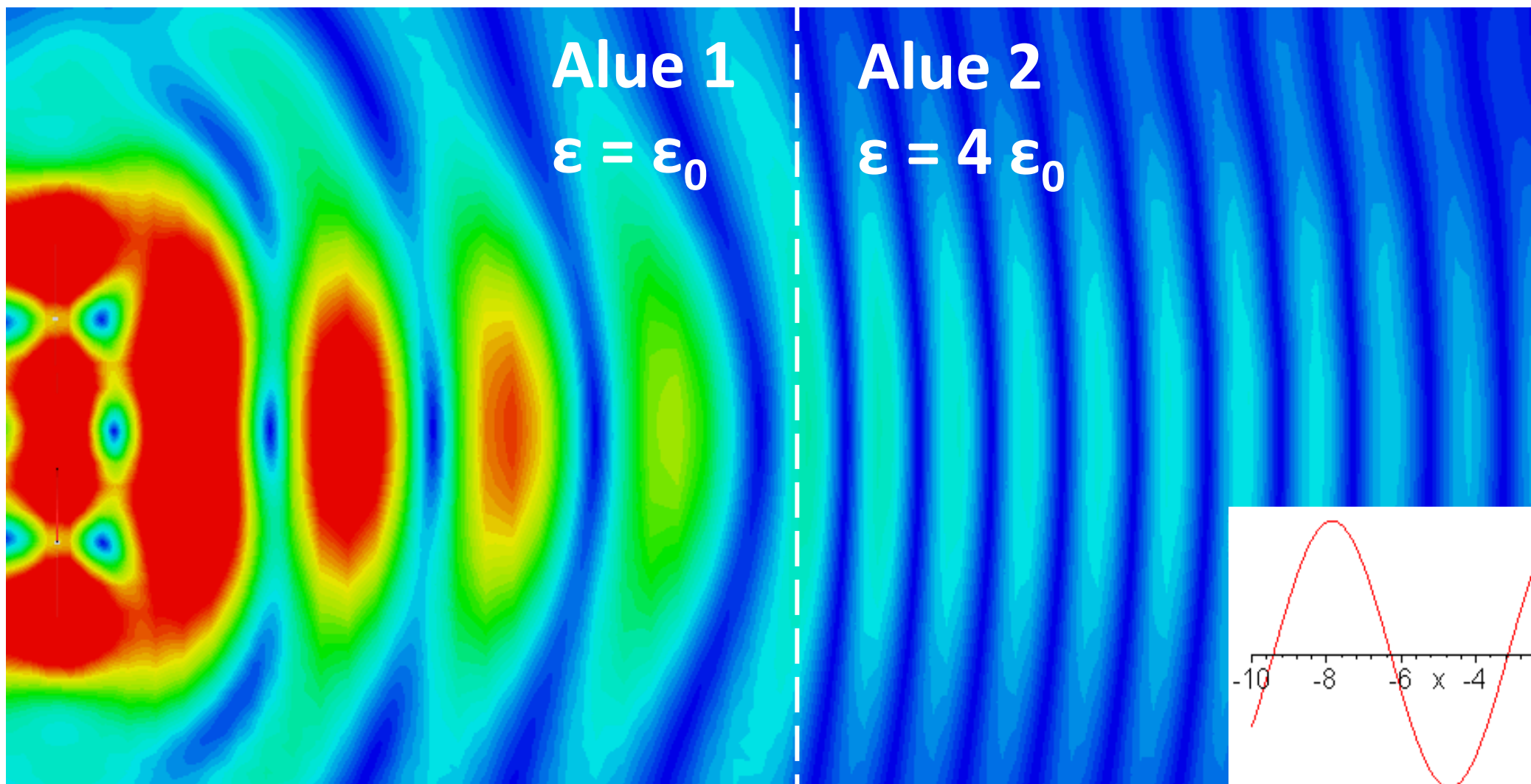
$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}$$

$$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

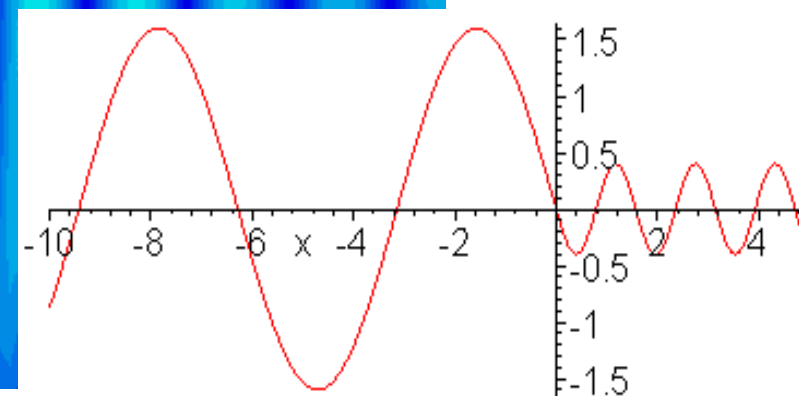
$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} =$ kompleksinen
aaltotiimpedanssi

$$R \neq 0$$

Kohtisuoraan saapuvan tasoaallon heijastuminen ja läpäisy dielektristen aineiden rajapinnasta



$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\epsilon_{r,2}}}$$



Tasoaalto saapuu kohtisuorasti ilmasta (aine 1) häviöttömään dielektrisen aineen (aine 2) rajapintaan. Dielektrisen aineen suhteellinen permittiivisyys on $\epsilon_r = 4,0$. Kuinka paljon tehotiheydestä (%) menee rajapinnan läpi?

- 0% a. 0% 0%
- 11% b. 11% 15%
- 35% c. 33% 64%
- 48% d. 66% 3%
- 100% **e.** 89% 76%
- 0% f. 100% 0%

$$R = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad T = \frac{E_2}{E_{1+}} = 1 + R \quad \eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}$$

