Fysik som naturvetenskap, storheter och enheter

- Fysik som naturvetenskap
- Storheter och enheter

MÅLET MED GRUNDKURSERNA I FYSIK

Ge allmänbildning

- Förstå grunderna bakom dagens teknologi.
- Ge förmåga att filtrera sensationsnyheter och fel i storleksklasser.

Lära sig ett naturvetenskapligt tankesätt

- Att ställa upp matematiska modeller och använda sig av dem.

FYSIK

- Experimentell vetenskap, som försöker förklara och förstå naturen.

OBSERVATIONER, MÄTNINGAR (fenomen, materiens egenskaper)

TEORI (Teori $\neq$ Sanning!)
för att förstå observationen
Matematisk modell

FÖRUTSPÅ FENOMEN

JÄMFÖRELSE MED EXPERIMENT

NOGRANNARE TEORI

Storheter och enheter

Mätbara egenskaper hos kroppar, materia och fenomen

= Fysikaliska storheter

Storhet = ett mätt **värde** × **enhet**

Storhets och enhetssytemet SI
(Systeme International d'Unités)

Grundstorheter och grundenheter

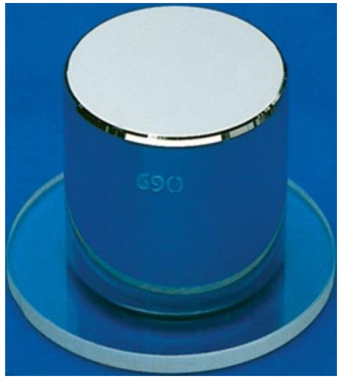
Storhet	Enhet	Förkortning
Längd	meter	m
Massa	kilogram	kg
Tid	sekund	s
Elström	amper	A
Temperatur	kelvin	K
Ljusstyrka	candela	Cd
Substansmängd	mol	mol

DEFINITION AV GRUNDENHETERNA, ENHETSSTANDARDER

Tid: 1s = 91 926 317 770 * perioden för en viss vibration hos Cs^{133} -atomen

Längd: 1m = sträckan som ljus rör sig i vakuum under tiden 1/299 792 458 s
(=> ljusets hastighet c = ca $3*10^8$ m/s)

Massa: Pt-Ir cylinder i Paris
^{12}C atomen



Härledda enheter

- En härledd storhet och dess enhet fås från grundstorheterna och -enheterna med samma räkneoperation.

T.ex. kraft

$$F = ma \qquad \text{Newton II}$$

$$[F] = [m][a] = 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} = 1N$$

Prefix

T.ex. km, mg, µs

10^3m 10^{-3}g 10^{-6}s

Tillägsenheter

T.ex. minut, liter, elektronvolt

Kinematik i en dimension

- Läge, hastighet och acceleration
- Likformig rörelse
- Likformigt accelererad rörelse

En dimensionell kinematik för en partikel

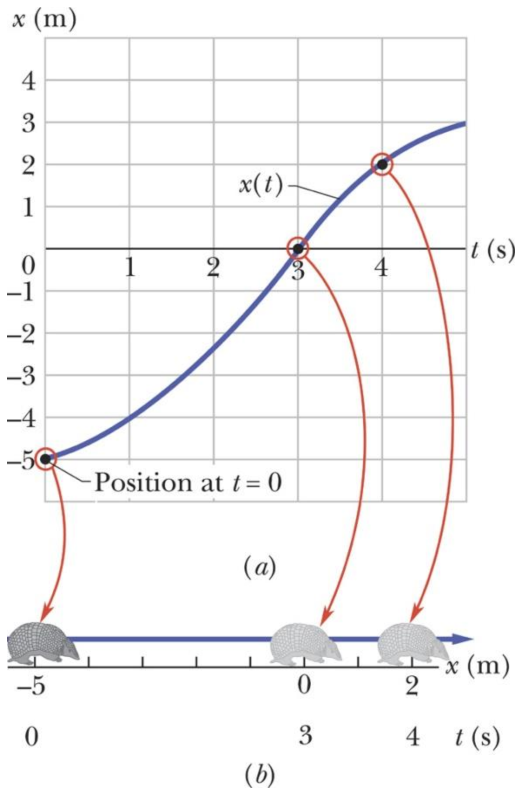
Partikel:

Idealiserad modell för en reell kropp

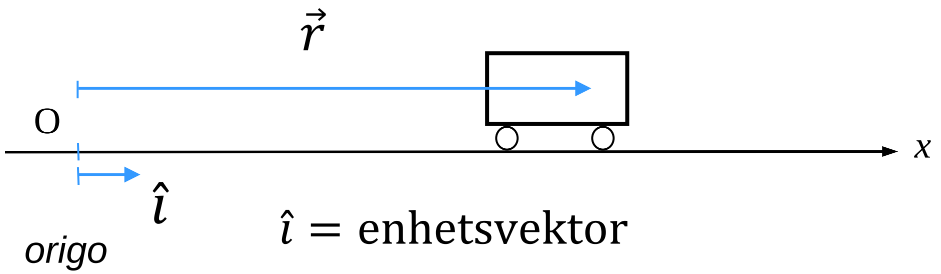
- Försöker inte beskriva fenomen som beror av kroppens form, struktur eller deformation
- Egenskaper: massa m, den av tiden t beroende positionen

Kinematik:

- Studerar rörelsen, men inte dess orsak
  (Dynamik: rörelsens orsaker, krafter)



Läge, lägesvektor $\bar{r}(t)$



Lägesvektor

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath}$$

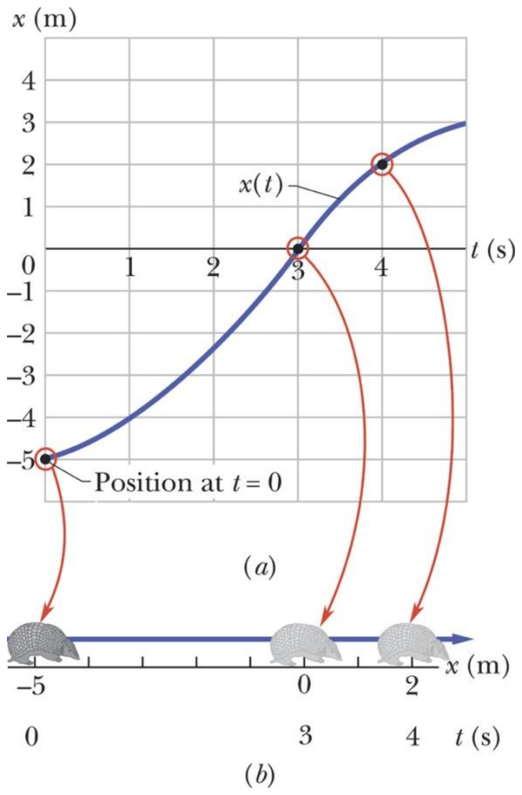
($x(t)$ = skalärkomponent)

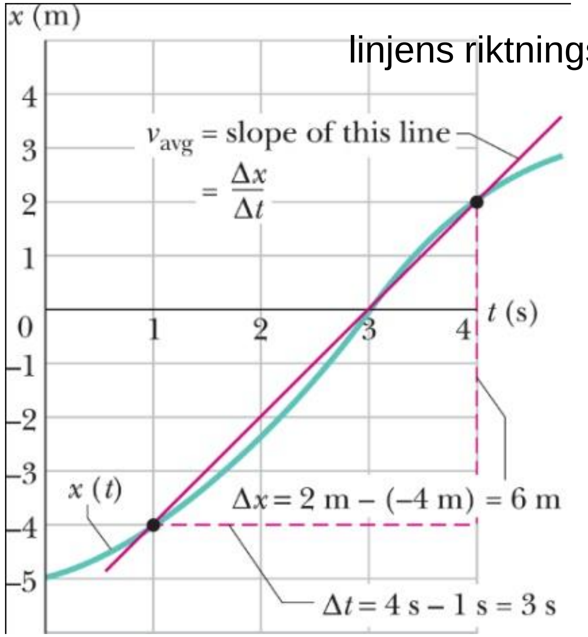
Förskjutning Δx

$$\hat{\imath} = \text{enhetsvektor}$$

Medelfart (speed) (skalär > 0)

$$v_{ave} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



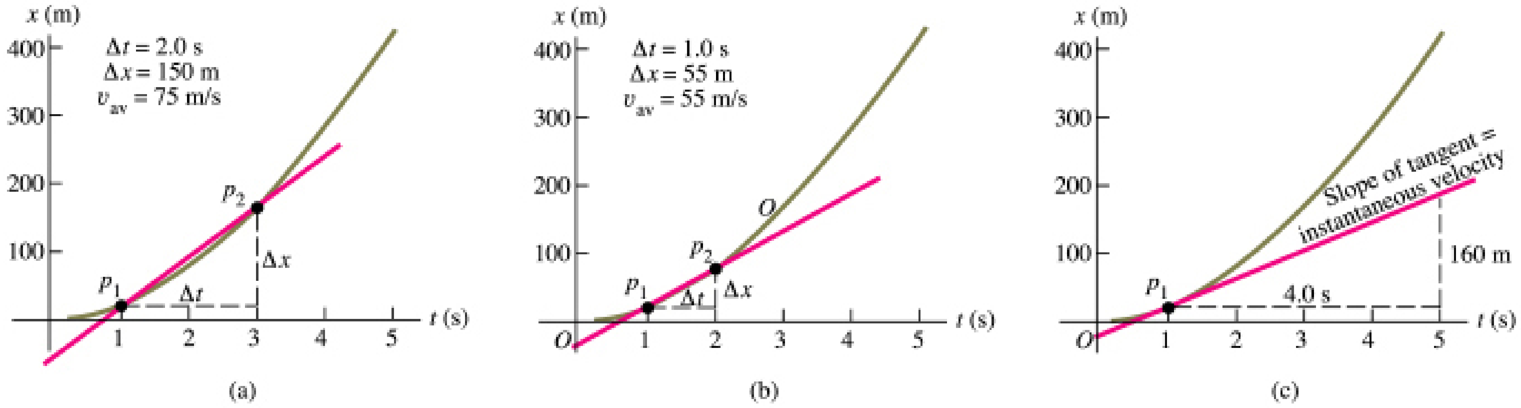


linjens riktningskoefficient

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath}$$

Medelhastighet under intervallet $t_i \rightarrow t_f$

$$\vec{v}_{ave} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}\hat{i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}$$



Momentan hastighet (velocity) (vektor)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\hat{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{i}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \longleftarrow$$ Skalärkomponent, tangentens riktningskoefficient

Fart (speed) (skalär > 0)

$$|\vec{v}| = |v| > 0$$

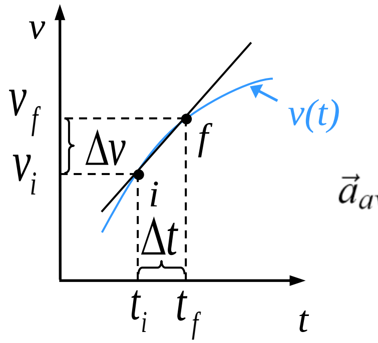
Likformig rörelse i en dimension:

- Hastigheten konstant som funktion av tiden:

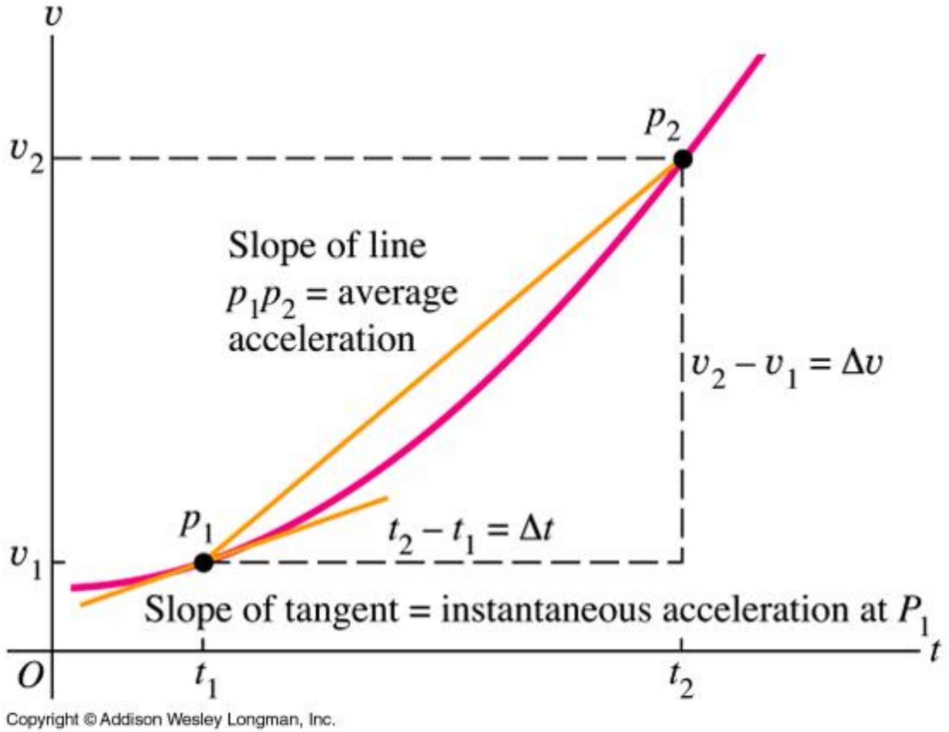
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v\ dt$$

$$x = x_0 + vt$$

Medelacceleration



$$\vec{a}_{ave} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}\hat{i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\hat{i}$$



Momentan acceleration

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)\hat{i} = \frac{dv}{dt}\hat{i}$$

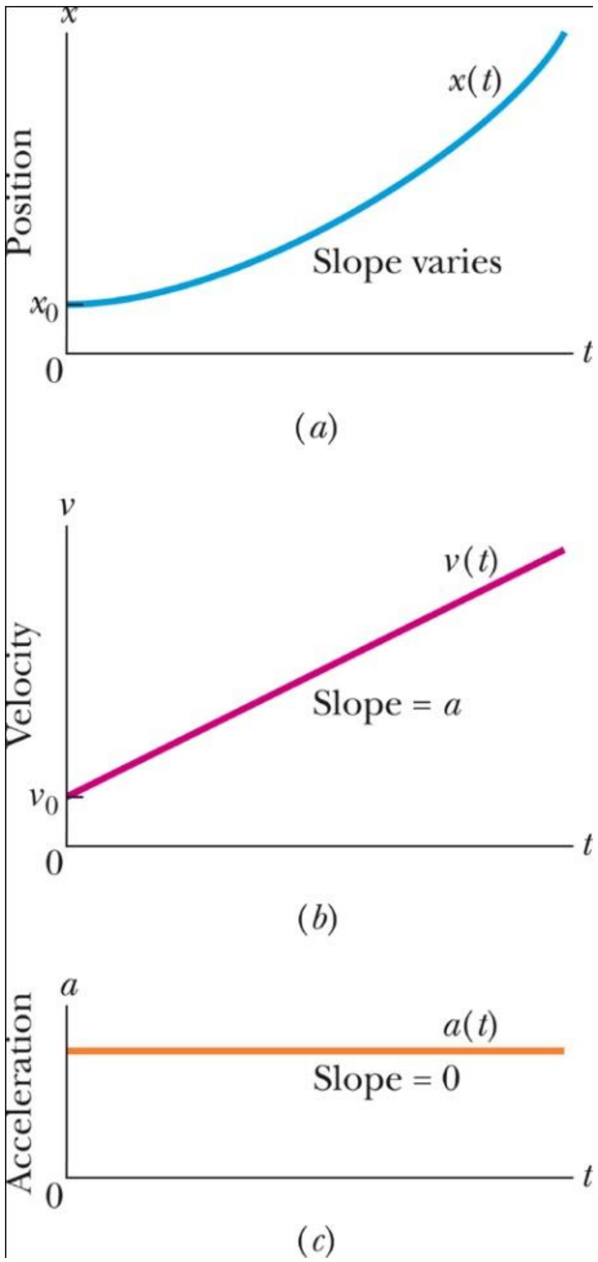
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Likformigt accelererad rörelse:

acceleration konstant, d.v.s. beror ej av tiden

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{dv}{dt} \Rightarrow \\
dv &= a\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int dv &= \int a\,dt \\
v(t) &= v_0 + at
\end{aligned}
$$



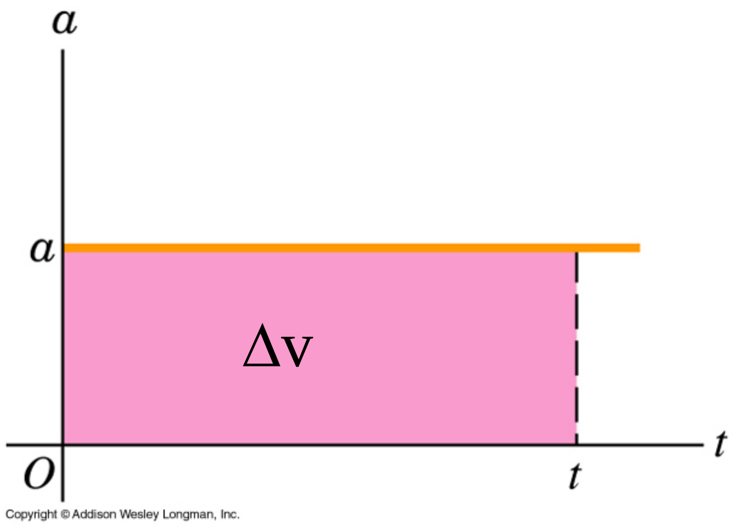
$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = v\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x(t_1)} dx = \int_0^{t_1} v(t)dt = \int_0^{t_1} (v_0 + at)dt$$

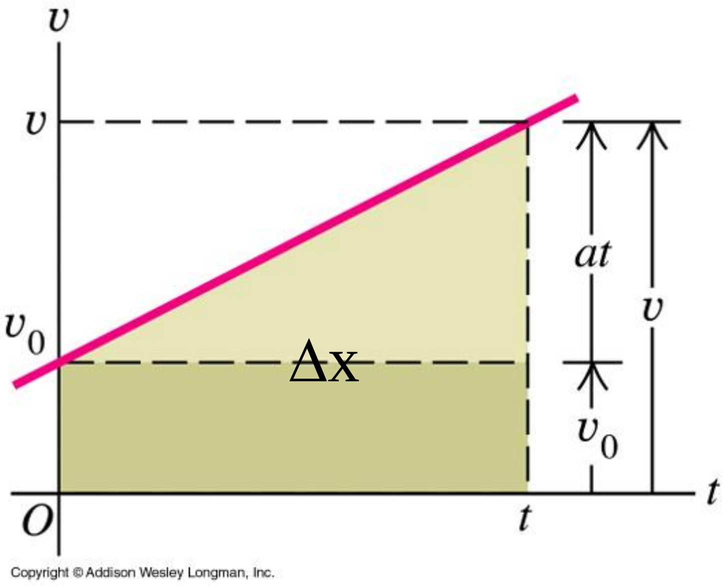
$$x(t_1) - x_0 = \left. \left(v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \right) \right|_0^{t_1} = v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2$$

$$x(t_1) = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 \quad ; \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



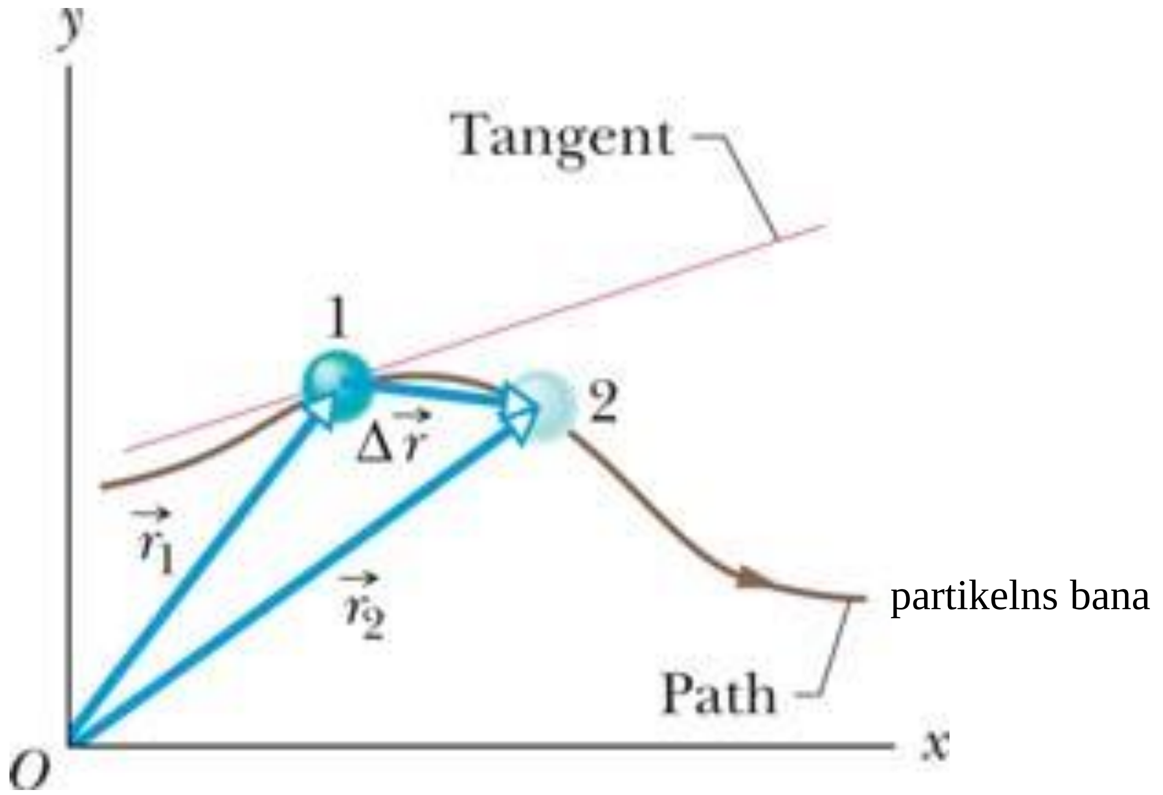
$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \text{ (endast konstant acceleration)}$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} - v_x}{2} \right) t \text{ (endast konstant acceleration)}$$



Kinematik i tre dimensioner

- Läge, hastighet och acceleration
- Kaströrelse



Rätvinkligt xyz-koordinatsystem (kartesiskt), enhetsvektorer: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$

Lägesvektor i tre dimensioner:

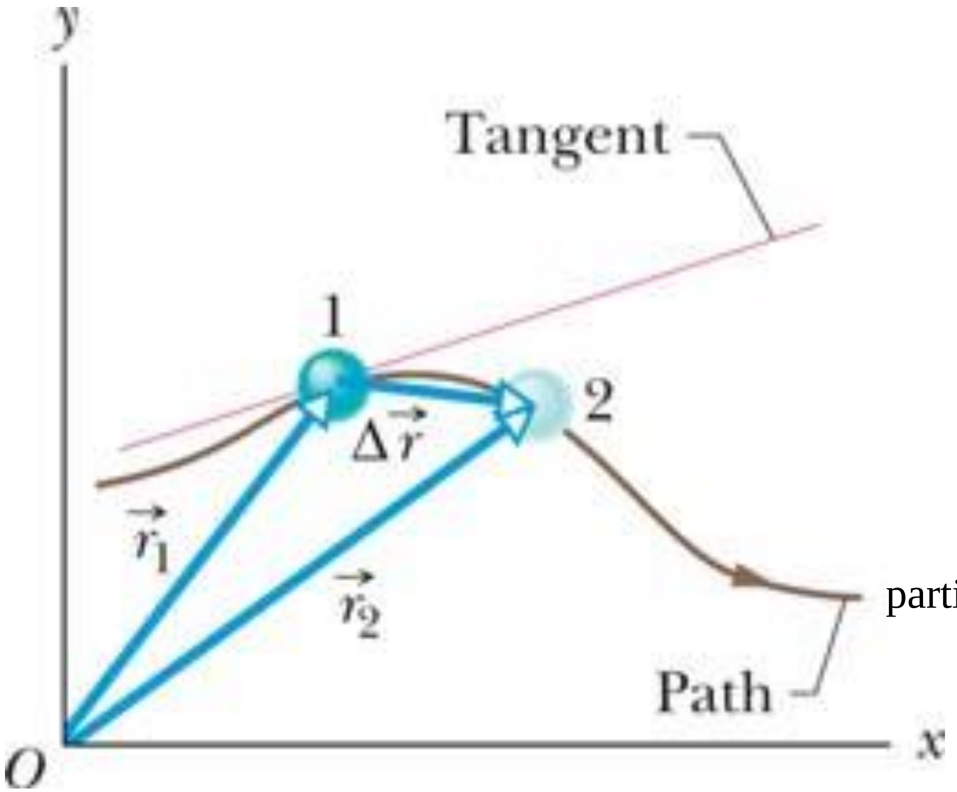
$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

$\Rightarrow$ partikelns bana
$\equiv$ läget $\vec{r}(t)$ som funktion av tiden t

Hastighet i tre dimensioner:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$



partikelns bana

Hastigheten är en vektor parallell
med banans tangent

Partikelns förskjutning i ett *xyz* –koordinatsystem:

$$\Delta\vec{r}(t) = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}\right] = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$= v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

fart:

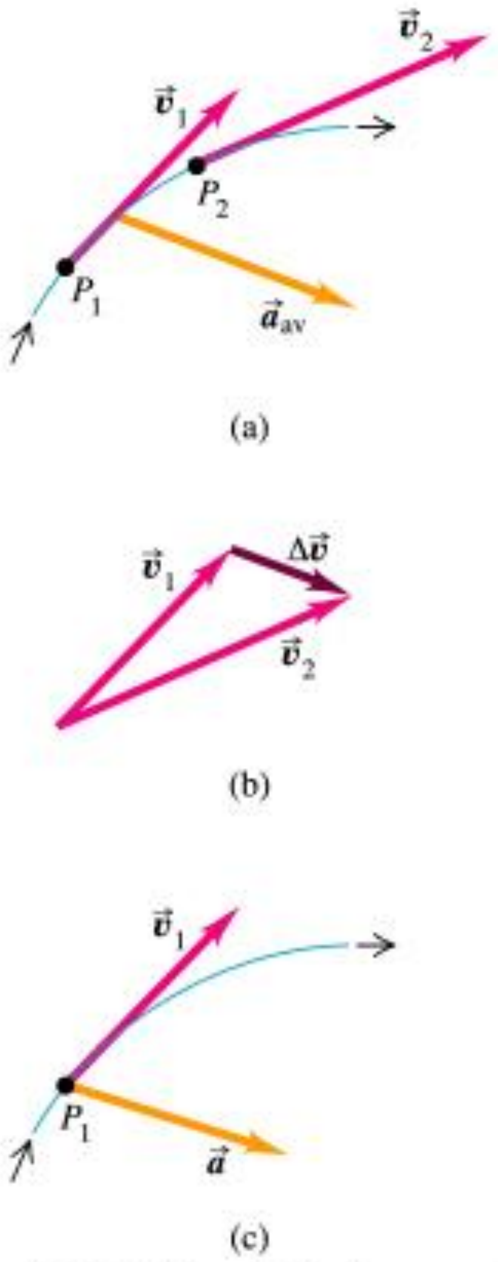
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$$

Acceleration i tre dimensioner

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{d^2t}}$$

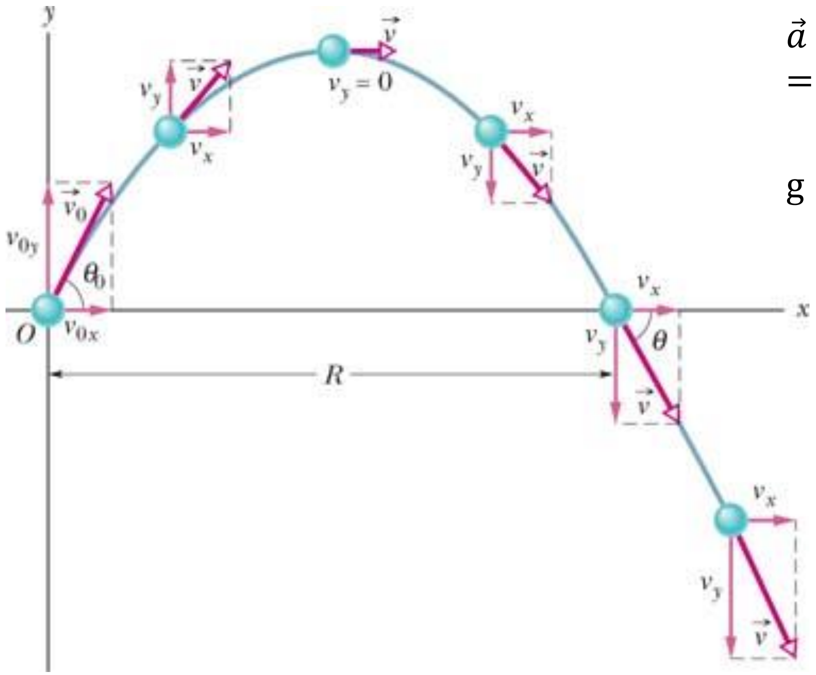
xyz – koordinater

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right]$$
$$= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$
$$= a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$



OBS! Accelerationen kan ha en komponent både parallellt med och vinkelrätt mot banans tangent!