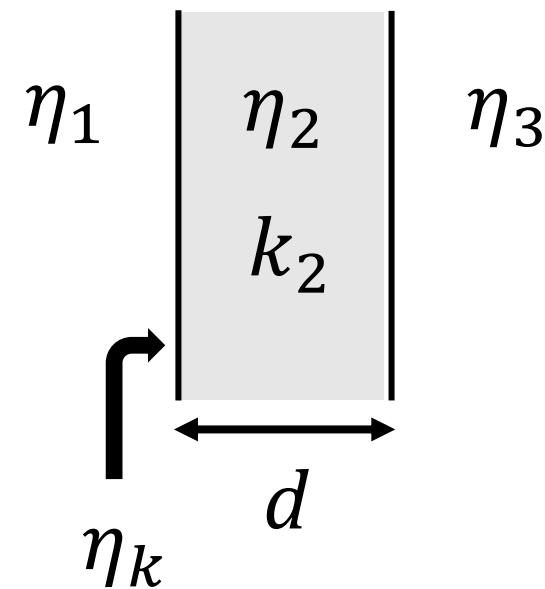
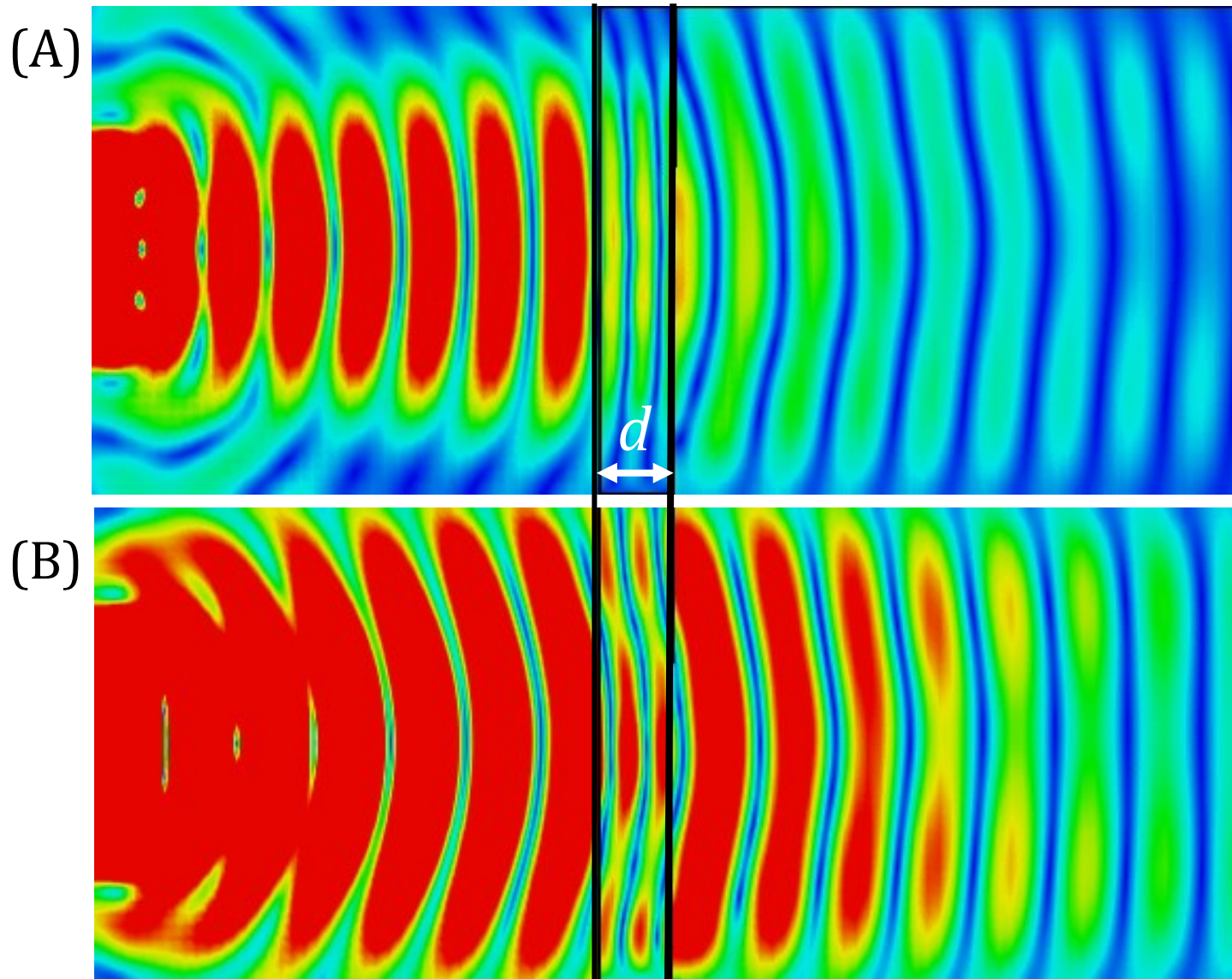
$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* \quad |\bar{S}| = \frac{1}{2} E \cdot \frac{E}{\eta} = \frac{|E|^2}{2\eta}$$

tehosta heijastuu $\rightarrow \frac{\frac{|E_-|^2}{2\eta_0}}{\frac{|E_+|^2}{2\eta_0}} = \left| \frac{E_-}{E_+} \right|^2 = |R|^2$

$$R = -\frac{1}{3} \quad |R|^2 = \frac{1}{9}$$

läpimennyt osa $1 - |R|^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \rightarrow 89\%$ tehotiheydestä menee läpi

Keskellä on kerros (paksuus = d) häviötöntä dielektristä ainetta, muualla on ilmaa. Mitä eroa on animaatioissa?



$$\eta_k = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan(k_2 d)}{\eta_2 + j\eta_3 \tan(k_2 d)}$$

$$R = \frac{\eta_k - \eta_1}{\eta_k + \eta_1}$$

Ks. oppikirjan kappale 2.3.4

Taivuttimislaki eli Snellin laki

vettä



● B

maata

Miten kannattaa valita reitti $A \rightarrow B$ paratiisisaarelle?

A ●

Miten kilpikonna (hyvä uimari!) valitsisi reittinsä?

Ihminen etenee nopeasti maalla - hän valitsee reittinsä näin



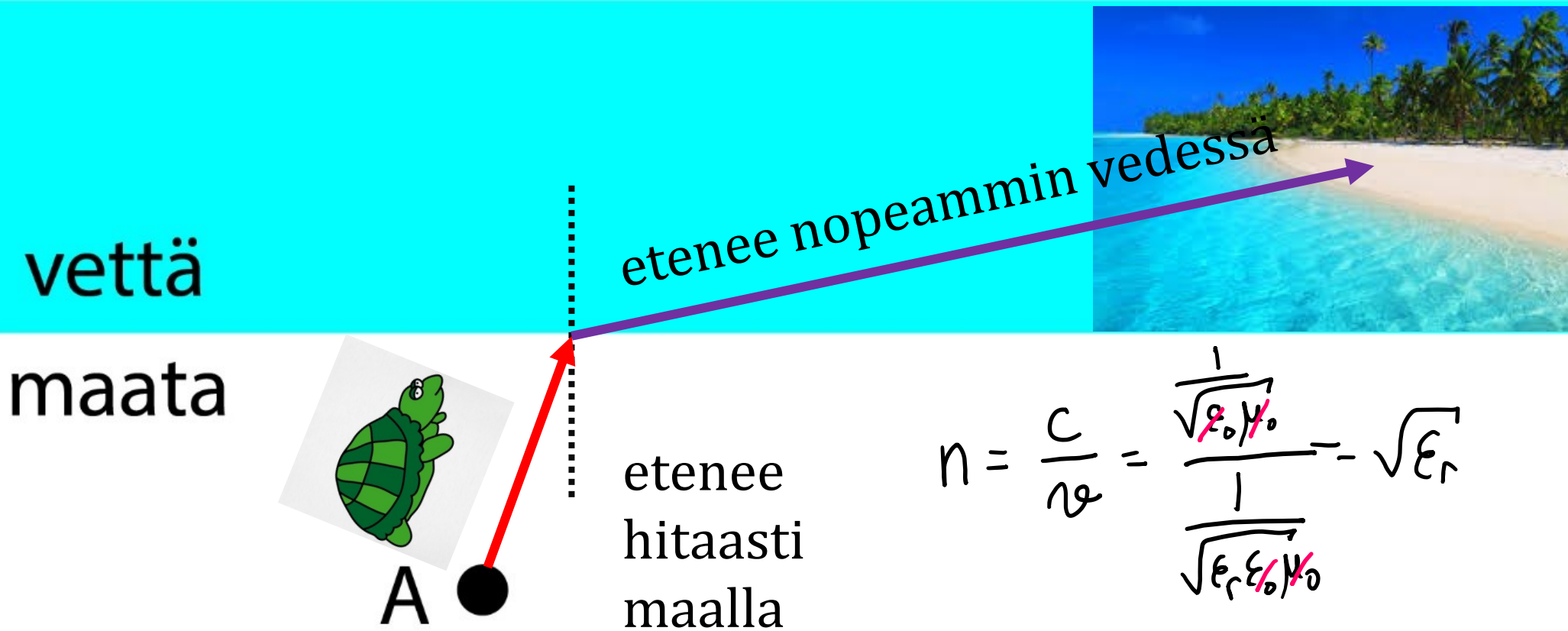
Taitekerroin:

$$n_i = \frac{\text{nopeus tyhjiössä}}{\text{nopeus väliaineessa } i} = \frac{c_0}{v}$$

Snellin laki:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Kilpikonna etenee hitaasti maalla, mutta nopeammin vedessä – hän valitsee reittinsä näin



$$n = \frac{c}{v} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}}} = \sqrt{\epsilon_r}$$

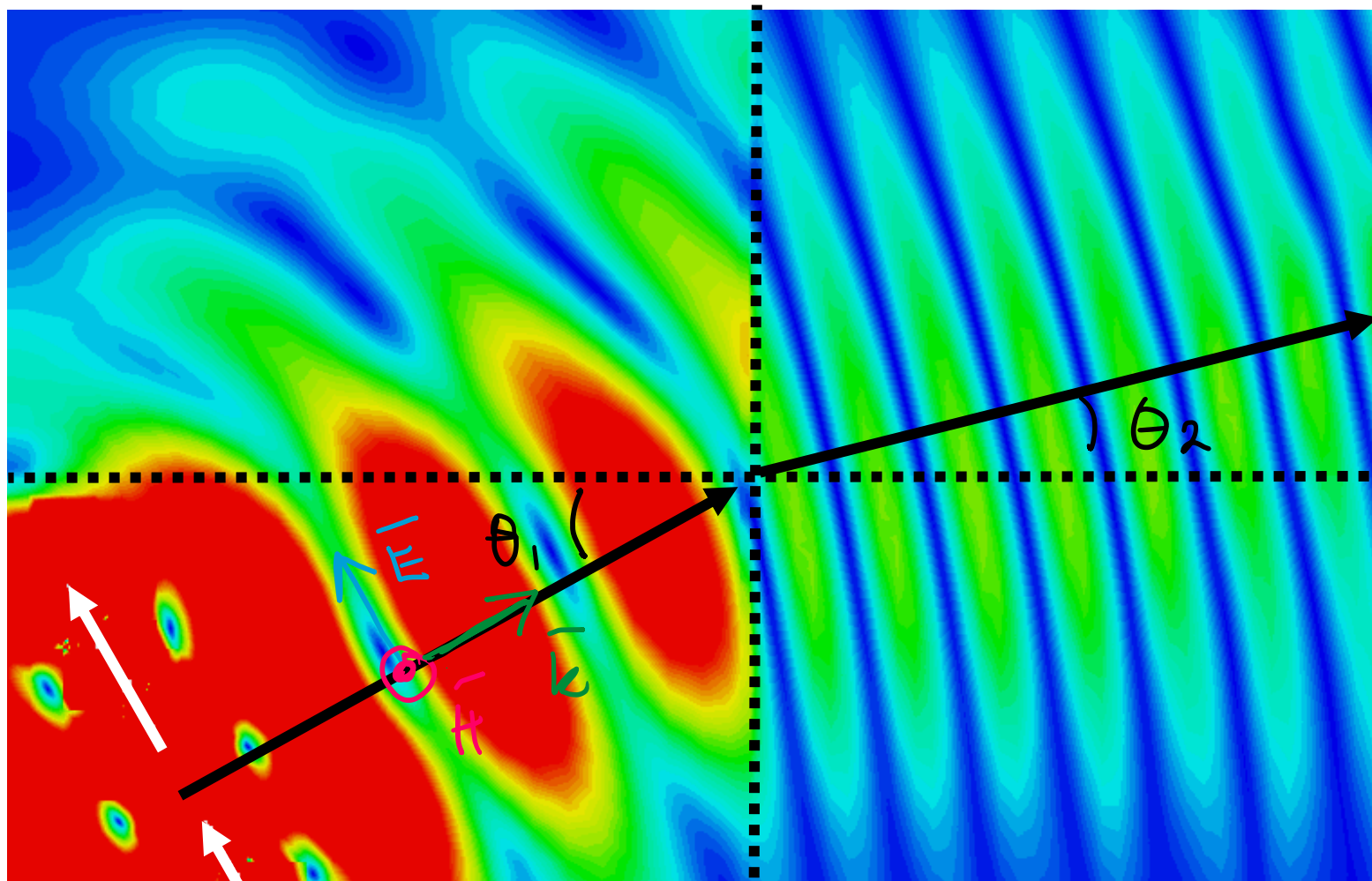
Taitekerroin:

$$n_i = \frac{\text{nopeus tyhjiössä}}{\text{nopeus väliaineessa } i} = \frac{c_0}{v}$$

Snellin laki:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Taso-aallon vino heijastus rajapinnasta



Alue 1: $n_1 = 1$ (ilma)

Alue 2: $n_2 = 2$

$$\sqrt{4} = \sqrt{\epsilon_r}$$

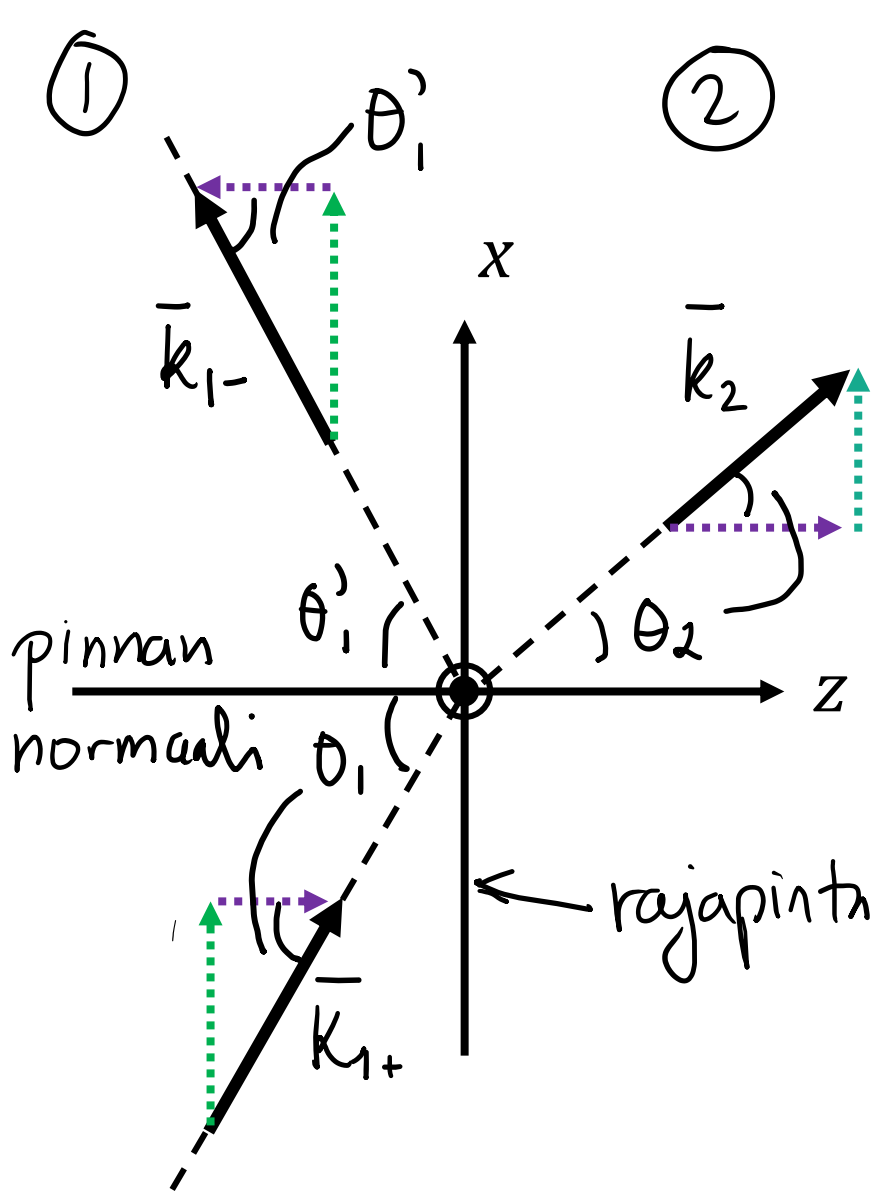
Taittumislaki eli
Snellin laki:

$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$$

$$1 \cdot \sin 29^\circ = 2 \cdot \sin 14^\circ$$

$$0,4848 \approx 0,4838$$

Tasoaallon vino heijastus rajapinnasta



$$e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}}$$

$$\bar{r} = \underline{x \bar{u}_x} + y \bar{u}_y + \underline{z \bar{u}_z}$$

saapuva aalto: $\bar{k}_{1+} = \underline{\bar{u}_x k_1 \sin \theta_1} + \underline{\bar{u}_z k_1 \cos \theta_1}$

$$\bar{k}_{1+} \cdot \bar{r} = x k_{1+} \sin \theta_1 + z k_{1+} \cos \theta_1$$

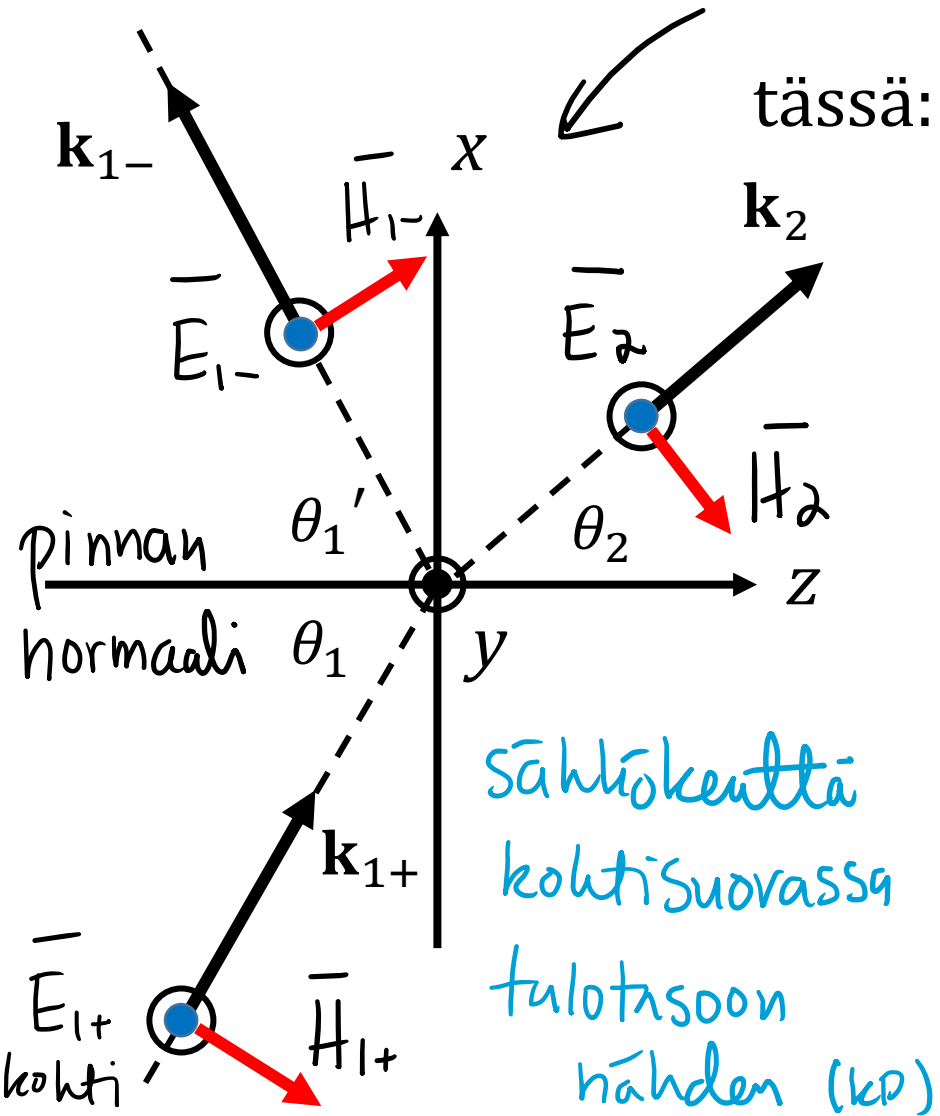
heijastunut aalto: $\bar{k}_{1-} = \bar{u}_x k_1 \sin \theta_1' - \bar{u}_z k_1 \cos \theta_1'$

$$\bar{k}_{1-} \cdot \bar{r} = x k_1 \sin \theta_1' - z k_1 \cos \theta_1'$$

läpäissyt aalto $\bar{k}_2 = \bar{u}_x k_2 \sin \theta_2 + \bar{u}_z k_2 \cos \theta_2$

$$\bar{k}_2 \cdot \bar{r} = x k_2 \sin \theta_2 + z k_2 \cos \theta_2$$

Kaksi ortogonaalista polarisaatiota: kohtisuora (KP) ja yhdensuuntainen (YP)