KASTRÖRLESE



$\vec{a} = -g\hat{j}$
$=$ konstant

$g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Begynnelsevillkor:

$\vec{r}(t=0) = 0$
$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_o$
$= \begin{cases} v_{xo}\hat{\imath} + v_{yo}\hat{\jmath} \\ v_o\cos\theta_0\,\hat{\imath} + v_o\sin\theta_0\,\hat{\jmath} \end{cases}$

$\vec{v}(t)$:
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = -g\hat{j}$$

Indelning i komponenter

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y = -g \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_o\cos\theta_0 \\ v_y = v_o\sin\theta_0 - gt \end{cases}$$

$\vec{r}(t)$:
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

Indelning i komponenter
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_o\cos\theta_0 \\ \frac{dy}{dt} = v_o\sin\theta_0 - gt \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = (v_o\cos\theta_0)t \\ y = (v_o\sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Banan är en parabel
$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{1}{2}g\frac{1}{v_o^2\cos^2\theta_0}x^2$$

Från begynnelse/gränsvillkoren, t.ex. y=0 $\Rightarrow \begin{cases} \text{Stigtiden} \\ \text{Stighöjden} \\ \text{Bärvidden} \end{cases}$

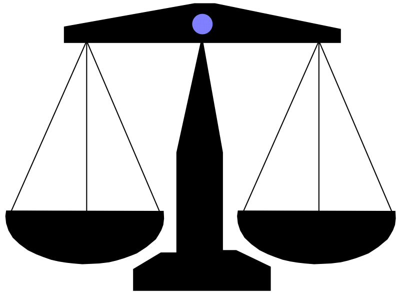
Dynamik

- Tunga och tröga massan
- Kraft som orsak till acceleration
- Newtons lagar

Tunga och tröga massan

Tunga massan (påverkas av gravitationen)

En kropps egenskap, som kan mätas genom att väga kroppen (jämföra med en masstandard i ett gravitationsfält)



Tröga massan (inertiala massan)

En kropps egenskap, som beskriver hur kroppen motsätter sig förändringar i dess rörelsetillstånd.

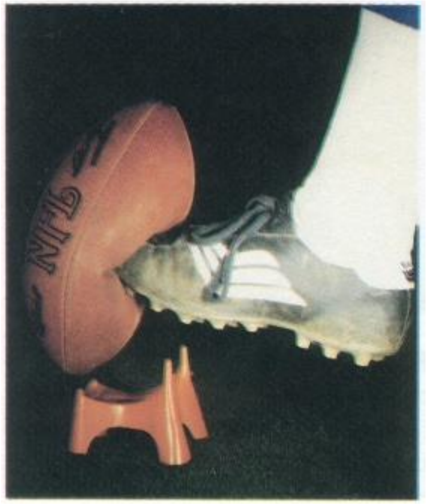


FIGURE 4-2 A foot exerts a force on a football. Note the deformation.

Gäller:

– Tunga massan = Tröga massan

– $m_{12} = m_1 + m_2$

$[m] = \mathrm{kg}$

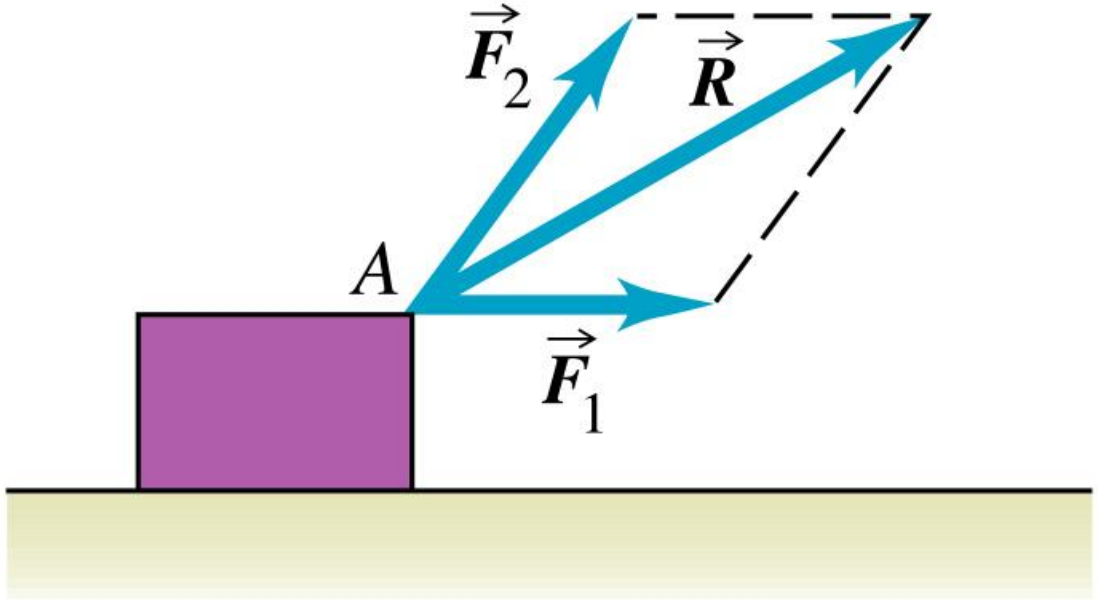
Kraften (vektor)

1. Förändringen i en kropps rörelsetillstånd (position, hastighet) beskrivs med hjälp av accelerationen.

   Orsaken till acceleration $\Leftrightarrow$ en kraft

2. Växelverkan mellan en kropp och dess omgivning => kraft
   (Det existerar ingen kraft utan en motkraft)

3. Superpositionsprincipen



$$[\vec{F}] = 1\,\mathrm{N} = 1\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$$

NEWTONS LAGAR

Newtons I lag:

Varje kropp förblir i vila eller i rätlinjig rörelse om den inte blir tvungen att att ändra tillstånd pga. krafter som påverkar den.
Dvs. kroppen växelverkar inte med någon annan kropp = en fri kropp.

Newtons II lag: (Dynamikens grundlag)

Förändringen i rörelse är proportionell mot den påverkande kraften och sker i den påverkande kraftens riktning.

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \qquad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ (Newton själv)}$$

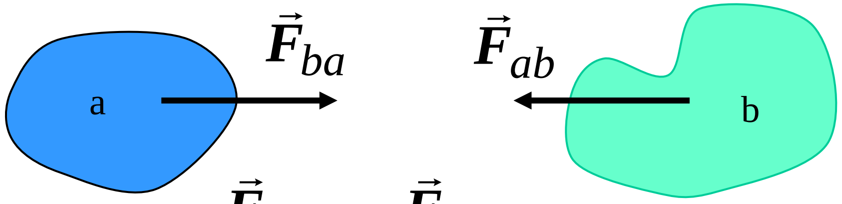
$$\longrightarrow \vec{a}(t) \longrightarrow \vec{v}(t) \longrightarrow \vec{r}(t)$$

Newtons III lag: (Lagen om kraft och motkraft)

Om en kropp verkar på en annan kropp med en kraft kommer den senare kroppen att verka på den förra med en motsatt kraft med samma absoluta värde.

VÄXELVERKAN

$\Rightarrow$



$$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$$

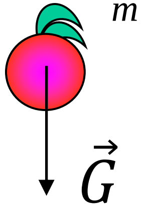
Dynamik

- Tyngd
- Normalkraft (stödkraft)

Tyngd (G)

Tyngd = Kraften som verkar på en kropp i ett gravitationsfält

På jordytan:



$$\vec{G} = -gm\vec{j}$$

$$g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

Ex. Äpplets massa $\sim 0{,}1$ kg
Äpplets tyngd ~ 1 N

Ex. En astronaut med sin utrustning

Massan är trög även på månen!

utrustning

$m = 80\text{kg} + 100\text{kg} = 180\text{kg}$

tyngd:

På jorden: $\vec{G} \approx 1800\text{N}$

På månen: $\vec{G}_m \approx g_m \cdot 180\text{kg}$

$= 1{,}62\frac{\text{m}}{s^2} \cdot 180\text{kg} \approx 290\text{N}$

(Tyngden på månen = en sjättedel av tyngden på jorden)

Normalkraft (N)

- Verkar i kropparnas beröringspunkt med en yta.
- Vinkelrätt mot beröringsytan.

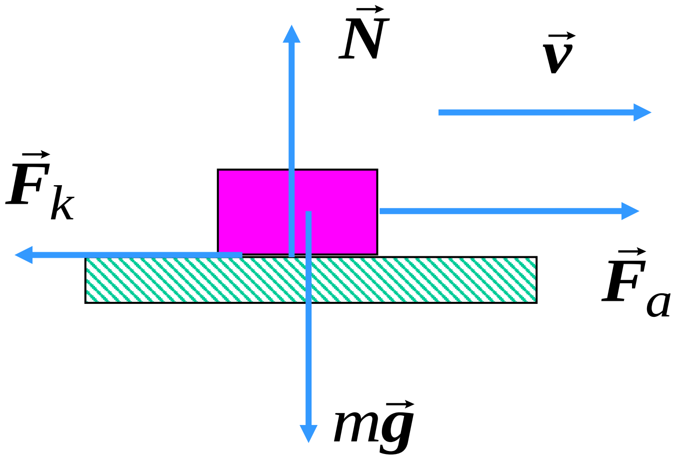
Tillämpningar av Newtons II lag

- Friktionskraften
  - Rörelsefriktion
  - Vilofriktion
  - Friktion i vätskor och gaser

FRIKTIONSKRAFTEN

<u>Rörelsefriktion</u>

- Kraften parallell med ytan
- motverkar rörelse



Rörelsefriktion (storlek)

$$F_k = \mu_k N$$

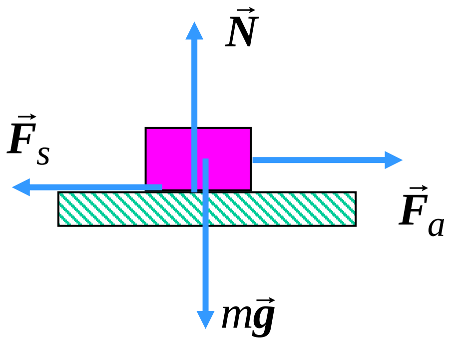
inte vektorekvation!

μ_k = rörelsefriktionstalet

- beror av ytorna, $\mu_k \sim 0{,}1...1$
- beror i "teorin" inte av beröringsytans area
- beror inte (mycket) av hastigheten

Vilofriktion

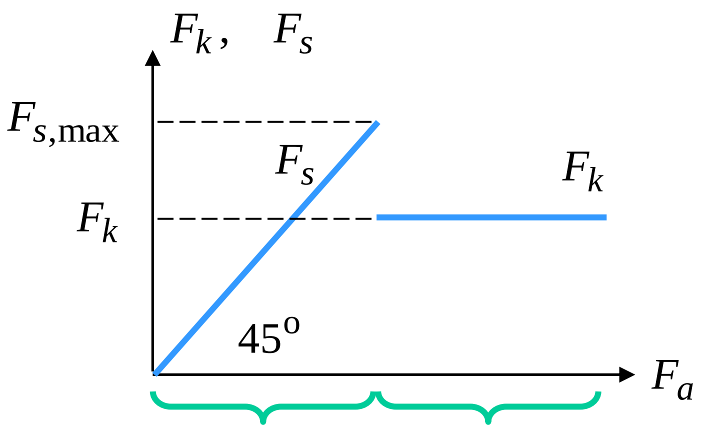
- en kraft parallell med beröringsytan
- förhindrar rörelse



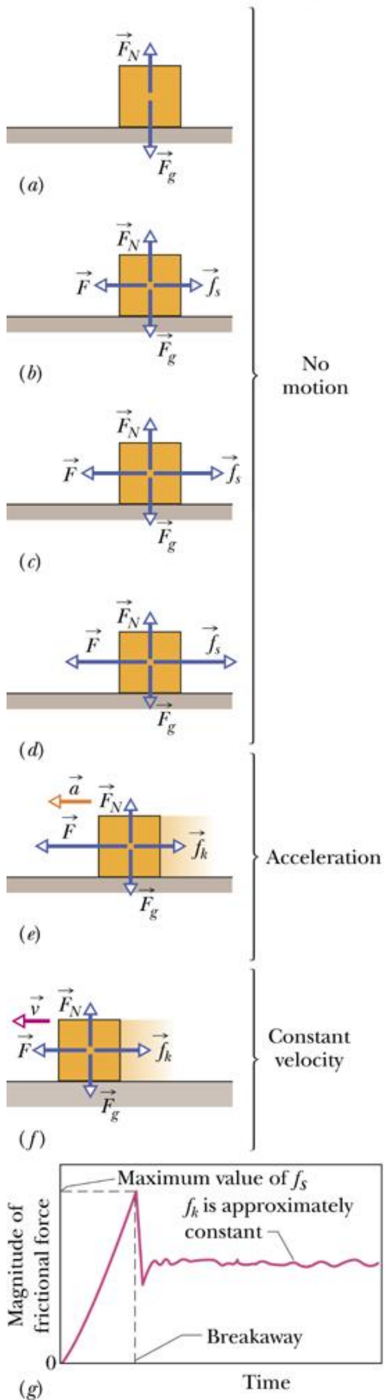
Fullt utvecklad vilofriktion
= vilofriktionskraftens F_S största möjliga värde

$$F_{s,max} = \mu_s N$$

μ_s = vilofriktionstalet $\mu_s > \mu_k$ oftast



$F_a < F_{s,\max}$	$F_a > F_k$
$a = 0$	$a \neq 0$
$F_s = F_a$	



Friktion i vätskor och gaser

- i en vätska eller en gas påverkas en kropp i rörelse av en kraft som motverkar rörelsen.
- kraften beror av kroppens form, hastighet och av vätskans eller gasens egenskaper

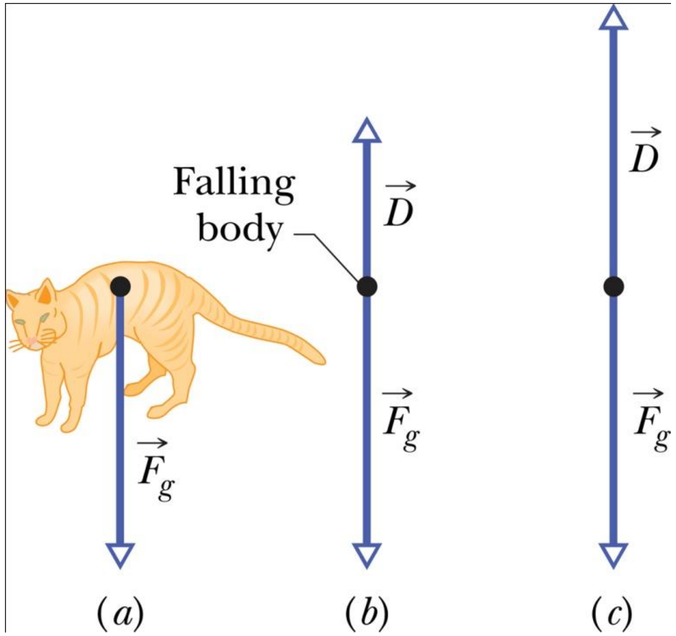
Vid låga hastigheter i vätskor gäller: $F = kv$