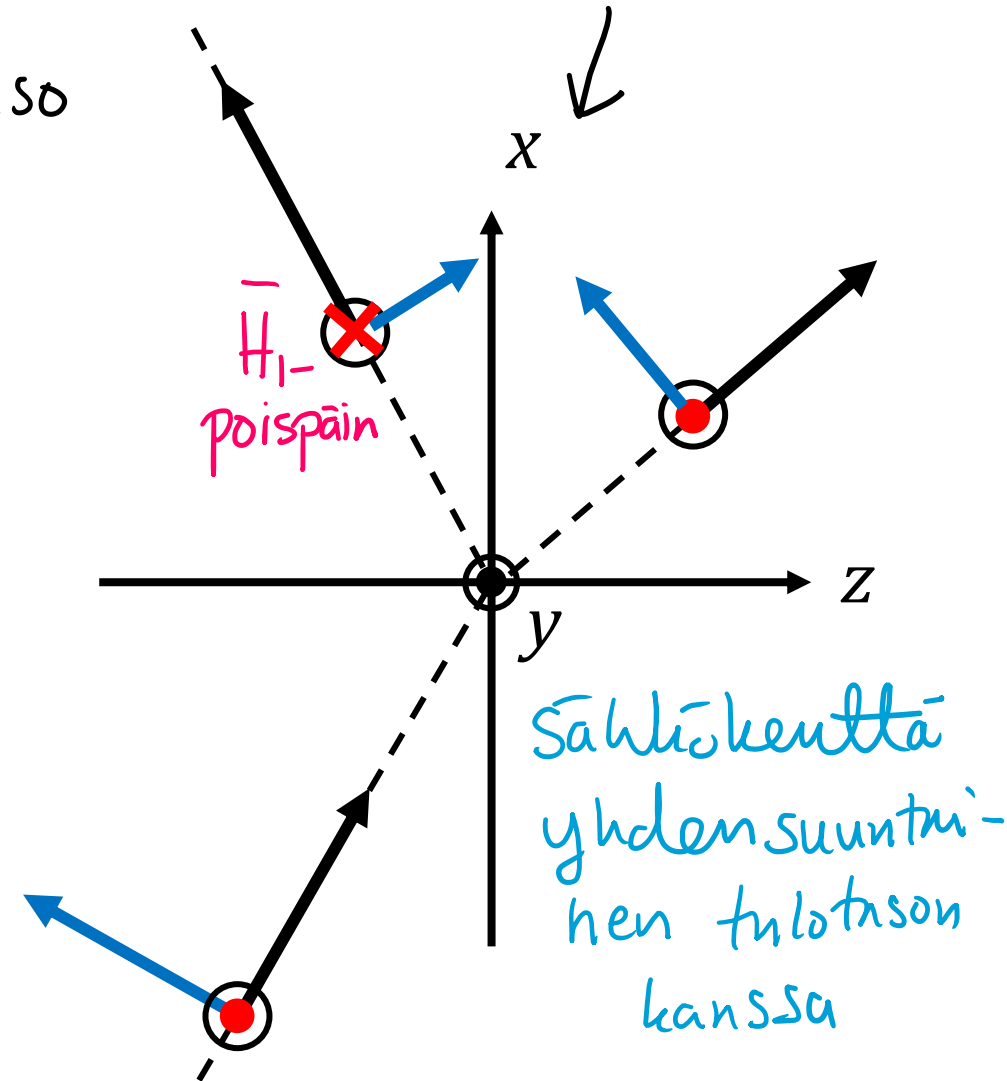
tässä: tulotaso = XZ-taso

↑ tai \odot kohti = \vec{E}

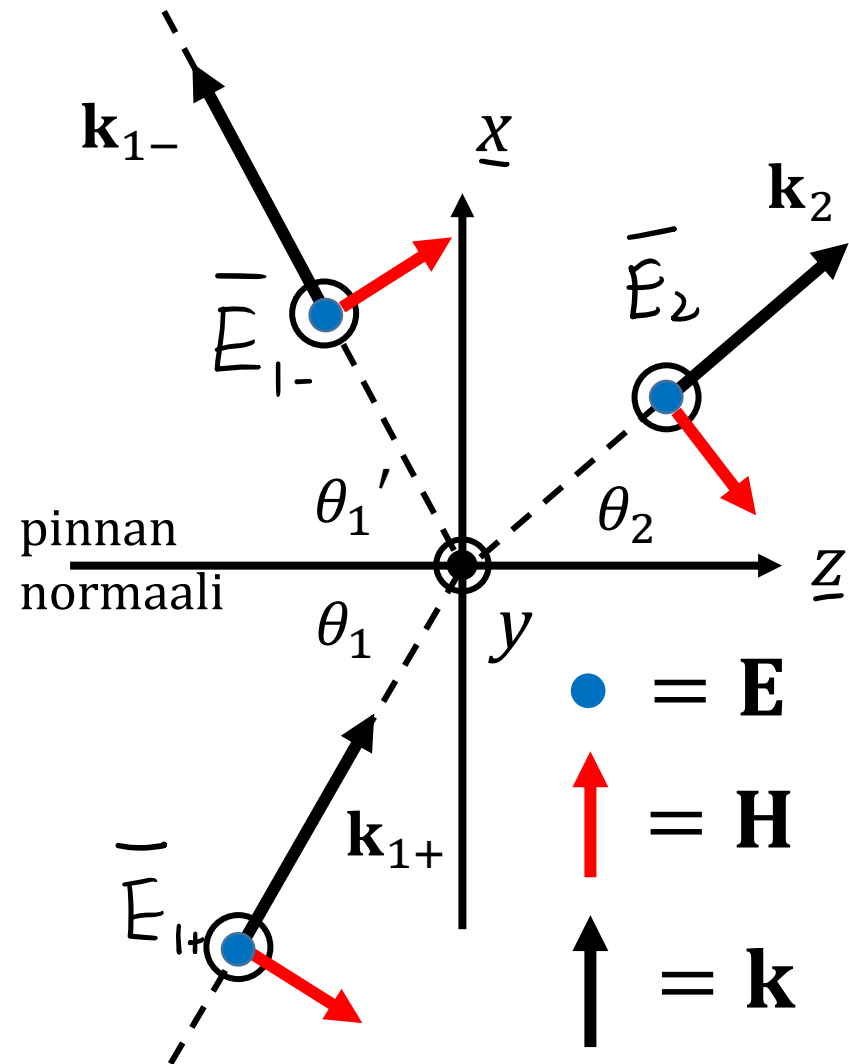
↑ tai \bullet = \vec{H}

↑ = \vec{k}

$$|\mathbf{k}| = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$



Kohtisuoralle polarisaatiolle (KP) sähkökenttä on kohtisuorassa tulotaso (xz-taso) vasten



tuleva aalto: $\bar{\mathbf{E}}_{1+} = \bar{u}_y E_{1+} e^{-jk_{1+} \cdot \bar{\mathbf{r}}}$
 $= \bar{u}_y E_{1+} e^{-jk_1 (x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)}$ ↙ z=0

heijastunut aalto: $\bar{\mathbf{E}}_{1-} = \bar{u}_y E_{1-} e^{-jk_1 (x \sin \theta_1' - z \cos \theta_1')}$ z=0 → z cos θ₁'

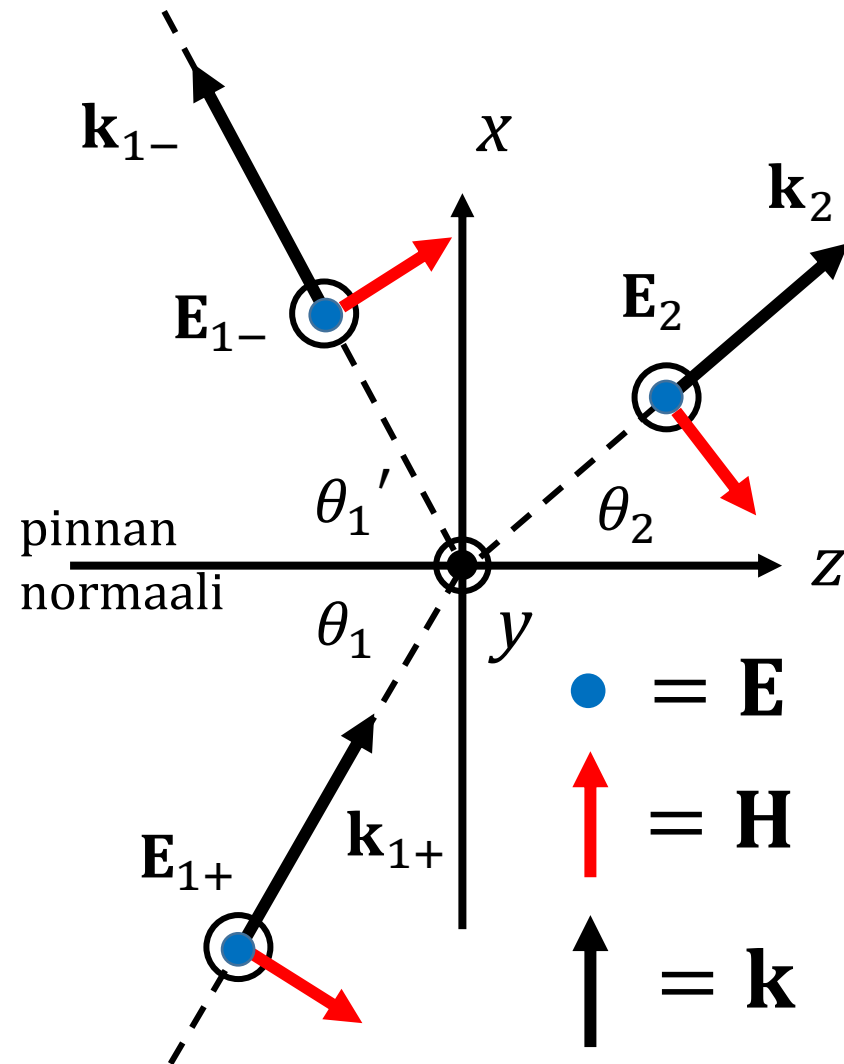
läpäissyt aalto: $\bar{\mathbf{E}}_2 = \bar{u}_y E_2 e^{-jk_2 (x \sin \theta_2 + z \cos \theta_2)}$ ↑ z=0

rajapinnalla tangentiaaliset sähkökentät "jatku-
via"

$$\bar{\mathbf{E}}_{1+}(z=0) + \bar{\mathbf{E}}_{1-}(z=0) = \bar{\mathbf{E}}_2(z=0)$$

$$\bar{u}_y E_{1+} e^{-jk_1 x \sin \theta_1} + \bar{u}_y E_{1-} e^{-jk_1 x \sin \theta_1'} = \bar{u}_y E_2 e^{-jk_2 x \sin \theta_2}$$

Kohtisuoralle polarisaatiolle (KP) sähkökenttä on kohtisuorassa tulotasoa (xz-taso) vasten



rajapinnalla ($z = 0$) pätee kaikilla x :n arvoilla:

$$\underline{E_{1+}} e^{-jk_1 x \sin \theta_1} + \underline{E_{1-}} e^{-jk_1 x \sin \theta'_1} = \underline{E_2} e^{-jk_2 x \sin \theta_2}$$

valiointa JOTTA KAIKALLA x VOIMASSA, OLTAVA

$$k_1 \sin \theta_1 = k_1 \sin \theta'_1 = k_2 \sin \theta_2$$

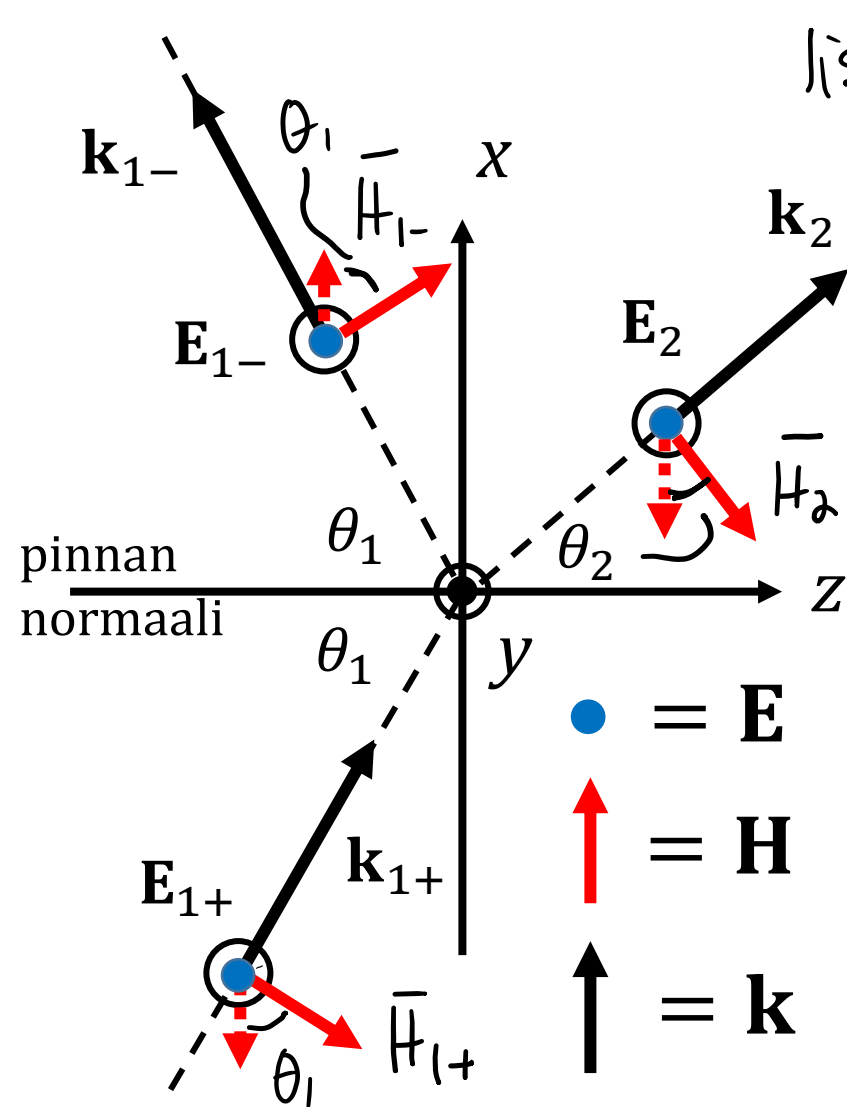
$$\theta_1 = \theta'_1 \quad \text{tulokulma} = \text{heijastuskulma}$$

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad \text{SNELLIN LAKI}$$

$$\cancel{\omega} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_1 = \cancel{\omega} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin \theta_2 \quad | : \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad n = \text{taitelkennoin}$$

Kohtisuoralle polarisaatiolle (KP) sähkökenttä on kohtisuorassa tulotasoa (xz-taso) vasten



lisäksi saatiin: $\boxed{E_{1+} + E_{1-} = E_2} \quad (1)$

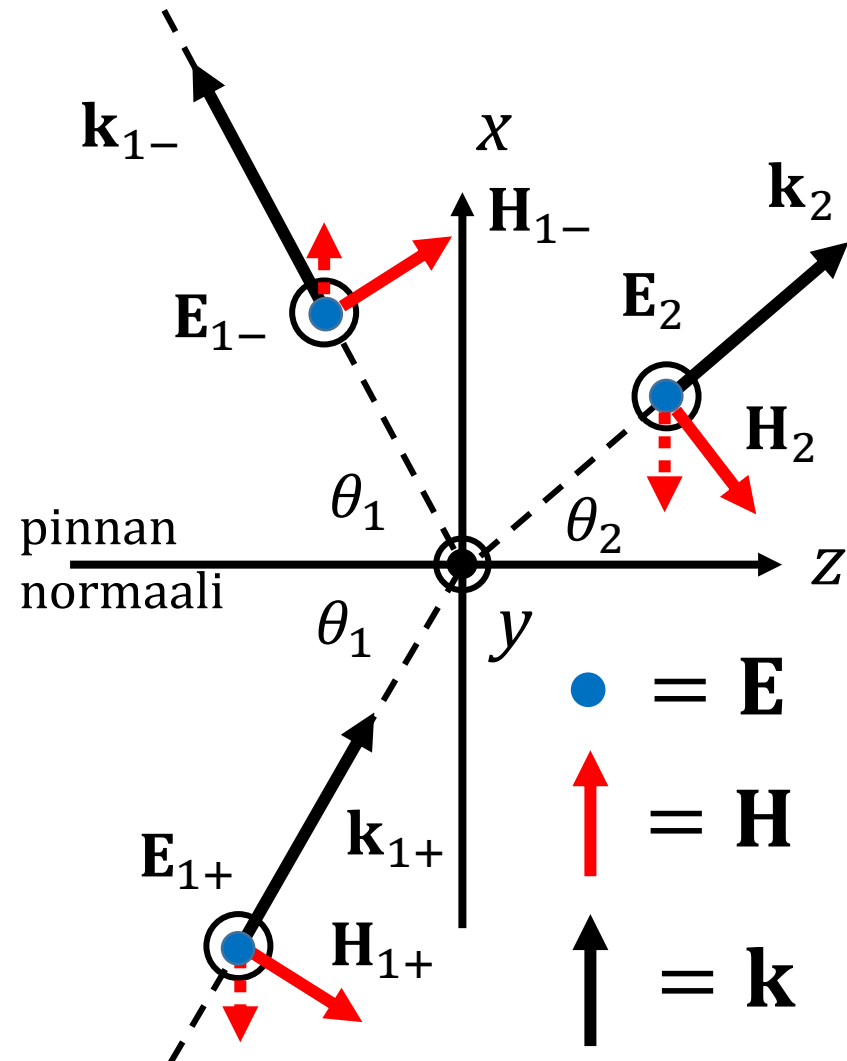
myös tangentialiaikinan magn. kenttä jatkuva

$$H_{1+t}(z=0) + H_{1-t}(z=0) = H_{2t}(z=0)$$

$$-\cancel{u_x} \frac{E_{1+} \cos \theta_1}{n_1} + \cancel{u_x} \frac{E_{1-} \cos \theta_1}{n_1} = -\cancel{u_x} \frac{E_2 \cos \theta_2}{n_2}$$

$$\boxed{-\frac{E_{1+}}{n_1} \cos \theta_1 + \frac{E_{1-}}{n_1} \cos \theta_1 = -\frac{E_2}{n_2} \cos \theta_2} \quad (2)$$