Maxhastighet: $v_t = \dfrac{mg}{k}$

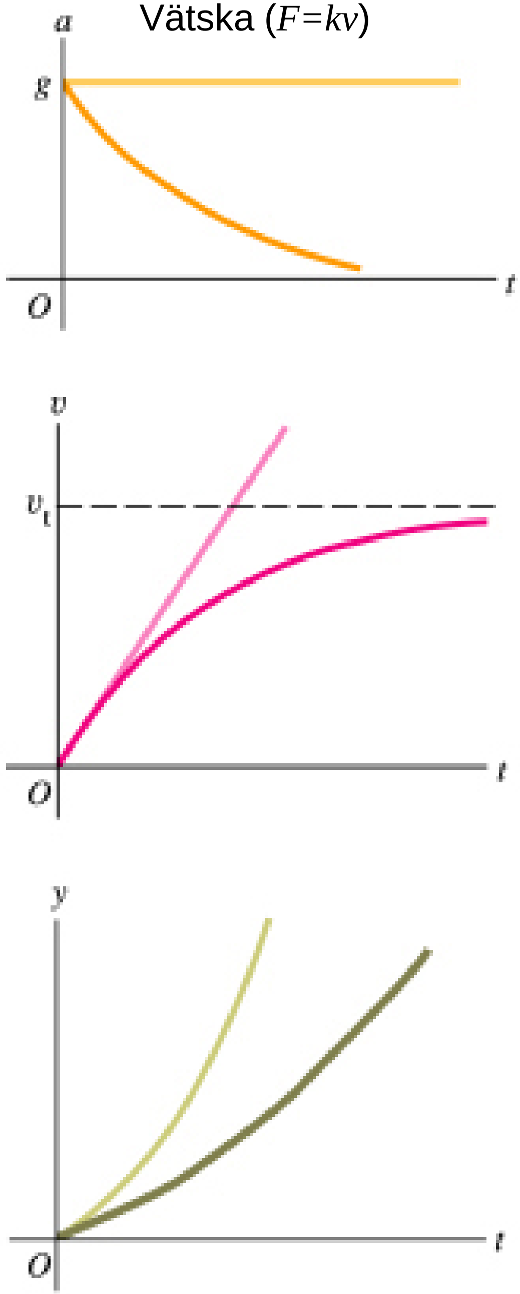
Luftmotstånd: $F = \dfrac{1}{2} C\rho A v^2$

Maxhastihet: $v_t = \sqrt{\dfrac{2mg}{C\rho A}}$

C = luftmotståndskoefficienten
ρ = luftdensiteten
A = tvärsnittsarean



Vätska ($F=kv$)

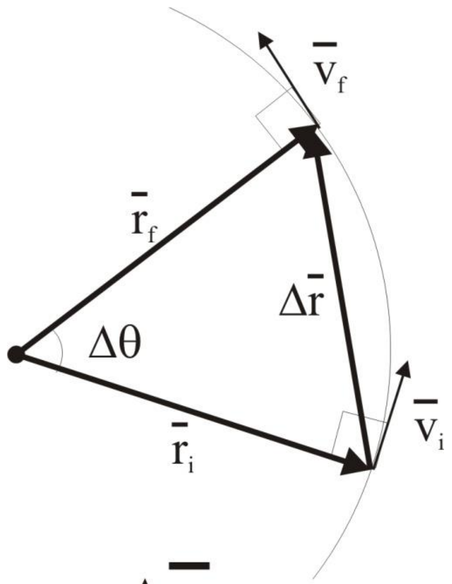


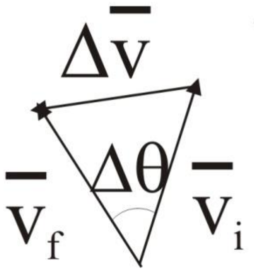
Tillämpningar av Newtons II lag

- (Likformig) Cirkelrörelse
- Cirkelrörelsens dynamik
    - Centripetalkraft

LIKFORMIG CIRKELRÖRELSE

Partikeln i cirkulär bana





$$v = \text{konstant} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \text{omloppstid}$$

$\vec{v}$:s riktning ändrar $\Rightarrow$ acceleration

Likformiga trianglar

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \Longrightarrow$$

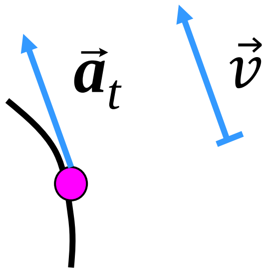
$$\Delta v = \frac{v}{r}\Delta r$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

accelerationen riktad mot cirkelns mittpunkt
(centripetal acceleration)

Allmänt: accelererad rotation

$v \neq \text{konstant}$

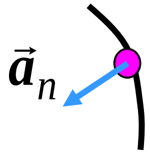


Tangentiell acceleration

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Normal acceleration (vid ett visst ögonblick)

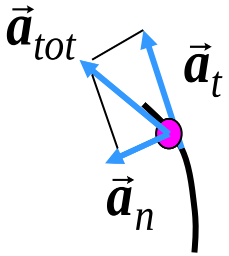
$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

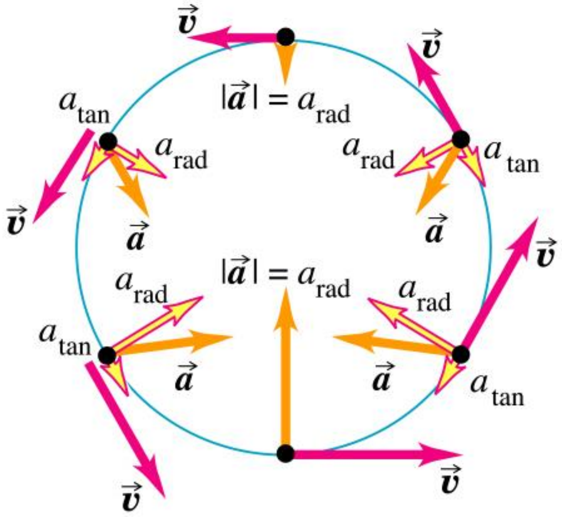


Totala acceleration

$$\vec{a}_{tot} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

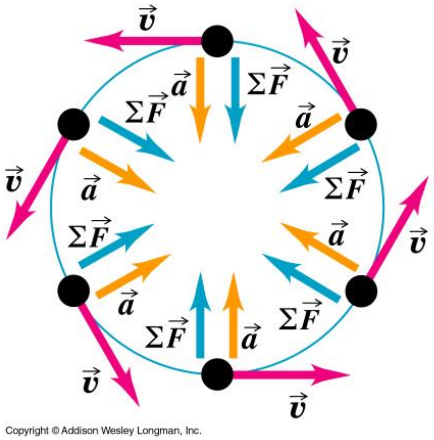
$$a_{tot} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$





LIKFORMIGA CIRKELRÖRELSENS DYNAMIK

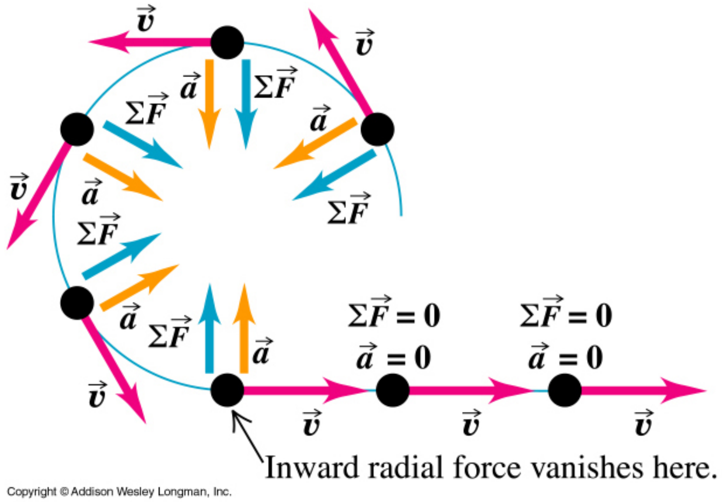
- Accelerationen pekar mot cirkelns mittpunkt => Nettokraften $\sum \vec{F}$ mot cirkelns mittpunkt



$$a_R = \frac{v^2}{R}$$

$$\sum F = ma_R = m\frac{v^2}{R}$$

- Observera att centripetalkraften är nettokraften och inte avser någon växelverkan.



Tillämpningar av Newtons II lag

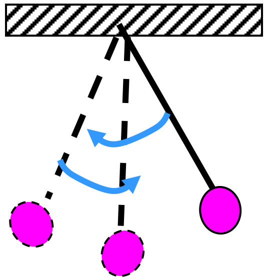
- Periodisk rörelse
- Harmonisk rörelse
- Fjäderkraften

PERIODISK RÖRELSE

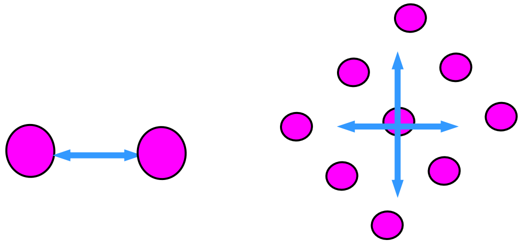
Periodisk rörelse: fenomen, kedja av händelser som upprepas likadant.

Exempel:

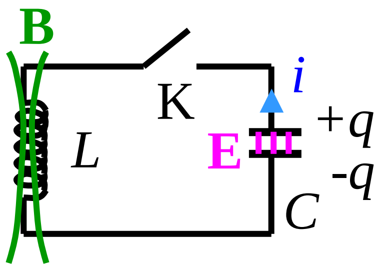
Pendel:
Period $T =$ ca 1 s



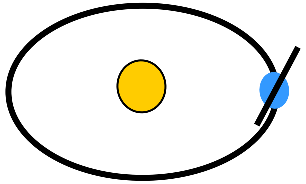
Atomerna i molekyler och fasta ämnen, $T =$ ca 10^{-13} s



Elektriska kretsar laddning q, ström i, $T =$ ca $10^{-3} \cdots 10^{-9}$ s



Årstiderna, $T = 1$ år



HARMONISK OSCILLATION

Storheten x oscillerar harmoniskt, om dess tidsberoende kan beskrivas av ekvationen

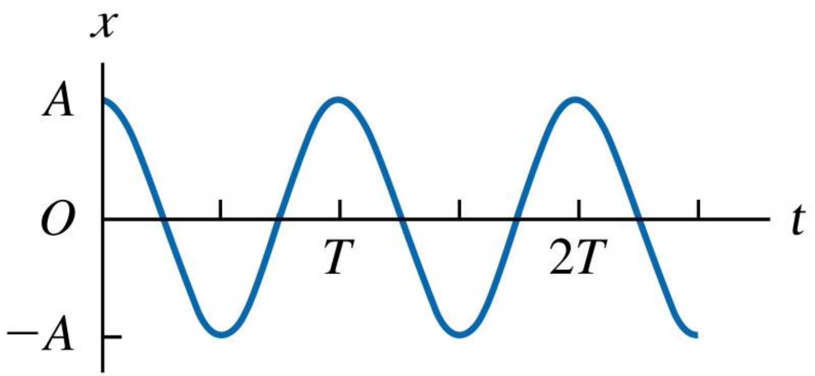
$x = x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

A = amplitud

$A,\ \omega,\ \phi$ konstanter; ω = vinkelfrekvens ($[\omega]$=1/s)

$\omega t + \phi$ = fas ($[\phi]$ =rad)

ϕ = faskonstant



Period T:

$[\omega(t + T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$

$\Rightarrow T = 2\pi / \omega$

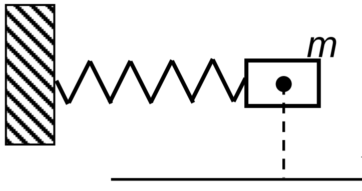
frekvens f:

$f = 1 / T$ $[f] = 1/\text{s} = 1\ \text{Hz}$ (Hertz)

Obs!

$\omega = 2\pi f$

Fjäderkraften



$$\vec{F} = -kx\hat{\imath}$$

(Ideala) Fjäderkraften:

Lineär återställande kraft $\vec{F} = -kx\hat{i}$ k = fjäderkonstanten

Newton II: $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{i}$

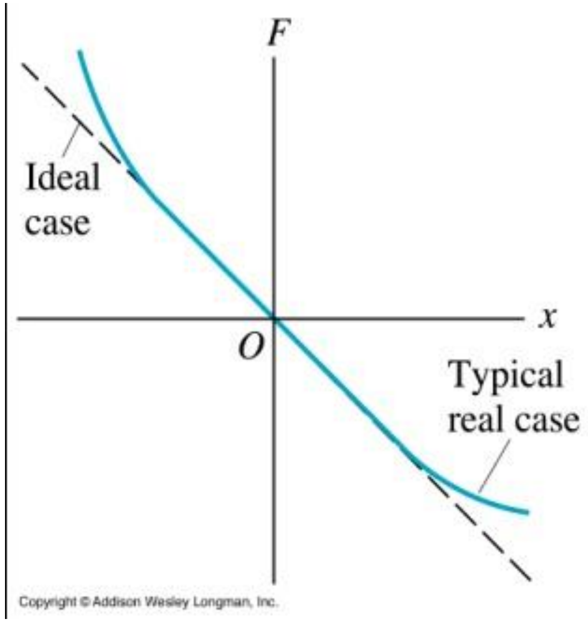
$$\Longrightarrow \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Longrightarrow x(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

ω beror inte av amplituden



- Partikelns hastighet och acceleration fås som tidsderivator av lägesfunktionen

Begynnelsevillkor:
⇒ amplituden och faskonstanten

Arbete och energi

- Arbete
- Arbetsprincipen
- Rörelseenergi, kinetisk energi

ARBETET AV EN KONSTANT KRAFT

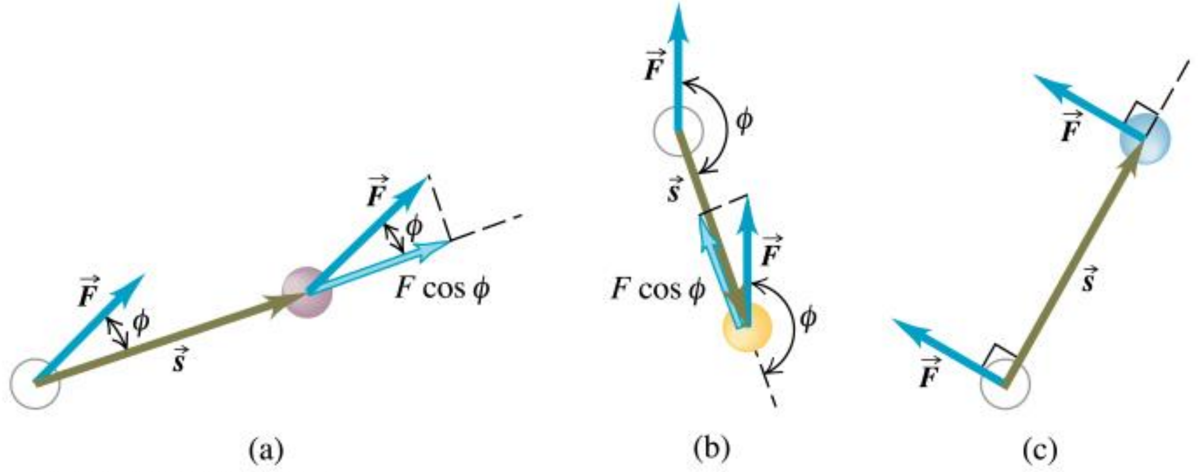
Newton II $\rightarrow$ accelerationen $\vec{a}(t)$

$\rightarrow$ partikelns bana $\vec{r}(t)$, hastighet $\vec{v}(t)$

Ofta svårt, ibland onödigt räknande för att lösa ett problem!