Kohtisuoralle polarisaatiolle (KP) sähkökenttä on kohtisuorassa tulotasoa (xz-taso) vasten



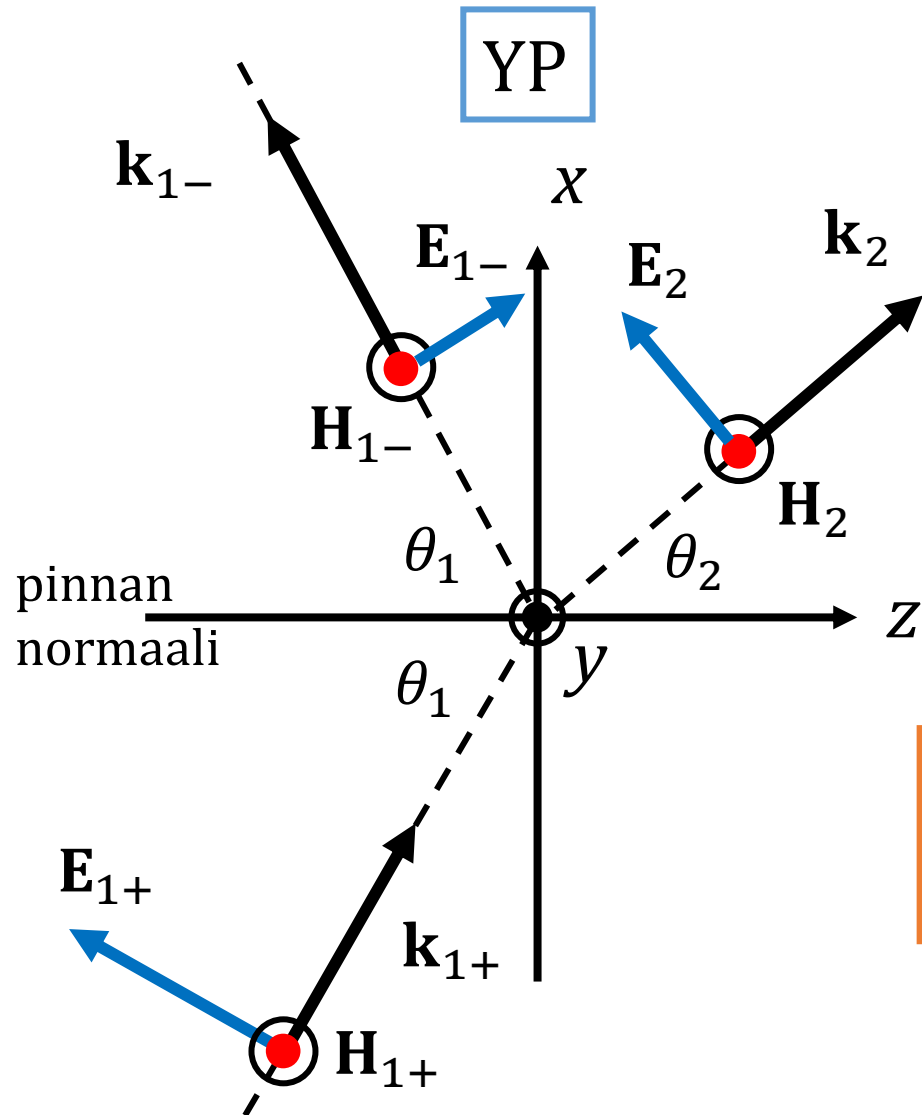
$$(1) \quad E_{1+} + E_{1-} = E_2$$

$$(2) \quad -\frac{E_{1+}}{\eta_1} \cos \theta_1 + \frac{E_{1-}}{\eta_1} \cos \theta_1 = -\frac{E_2}{\eta_2} \cos \theta_2$$

$$R_{\text{KP}} = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_1 - \eta_1 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2}$$

$$T_{\text{KP}} = \frac{E_2}{E_{1+}} = \frac{2 \eta_2 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2}$$

Yhdensuuntaiselle polarisaatiolle (YP) sähkökenttä on yhdensuuntainen tulotason kanssa (xz-taso)



Samalla tavalla kuin KP:lle, saadaan YP:lle:

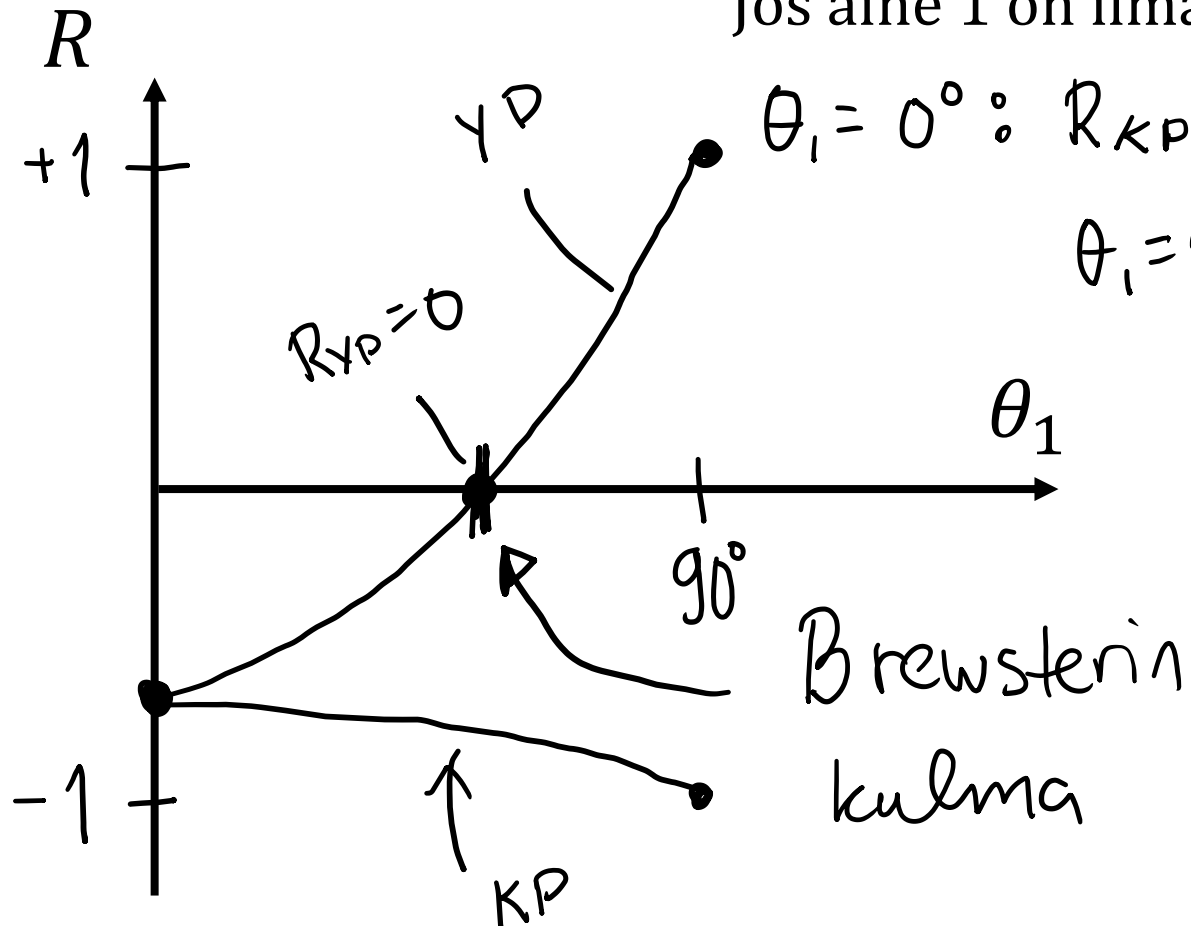
$$R_{YP} = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_2 - \eta_1 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1}$$

$$T_{YP} = \frac{E_2}{E_{1+}} = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \frac{2\eta_2 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1}$$