ARBETET AV EN KONSTANT KRAFT

$W > 0$ $\quad$ $W < 0$ $\quad$ $W = 0$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$ konstant kraft, linjär förskjutning

$[W] = [F][s] = \text{Nm} = \text{J (joule)}$

ARBETET AV EN VARIERANDE KRAFT I EN DIMENSION

Arbetet under en infinitesimal förskjutning

$$dW = \vec{F}(x) \cdot d\vec{s}$$

Kraften och förskjutningen parallella (antiparallella) =>

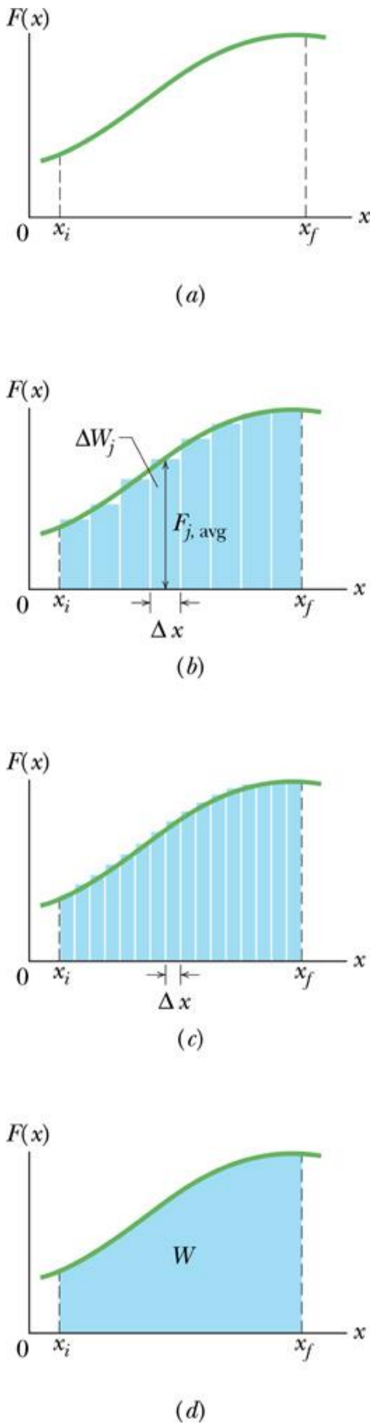
$$dW = F(x) \cdot ds$$

Motsv. arbetet från en konstant kraft

Summering över alla förskjutningsintervall =>

Integrering!

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx$$



RÖRELSEENERGI (KINETISK ENERGI) OCH ARBETSPRINCIPEN

Definition: Partikelns rörelseenergi

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$$

m = massa
v = fart

$$[K] = 1\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1\text{Nm} = 1\text{J}$$

Arbetet som utförts av krafterna
≡ förändringen i kinetisk energi

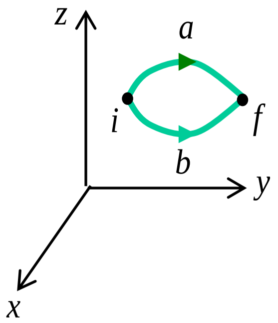
Arbetsprincipen!

$$\boxed{W_{if} = K_f - K_i}$$

Arbete och energi

- Konservativa och icke-konservativa krafter
- Potentialenergi

KONSERVATIVA och icke-konservativa KRAFTER, SAMBANDET MELLAN ARBETET OCH RÖRELSEBANAN

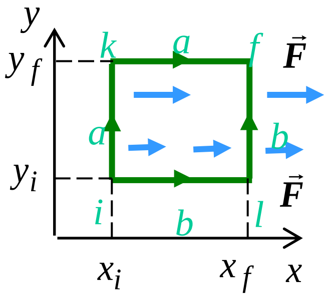


Arbetet W_{if} kan bero av banan för kraftens verkningspunkt. Dvs.:

$$W_{if}(a) \neq W_{if}(b) \quad !$$

Om arbetet som utförs av kraften F inte beror av banan är kraften en **KONSERVATIV KRAFT**

Exempel: $\vec{F}(x, y) = Ay\,\hat{i} \qquad A = \text{konstant}$



$$W_{if}(a) = \int_i^k Ay\hat{i}\cdot\hat{j}dy + \int_k^f Ay\hat{i}\cdot\hat{i}dx$$

$$= Ay_f \int_{x_i}^{x_f} dx = Ay_f(x_f - x_i)$$

Konservativa krafter:

- en konstant kraft

$$W_{if} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_f - \vec{r}_i)$$

t.ex. tyngdkraften:

$$W_{if} = -mg\,(y_f - y_i)$$

$$W_{if}(b) = \int_i^l Ay\hat{i}\cdot\hat{i}dx + \int_l^f Ay\hat{i}\cdot\hat{j}dy = Ay_i\int_{x_i}^{x_f} dx$$

$$= Ay_i(x_f - x_i) \quad \neq \quad W_{if}(a) \quad !$$

Om arbetet som utförs av kraften F beror av banan är kraften en **ICKE-KONSERVATIV KRAFT**

KRAFT OCH POTENTIALENERGI

Definition: Kraften $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ är **konservativ** om det existerar en av (endast) läget beroende funktion $U(r)$ så att

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla U} \qquad \nabla = \text{nabla}$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} \quad \text{(i kartesiska koordinater)}$$

Detta kallas för U:s gradient.

$$\frac{\partial U}{\partial x} \text{ är partialderivatan av } U \text{ med avseende på } x$$

***U* kallas för kraften *F*:s potentialenergi**

Ifall kraften (och potentialenergin) endast beror av en koordinat förenklas detta till

$$\boxed{F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$

ICKE-KONSERVATIVA KRAFTER

Om icke-konservativa krafter (t.ex. friktion) utför arbete kommer INTE den mekaniska energin att bevaras.

För alla krafter gäller:

$$K_f - K_i = W$$

Arbetet kan indelas i arbete utfört av konservativa och icke-konservativa krafter: $W = W_{con} + W_{non}$

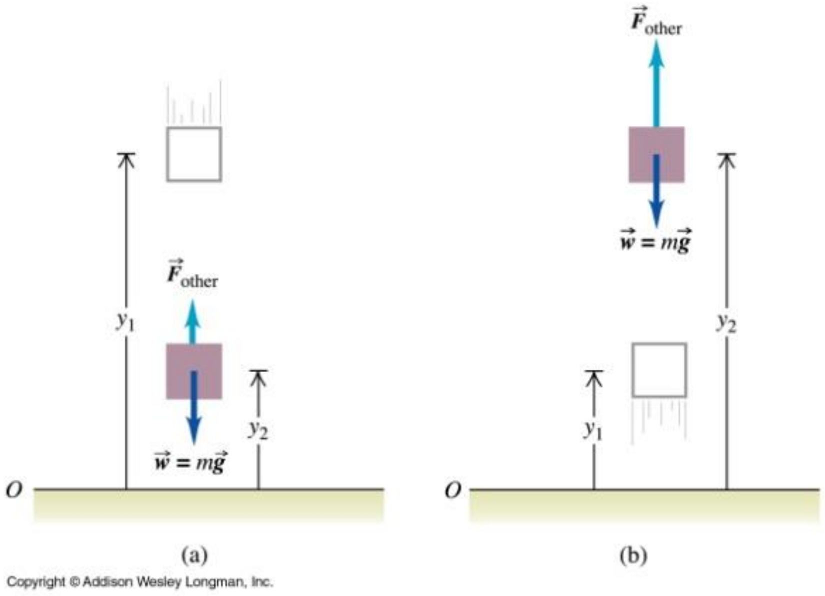
För W_{con} gäller:

$$\boxed{W_{con} = -(U_f - U_i)}$$

Energitillämpningar

- Potentialenergi, gravitation
- Potentialenergi, fjäderkraften
- (Mekaniska) Energins bevarande
- Effekt

POTENTIALENERGI, GRAVITATIONEN



Arbetet som utförs av tyngdkraften:

$$W_G = Fs = -mg(y_2 - y_1)$$
$$= mgy_1 - mgy_2$$

Gravitationell potentialenergi: $U = mgy$ =>

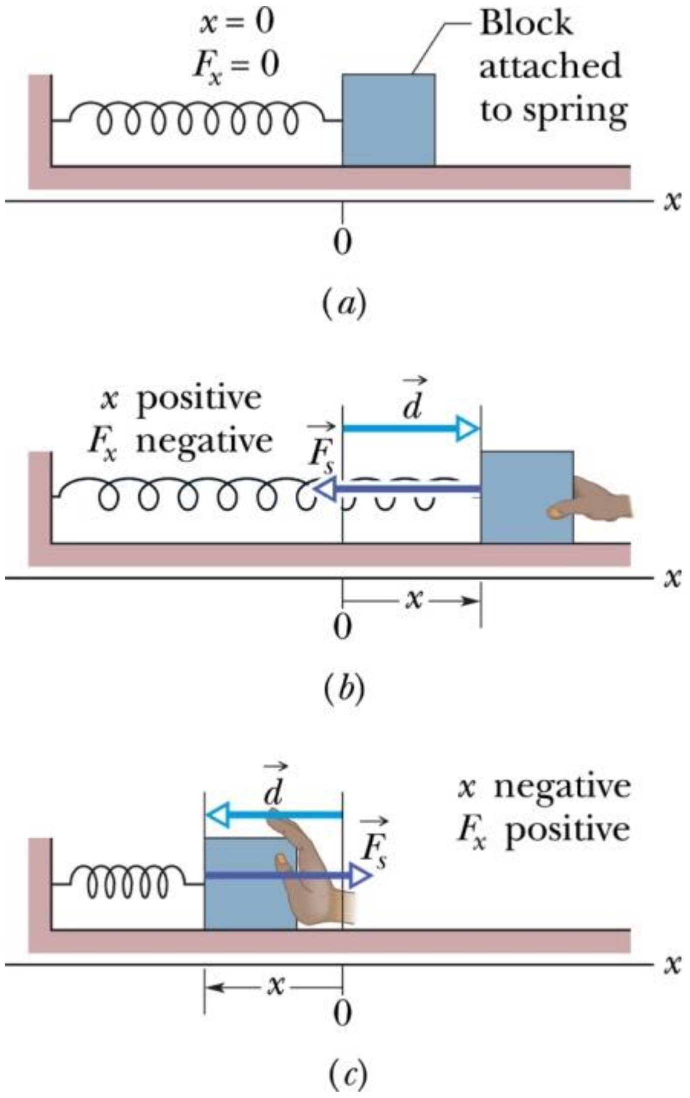
$$W_G = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$$

OBSERVERA MINUSTECKNET!

- Då tyngdkraften gör positivt arbete, är förändringen i potentialenergi negativ.
- Då tyngdkraften gör negativt arbete, är förändringen i potentialenergi positiv.

Allmänt gäller att det fysikaliskt relevanta är förändringen i potentialenergi inte det absoluta värdet.

POTENTIALENERGI, FJÄDERKRAFTEN (elastisk potentialenergi)

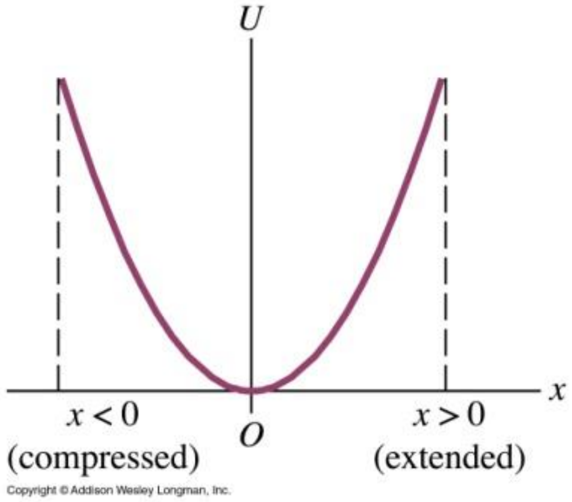


Fjäderkraften: $\vec{F} = -k\vec{d}$

Arbetet som utförs av fjädern: $W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$

Definition av elastisk potentialenergi: $U = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_1 - U_2 = -\Delta U$$



MEKANISK ENERGI

Arbetet som utförs av gravitationskraften: $W_G = -\Delta U$

Sambandet mellan arbete och kinetisk energi: $W = \Delta K$

En kombination av dessa ger:

$$\Delta K = -\Delta U \qquad \text{eller} \qquad K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \qquad \Rightarrow$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad \text{eller}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

Summan av kinetiska och potentiella energin definieras som kroppens mekaniska energi E.

Mekaniska energin bevaras då endast tyngdkraften gör arbete på kroppen.

Arbetet som utförs av tyngdkraften beror inte av banan, endast av begynnelse och slutkoordinaterna, KONSERVATIV KRAFT.

Då endast KONSERVATIVA krafter gör arbete på kroppen, bevaras kroppens mekaniska energi.

EFFEKT

Under tidsintervallet Δt görs arbetet W

Medeleffekten: $$P_k = \frac{W}{\Delta t}$$

(Momentan) effekt $$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}}$$

Enhet

$$[P] = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\mathrm{W}$$ Watt

$$\left(= 1\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^3}\right)$$

Effekten $P(t)$ $\rightarrow$ arbete under tidsintervallet $t_i \ldots t_f$

$$W = \int_{t_i}^{t_f} P(t)dt$$

Konstant effekt: P oberoende av tiden

$$W = P\int_{t_i}^{t_f} dt = P(t_f - t_i)$$

(jmf. energins (arbetets) enhet
1 kWh = 3600 kJ)

Rörelsemängd

- Rörelsemängd
- Rörelsemängdens bevarande
- Impuls

RÖRELSEMÄNGD

Definition: Partikelns (massa m) rörelsemängd är $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ $[p]$=kgm/s

Newton II:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Partikelsystemets rörelsemängd:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_{CM}) = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$$

$$= M\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{ext,i}$$

Gäller också då massan är en funktion av tiden

RÖRELSEMÄNGDENS BEVARANDE

För en partikel

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

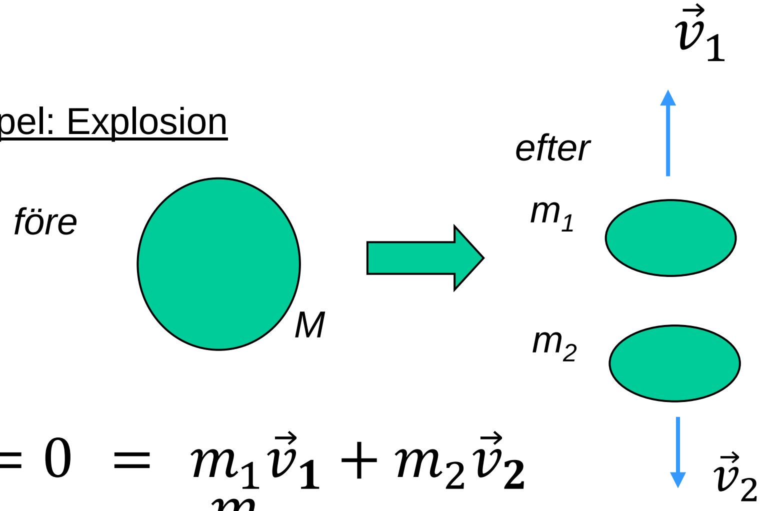
Om $\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{p} = \text{konstant}}$

För ett partikelsystem

$$\sum_i \vec{F}_{ext,i} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Om $\sum_i \vec{F}_{ext,i} = 0 = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \text{konstant}}$

Exempel: Explosion



$$\vec{P} = 0 \;=\; m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1$$

IMPULS

$$\boxed{\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt}$$

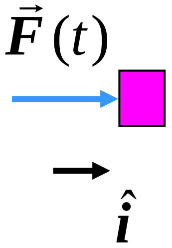
(vektor!)

Enhet: [J] = Ns

Medelkraften

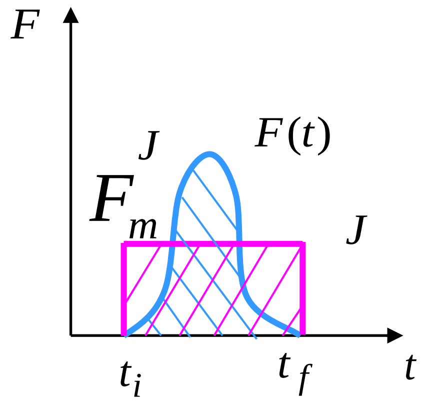
$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt = \vec{F}_m \Delta t$$

Exempel:



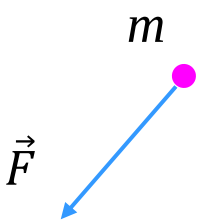
$$\vec{F}(t) = F(t)\hat{i}$$

$$\vec{J} = \hat{i}\int_{t_i}^{t_f} F(t)dt = \hat{i}F_m(t_f - t_i)$$



De sträckade ytorna är lika stora!

Sambandet mellan impuls och förändringen i rörelsemängd



$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\int d\vec{p} = \int \vec{F}(t)dt$$

$$\int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J}$$

Rörelsemängd

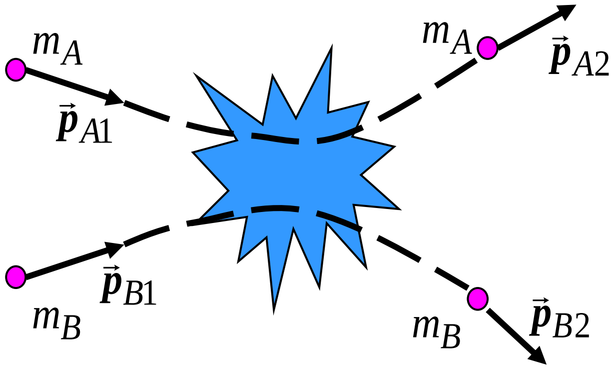
- Kollisioner
  - Elastisk
  - Inelastisk
  - Fullständigt elastisk

KOLLISIONER

Vid en kollision påverkar två partiklar varandra med impulsiva krafter, oftast behöver de yttre krafterna inte beaktas:

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext,i} = 0$$

Kollisionen mellan två partiklar



Rörelsemängden bevaras: $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$

$$m_a\vec{v}_{a1} + m_b\vec{v}_{b1} = m_a\vec{v}_{a2} + m_b\vec{v}_{b2}$$

Gäller i alla kollisioner där de yttre krafterna inte behöver beaktas $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{ext,i} = 0$

ELASTISK KOLLISION

De inre krafterna är konservativa!

1. Systemets rörelsemängd bevaras
2. Systemets kinetiska energi bevaras

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \\ m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \end{cases}$$

Inelastisk kollision

De inre krafterna är icke-konservativa!

1. Systemets rörelsemängd bevaras
$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$
2. Systemets kinetiska energi bevaras **inte**

Specialfall: Fullständigt inelastisk kollision

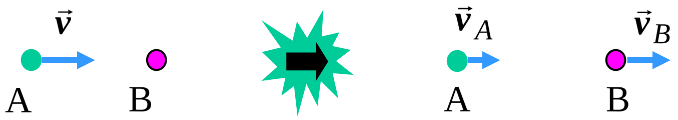
Partiklarna fastnar vid varandra i kollisionen

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f$$

Maximal förlust av rörelseenergi

ELASTISK KOLLISION I EN DIMENSION

T.ex.



$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_A v^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 \\ m_A v = m_A v_A + m_B v_B \end{cases} \qquad v_A = ?\,, \qquad v_B = ?$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_B v_B^2 = m_A(v^2 - v_A^2) = m_A(v - v_A)(v + v_A) \\ m_B v_B = m_A(v - v_A) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v_B = v + v_A}$$ (Beror ej av massorna)

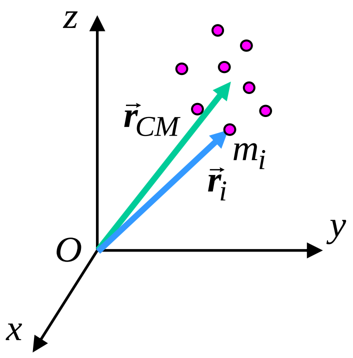
$$\Rightarrow m_B(v + v_A) = m_A(v - v_A)$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}v \qquad ; \qquad v_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B}v$$

Rörelsemängd

- Massmedelpunkt
  - Massmedelpunktens rörelse
  - Newton II för ett partikelsystem
- Relativ rörelse

Massmedelpunkten för ett partikelsystem



partikel $\quad i$

massa $\quad m_i$

lägesvektor $\quad \vec{r}_i$

Definition: lägesvektorn för massmedelpunkten:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum\limits_i m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i}$$

$$\sum_i m_i = M,$$ systemets totala massa

dvs. vägt medelvärde av lägesvektorerna

i kartesiska komponenter:

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Massmedelpunktens rörelse

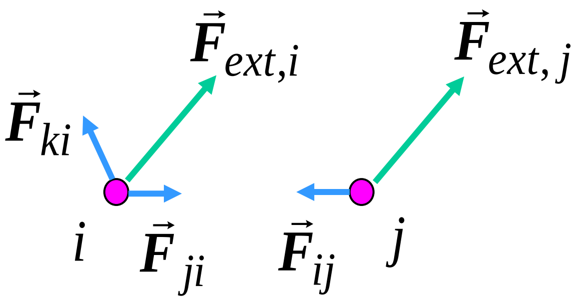
Massmedelpunktens hastighet:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{v}_i$$

Massmedelpunktens acceleration:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{a}_i$$

Newton II för ett partikelsystem



Kraften på partikel *i*

$$\vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_{ext,i}}_{} + \sum \vec{F}_{ij}$$

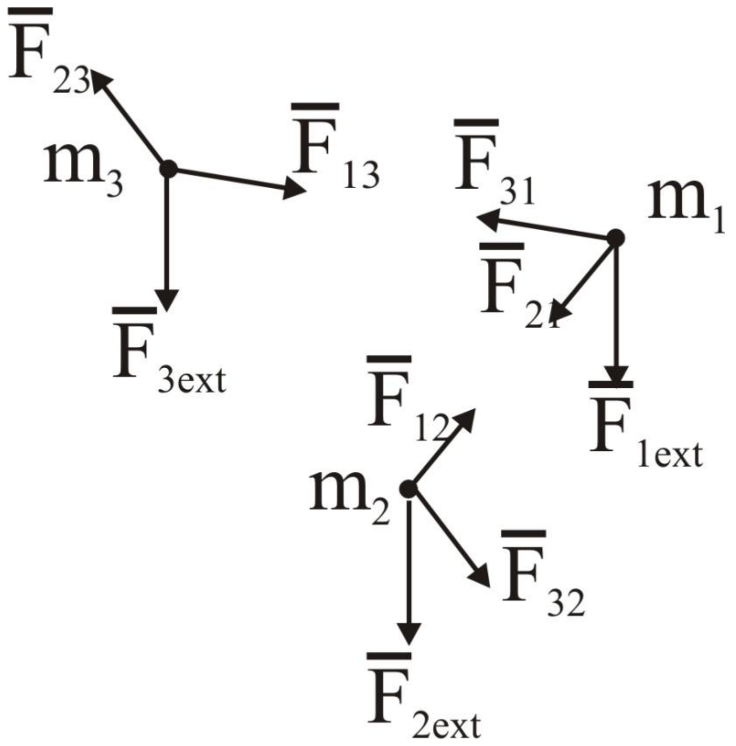
extern kraft som verkar på systemet

Newton II, tre partiklar

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{ext1} = m_1\vec{a_1}$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{ext2} = m_1\vec{a_2}$$

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{ext3} = m_1\vec{a_2}$$

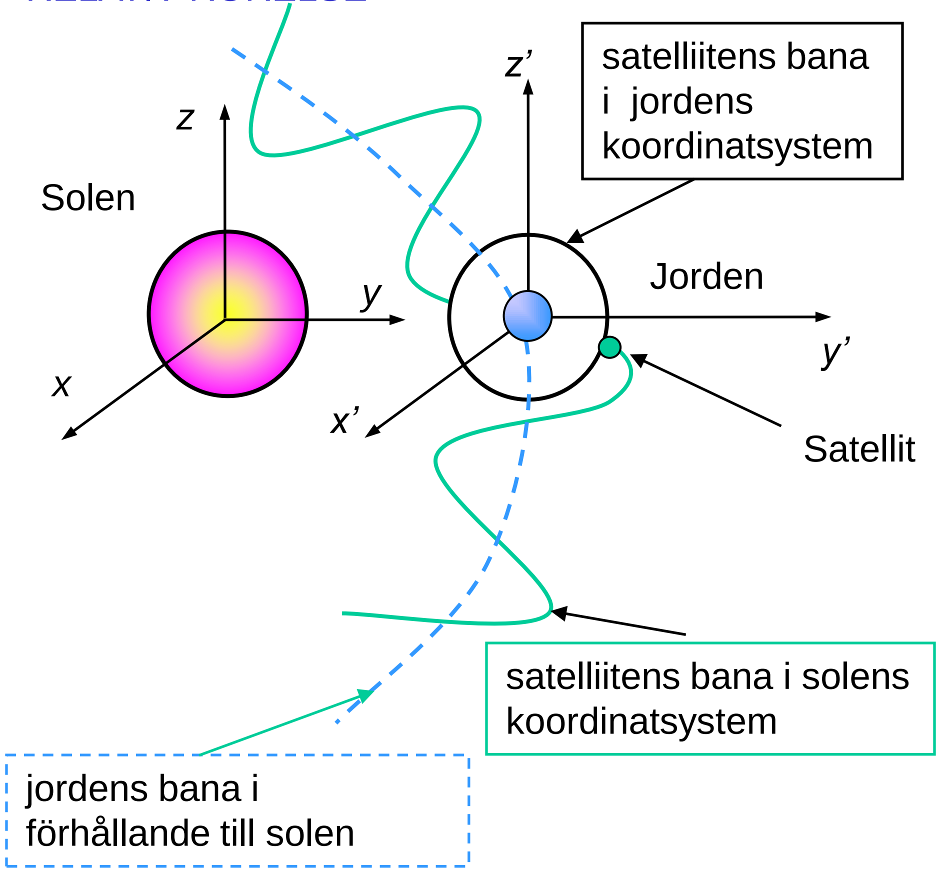


Newton III => inre krafterna tar ut varandra

Endast de yttre krafterna inverkar på massmedelpunktens rörelse!

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}}$$

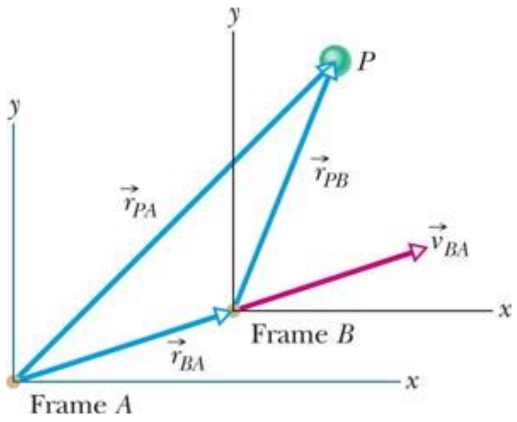
RELATIV RÖRELSE



Rörelsen är relativ: partikelns position ges i föhållande till ett givet koordinatsystem. Valet av koordinatsystem i princip godtyckligt.

Problem?: Sambandet $\vec{v} \leftrightarrow \vec{v}'$ $\vec{a} \leftrightarrow \vec{a}'$

Partikel P rör sig i förhållande till observatörerna *A* och *B*.
A och *B* rör sig i förhållande till varandra.



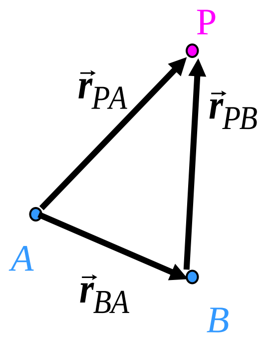
$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB}$$

Derivering med avsende av tiden *t*

$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt}$$

P:s hastighet i förhållande till *A*

$$\vec{v}_{PA} = \frac{d\vec{r}_{PA}}{dt}$$



P:s hastighet i förhållande till *B*

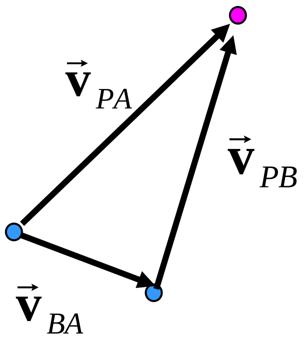
$$\vec{v}_{PB} = \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt}$$

B:s hastighet i förhållande till *A*

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$$

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB}$$

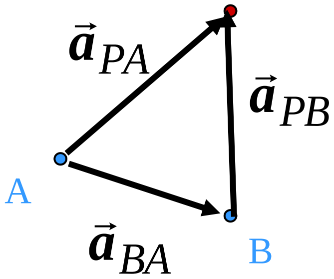
OK, om $v << c$ (ljusets hastighet i vakuum)



För accelerationerna gäller:

$$\frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{PB}}{dt}$$

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB}$$



Specialfall: $\vec{v}_{\mathrm{BA}} = \text{konstant} \Rightarrow \vec{a}_{BA} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$

Rotation

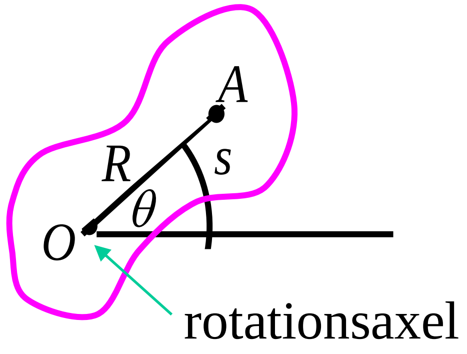
- Vinkelstorheterna
- Rotationsrörelsens kinematik
- Relationen mellan vinkel- och lineära kinematiska storheter

Vinkelstorheterna

Vinkelkoordinat $\theta = \dfrac{s}{R}$

Enhet: radianer (rad)

$$\theta(\text{hel cirkel}) = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}$$



Vinkelhastighet (vektor)

$$\vec{\omega} = \omega\hat{e} = \frac{d\theta}{dt}\hat{e}$$

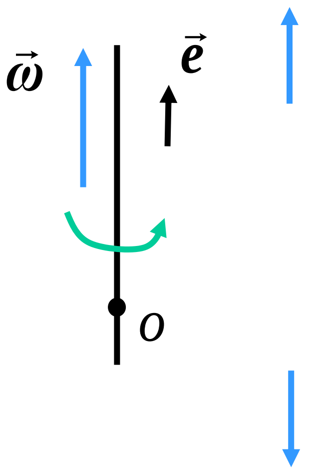
$$|\hat{e}| = 1$$

Vinkelaccelerationen (vektor)

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{e}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Högerhandsregeln:



$$\frac{d\omega}{dt} > 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} < 0$$

Rotationsrörelsens kinematik

Konstant vinkelhastighet: $$\frac{d\theta}{dt} = \omega_z$$

Integration => $$\theta = \int_0^t \omega_z \, dt' = \omega_z \int_0^t dt' = \underline{\omega_z t + \theta_0}$$