YP-heijastus voi kadota kokonaan heijastuksessa dielektristä aineesta

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Jos aine 1 on ilmaa ja aine 2 dielektristä ainetta $\eta_2 < \eta_1$



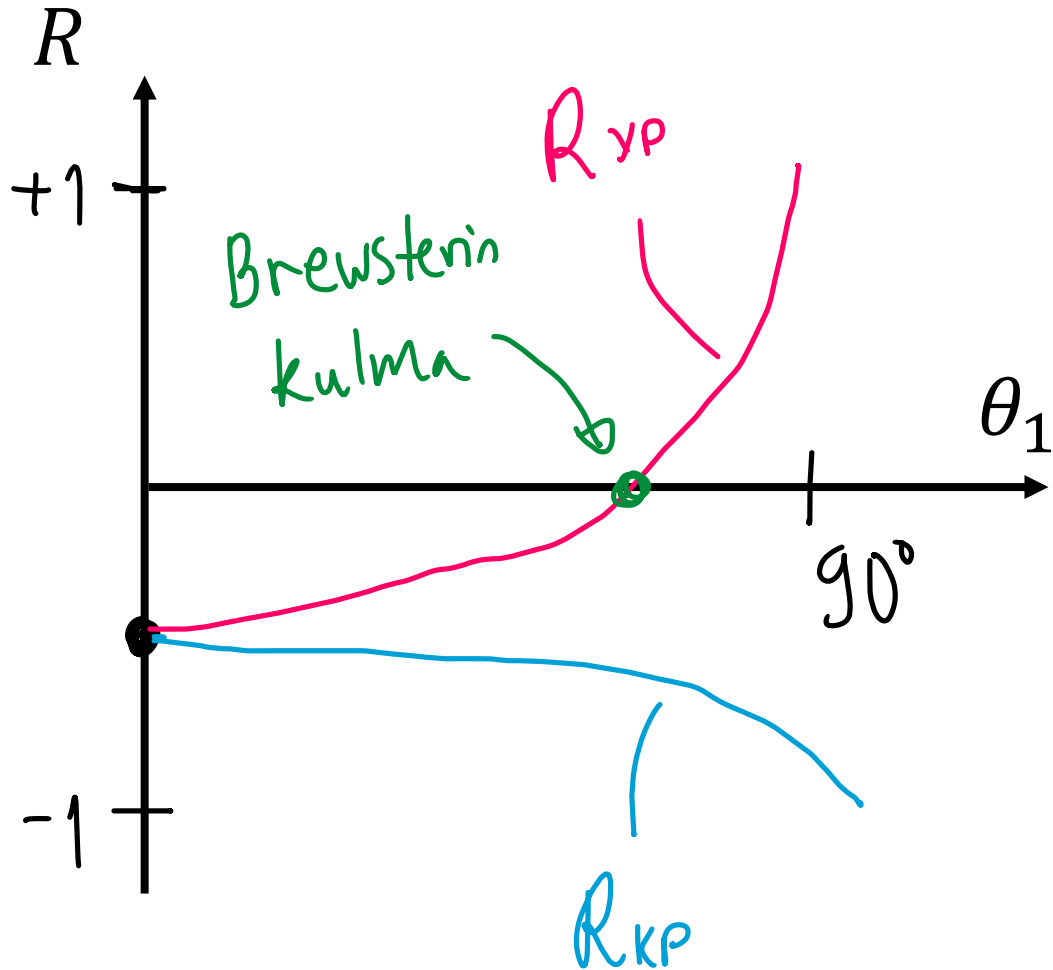
$$\theta_1 = 0^\circ : R_{KP} = R_{YP} < 0$$

$$\theta_1 = 90^\circ \quad R_{KP} = -1 \quad R_{YP} = 1$$

$$R_{KP} = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_1 - \eta_1 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2}$$

$$R_{YP} = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_2 - \eta_1 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1}$$

Mitä käytännössä tarkoittaa, että $R_{YP} = 0$?



- a. Kokonaisheijastus on nolla.
- b. Tasoaalto menee läpi ilman heijastumista.
- c. KP-tasoaalto menee rajapinnan läpi ilman heijastumista.
- d. Heijastunut aalto on lineaarisesti polarisoitunut.

Nablaoperaatiot

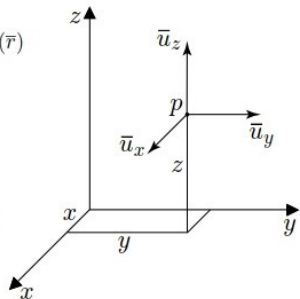
Karteesinen koordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}) + \bar{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{r}) + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\vec{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\vec{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



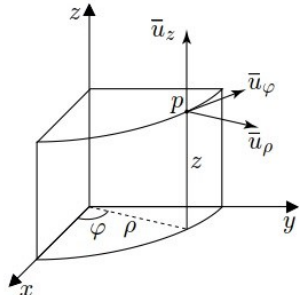
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \bar{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \bar{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \bar{u}_\rho & \rho \bar{u}_\varphi & \bar{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



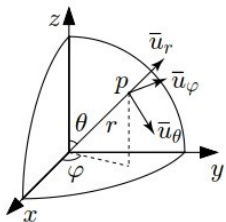
Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\vec{r}) = \bar{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \bar{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \bar{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \bar{u}_r & r \bar{u}_\theta & r \sin \theta \bar{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin \theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$



Koordinaattimuunnokset vektorille \vec{f}

Karteesinen \leftrightarrow sylinterikoordinaatisto

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen \leftrightarrow pallokoordinaatisto

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri \leftrightarrow pallokoordinaatisto

$$\rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan(\rho/z), \quad \varphi = \varphi.$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$$d\vec{\ell} = \bar{u}_x dx + \bar{u}_y dy + \bar{u}_z dz$$

$$d\vec{S}_x = \bar{u}_x dy dz$$

$$d\vec{S}_y = \bar{u}_y dx dz$$

$$d\vec{S}_z = \bar{u}_z dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

Sylinterikoordinaatisto

$$d\vec{\ell} = \bar{u}_\rho d\rho + \bar{u}_\varphi \rho d\varphi + \bar{u}_z dz$$

$$d\vec{S}_\rho = \bar{u}_\rho \rho d\varphi dz$$

$$d\vec{S}_\varphi = \bar{u}_\varphi d\rho dz$$

$$d\vec{S}_z = \bar{u}_z \rho d\rho d\varphi$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

Pallokoordinaatisto

$$d\vec{\ell} = \bar{u}_r dr + \bar{u}_\theta r d\theta + \bar{u}_\varphi r \sin \theta d\varphi$$

$$d\vec{S}_r = \bar{u}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$d\vec{S}_\theta = \bar{u}_\theta r \sin \theta dr d\varphi$$

$$d\vec{S}_\varphi = \bar{u}_\varphi r dr d\theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\text{Gaussin lause} \quad \int_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Stokesin lause} \quad \int_S \nabla \times \vec{f} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

Vakioita

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{C}$$