Konstant vinkelacceleration: $$\frac{d\omega_z}{dt} = \alpha_z$$

Integration => $$\omega_z = \int_0^t \alpha_z \, dt' = \alpha_z \int_0^t dt' = \underline{\alpha_z t + \omega_{z0}}$$

Integration x 2 => $$\frac{d\theta}{dt} = \omega_z = \omega_{z0} + \alpha_z t \Longrightarrow$$

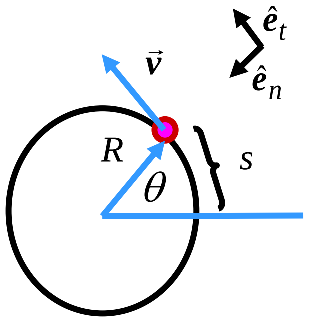
$$\theta = \int_0^t (\omega_{z0} + \alpha_z t')dt' = \omega_{z0} \int_0^t dt' + \alpha_z \int_0^t t' \, dt' \Longrightarrow$$

$$\underline{\theta(t) = \theta_0 + \omega_{z0} t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2}$$

Jämför med likformig och likformigt accelererad rörelse

Relationen mellan vinkel- och lineära storheter

$$\vec{v},\quad \vec{a} \qquad \text{vs.} \qquad \vec{\omega},\quad \vec{\alpha} \quad = ?$$

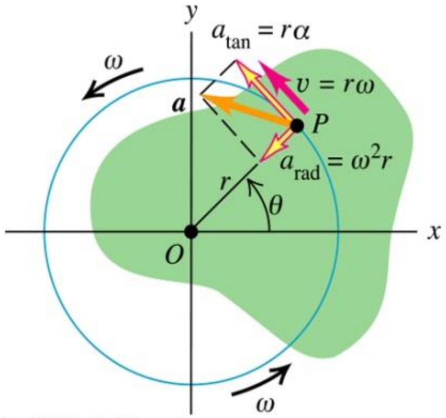


$$v_t = \frac{ds}{dt}$$

$$v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{dR\theta}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow v_t = R\omega_z$$

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}R\omega_z = R\frac{d\omega_z}{dt} \Longrightarrow a_t = R\alpha_z$$

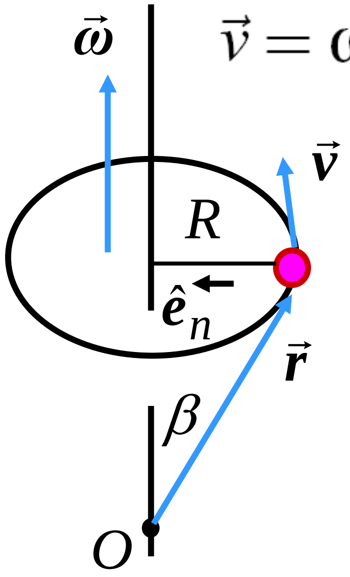
$$a_R = \frac{v_t^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} \Longrightarrow a_R = R\omega^2$$



Totala accelerationen

$$a = \sqrt{R^2\alpha^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Origo på rotationsaxeln



$$\vec{v} = \omega R \hat{e}_t = \omega r \sin\beta \ \hat{e}_t$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\frac{dv}{dt}\vec{e}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\frac{v^2}{R}\vec{e}_n}}$$

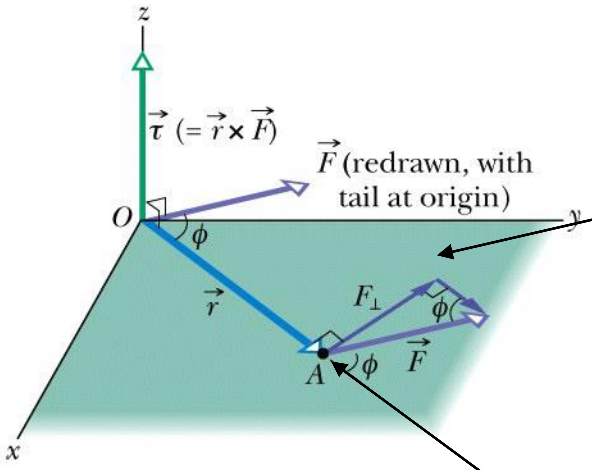
Rotation

- Kraftmoment
- Tröghetsmoment
- Rotationsrörelsens dynamik

Kraftmoment

Definition: Kraftmomentet $\vec{\tau}$ av kraften $\vec{F}$ kring axeln (punkten) 0 är

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



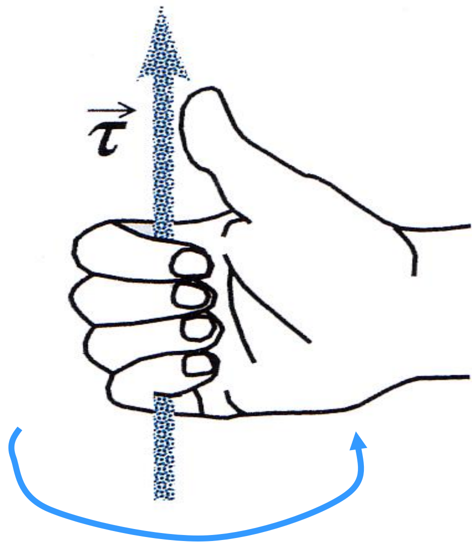
(b)

Plan definierat av $\vec{r}$ och $\vec{F}$

Kraftens verkningspunkt

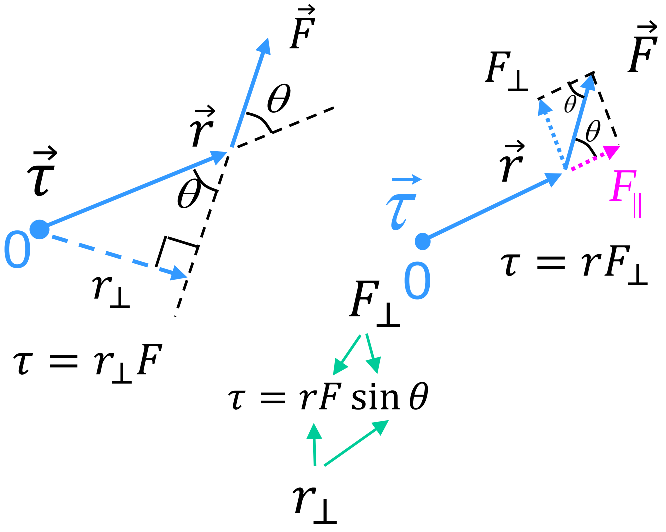
$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\left|\vec{F}\right| \sin\varphi$$

Enhet:
$[\tau]$ = Nm (OBS! Enheten Joule är reserverad för energier!)



Rotationsriktning

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ beskriver $\vec{F}$:s förmåga att rotera en stel kropp kring en axel $(\perp \vec{F}, \perp \vec{r})$ som går genom 0 .

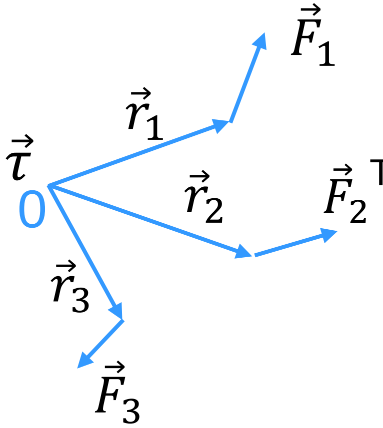


$\tau = r_\perp F$

$\tau = rF \sin\theta$

$\tau = rF_\perp$

<u>Flera krafter:</u>



$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Totala kraftmomentet

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

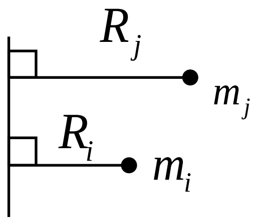
Vektorsumma!

$r_\perp$ = vinkelräta avståndet mellan rotationsaxeln och den förlängda kraftlinjen.

$F_\perp$ = kraftens komponent vinkelrätt mot $\vec{r}$.

TRÖGHETSMOMENTET

Ett partikelsystems tröghetsmoment



$$\boxed{I = \sum_i m_i {R_i}^2}$$

OBS! Tröghetsmomentet varierar beroende på var rotationsaxeln går

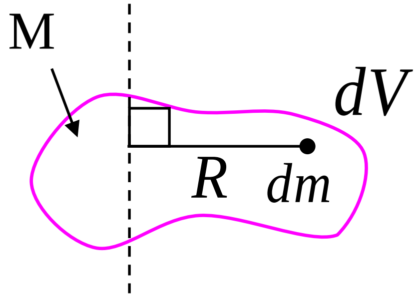
Enhet: $[I] = 1\ \mathrm{kg\ m^2}$

Tröghetsmomentet för en kontinuerlig massfördelning

$$I = \int_M R^2 dm = \int_V \rho(\vec{r})\, R^2 dV$$

$$dm = \rho(\vec{r}) dV$$

densitet

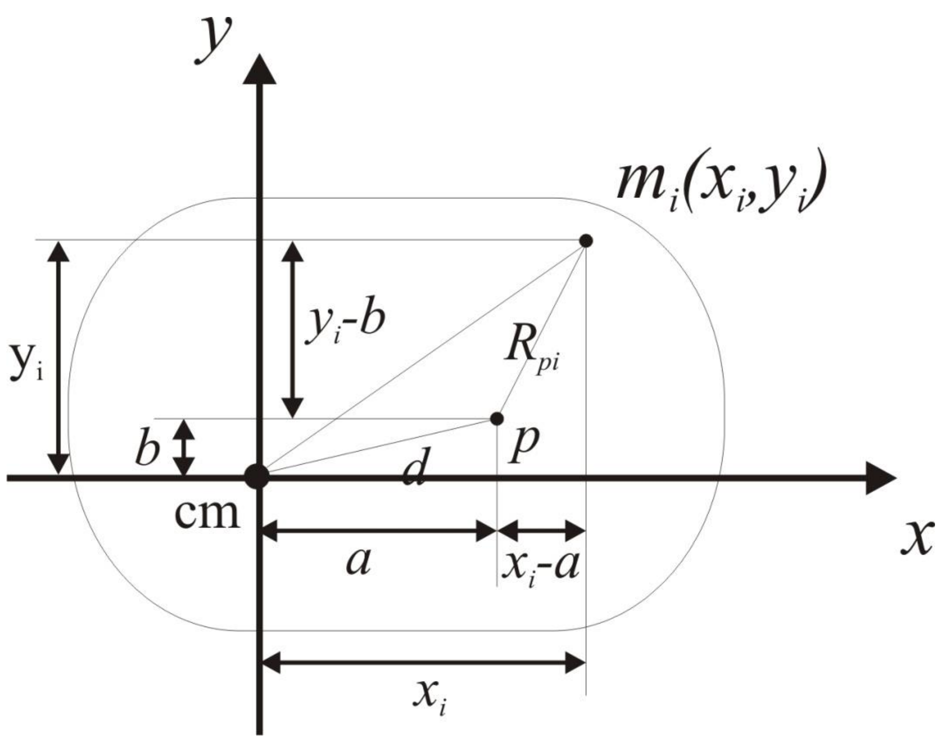


Steiners sats eller Parallell-axel teoremet

cm = massmedelpunkten
Sambandet mellan I_{CM} och I_P

$$x_{cm} = 0 \text{ och } y_{cm} = 0$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$I_P = \sum m_i R_{Pi}^2 = \sum m_i \left[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2\right]$$

=>

$$I_P = \underbrace{\sum m_i (x_i^2 + y_i^2)}_{I_{cm} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)} - 2a \underbrace{\cancel{\sum m_i x_i}}_{= 0} - 2b \underbrace{\cancel{\sum m_i y_i}}_{= 0} + (a^2 + b^2) \sum m_i$$

$$I_{cm} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

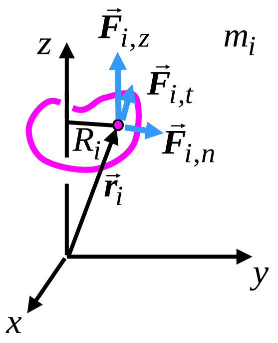
$$(a^2 + b^2) \sum m_i = M d^2$$

Steiners sats $\boxed{I_P = I_{cm} + M d^2}$

ROTATIONSRÖRELSENS DYNAMIK

Rotation kring z-axeln, endast nettokraftens tangentiella komponent inverkar.

Newton II för partikel *i*



Newton II för partikel *i:*

$$F_{i,t} = m_i a_{i,t} = m_i R_i \alpha$$

$$R_i \cdot \quad | \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{R_i F_{i,t}} = m_i R_i^2 \alpha = \tau_{i,z}$$

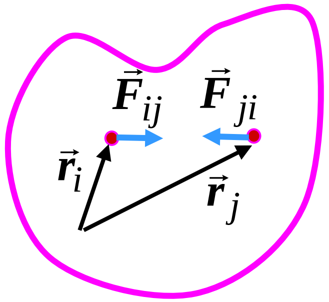
z-komponenten för kraftmomentet från en extern kraft

$F_{i,z}$ och $F_{i,n}$ kontribuerar inte till kraftmomentets $z-$komponent

Hela kroppen (systemet): $$\sum_i \tau_{i,z} = \sum_i m_i R_i^2 \alpha = I_z \alpha$$

Inre krafter inverkar inte på det totala kraftmomentet

$$\sum \vec{\tau} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$



Rotationsrörelsens rörelseekvation:

$$I_z \alpha_z = \tau_{ext,z}$$

är i kraft då rotationsaxeln är en axel i ett inertialsystem

$$\boxed{I_{CM} \alpha_{z,CM} = \tau_{ext,z,CM}}$$

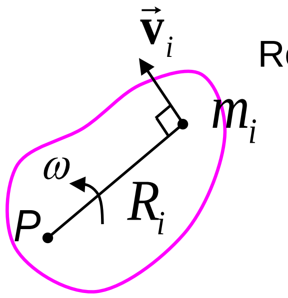
är i kraft för en godtyckligt vald rotationsaxel.

ANVÄND CM-SYSTEM!

Rotation

- Rörelseenergi vid rotationsrörelse
- Rörelseenergin för en kropp i både rotationsrörelse och translatorisk rörelse

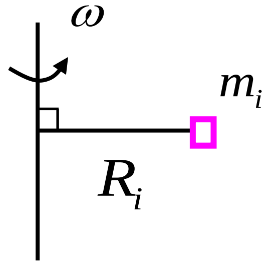
KINETISKA ENERGIN HOS EN ROTERANDE STEL KROPP



Rotationsaxeln i *P*

Partikeln m_i :s kinetiska energi

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



fart $\quad v_i = R_i \omega$

$$\Rightarrow \; K_i = \frac{1}{2} m_i R_i{}^2 \omega_i^2$$

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i{}^2\right)\omega^2$$

Definition av tröghetsmoment: $\boxed{I = \sum_i m_i R_i{}^2}$

$\Rightarrow$ Rörelseenergi

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

$$\left(jmf. \;\; K = \frac{1}{2} m v^2\right)$$

RÖRELSEENERGIN FÖR EN KROPP I BÅDE ROTATIONSRÖRELSE OCH TRANSLATORISK RÖRELSE

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$$

$$v_i' = r_i \omega$$

Partikel *i*:s rörelseenergi:

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') \\ &= \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM} \end{aligned}$$

Kroppens totala rörelseenergi:

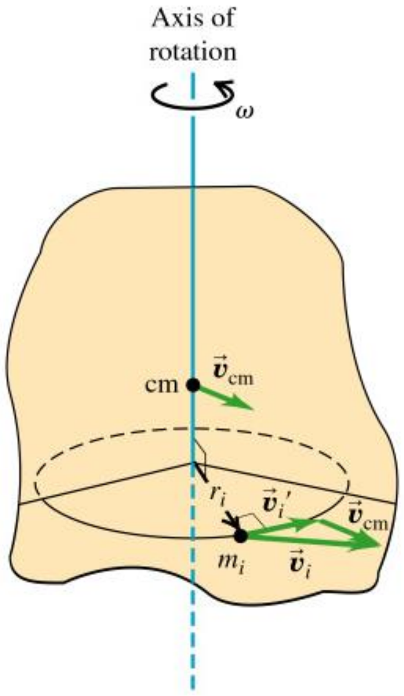
$$K = \sum K_i = \underbrace{\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \right) v_{CM}^2}_{\frac{1}{2} M v_{CM}^2} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i R_i'^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2} + \sum_i m_i \mathbf{v}_\mathbf{i}' \cdot \mathbf{v}_{CM}$$

$$\frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$$\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i R_i'^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_\mathbf{i}' \cdot \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v}_{CM} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_\mathbf{i}' = M \mathbf{v}_{CM} \cdot \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_\mathbf{i}'}{M} = 0$$

CM:s hastighet i förhållande till *CM*



Velocity $\vec{v}_i$ of particle in rotating, translating rigid body = (velocity $\vec{v}_{cm}$ of center of mass) plus (particle's velocity $\vec{v}_i'$ relative to center of mass)

$$\boxed{K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}$$

Translation + Rotation

Rotation

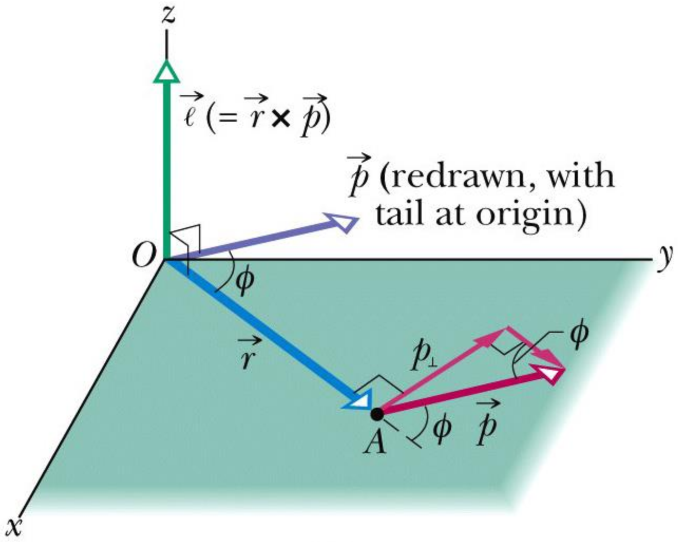
- Rörelsemängdsmoment (impulsmoment)
- Rörelsemängdsmomentets bevarande
- Jämvikt och jämviktsvillkor

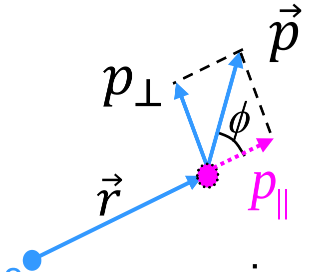
RÖRELSEMÄNGDSMOMENT

Definition: Rörelsemängdsmomentet kring O

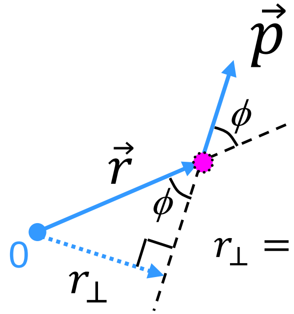
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad l = rp\sin\varphi = r_\perp p = rp_\perp \qquad \text{Enhet} \quad [\vec{l}\,] = 1\ \text{kg}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$



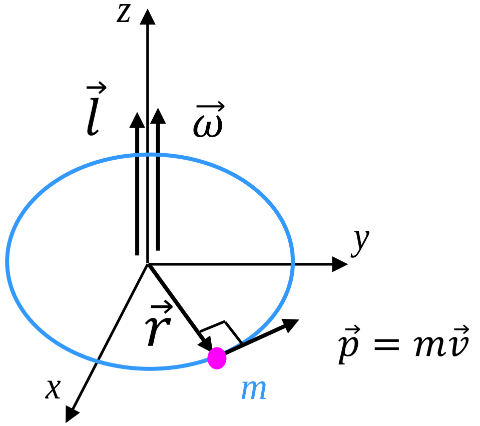


$p_\perp = p\sin\varphi$



$r_\perp = r\sin\varphi$

Exempel: En partikel i cirkelrörelse (xy-planet)



$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = mrv\sin 90\,\hat{k}$$

$$= mrv\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k} = \frac{v}{r}\hat{k}$$

$$\Rightarrow\ \vec{l} = mr^2\vec{\omega} = I_z\vec{\omega}$$

Tröghetsmoment

$$(\text{jmf. } \vec{p} = m\vec{v})$$

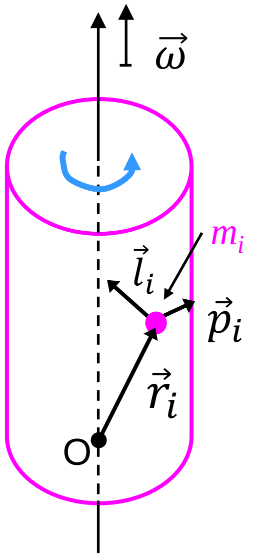
Rörelsemängdsmomentet för ett partikelsystem

Det totala rörelsemängdsmomentet för ett system av partiklar

$$\boxed{\vec{L} = \sum \vec{l}_i}$$

vektorsumma

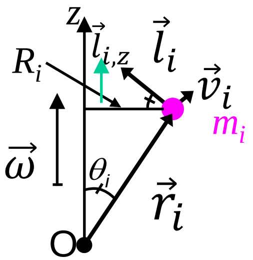
Rörelsemängdsmomentet för en stel kropp

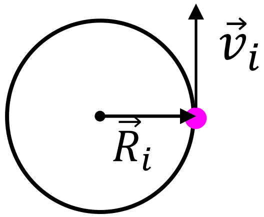


rotationsaxel $\equiv z$–axeln
vinkelhastighet $\vec{\omega} = \omega_z \hat{k}$
Origo på z–axeln

$\vec{l}_i$ pekar mot axeln!

partikel *i*: $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$





$$\left|\vec{l}_i\right| = l_i = m_i r_i v_i \sin 90$$
$$= m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega_z$$

$\vec{l}_i$:s z-komponent :

$$l_{i,z} = l_i \sin\theta_i = m_i \overbrace{r_i \sin\theta_i}^{R_i} R_i \omega_z$$
$$= m_i R_i^2 \omega_z$$
$$l_{i,z} = I_{zi} \omega_z$$

(jmf. partikeln i cirkelrörelse)

tröghetsmoment

Totala rörelsemängdsmomentet

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$$

$\vec{L}$:s z−komponent

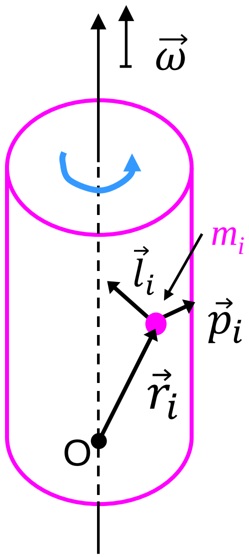
$$L_z = \sum_i l_{iz} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right) \omega_z$$

$$\boxed{L_z = I_z \omega_z}$$

I = tröghetsmomentet i förhållande till z-axeln!

Generellt:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i \neq I\vec{\omega}!$$



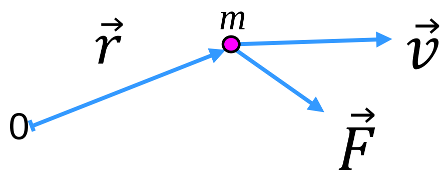
Speciell symmetri:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}; \qquad \vec{L}||\vec{\omega}||\hat{k}$$

(jmf. $\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$)

Rörelsemängdsmomentets bevarande

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\vec{v}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{=\vec{F}} = \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} m + \vec{r} \times F$$

$$\boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}} \quad \left(\text{jmf. } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\right)$$

Integrering: $\displaystyle\int_{\vec{l}_i}^{\vec{l}_f} d\vec{l} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau} dt$

$$\vec{l}_f - \vec{l}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau} dt$$

$$\vec{\tau} = \text{konstant} \Rightarrow \quad \vec{l}_f - \vec{l}_i = \vec{\tau}(t_f - t_i)$$

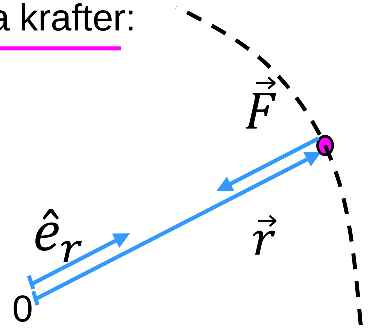
$$\boxed{\left(\text{jmf.} \, \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt \ \text{ impuls} \quad \Rightarrow \vec{l} = \text{"impulsmoment"}\right)}$$

$\vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\vec{l}_f - \vec{l}_i = 0$$

Rörelsemängdsmomentet bevaras!

Centrala krafter:



$$\vec{F} = F(r)\hat{e}_r$$

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF(-\hat{e}_r) \times \hat{e}_r = 0$$

$$\Rightarrow \vec{l}_f = \vec{l}_i$$

$\vec{l}$ bevaras i förhållande till origo

(STATISK) JÄMVIKT

Definition: I en stel kropp förblir avståndet mellan två godtyckliga punkter konstant

Jämvikt hos en stel kropp
= kroppen är i vila i ett inertialsystem

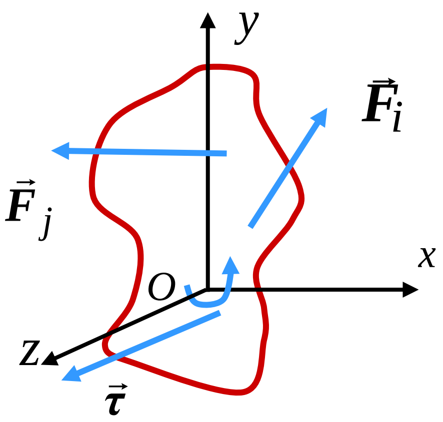
$$\boxed{\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= 0 \\ \sum \vec{\tau}_{ext} &= 0 \end{aligned}}$$

Kartesiska koordinater:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i \tau_{ix} = 0$$
$$\sum_i F_{iy} = 0 \qquad \sum_i \tau_{iy} = 0$$
$$\sum_i F_{iz} = 0 \qquad \sum_i \tau_{iz} = 0$$

Sex ekvationer

Ex. Alla krafter i samma plan



$F_z = 0 \Rightarrow$

$\bar{\tau}_i = \tau_{iz}\hat{\mathbf{k}}$

$$\sum_i F_x = 0$$
$$\sum_i F_y = 0$$
$$\sum_i \tau_z = 0$$

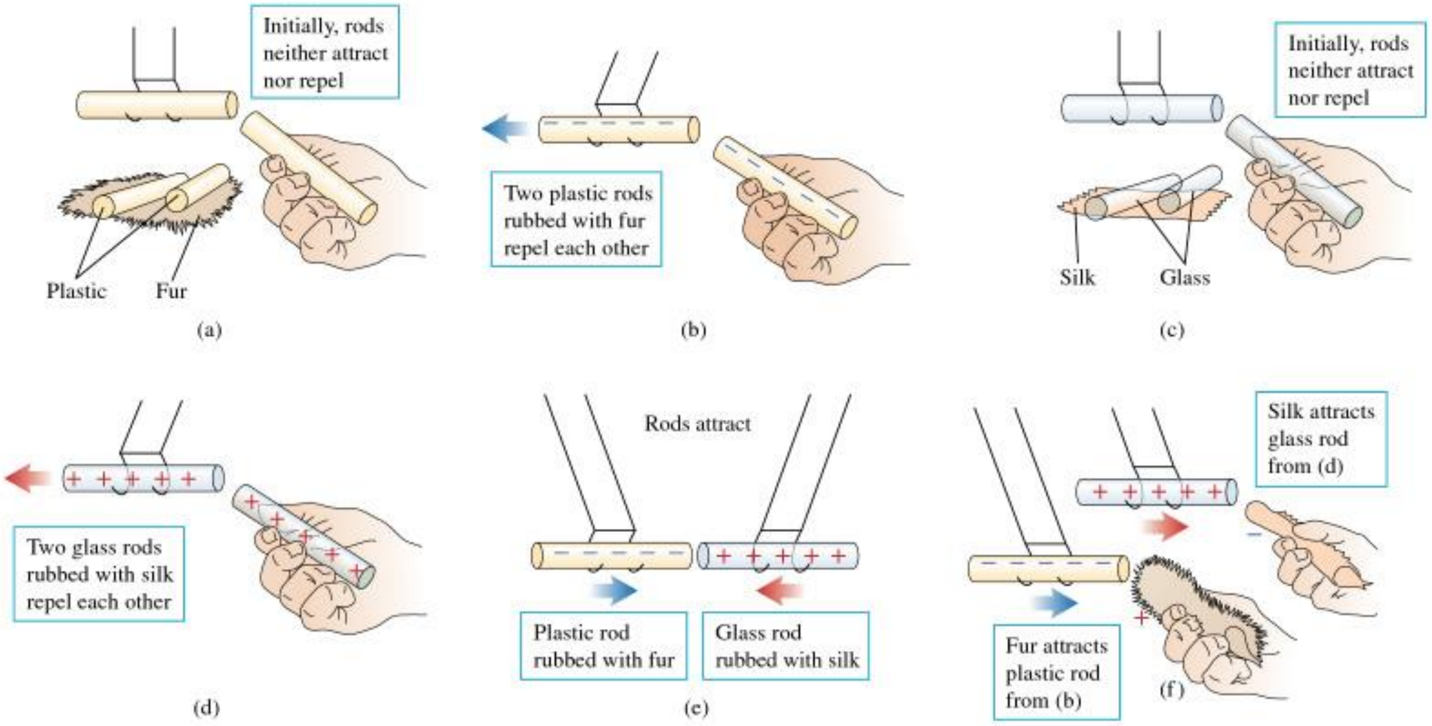
Max. tre ekvationer

Elfältet

- Elektrisk laddning, laddningens bevarande
- Ledare och isolatorer
- Influens

Elektrisk laddning och laddningens bevarande

- Om man först gnuggar en glasstav med en bit silke och därefter gnuggar en annan glasstav med silke, märker man att dessa två glasstaver kommer att repellera varandra.
- Samma effekt kan fås om man gnuggar två plaststavar med en bit päls.
- Om man däremot för en gnuggad plaststav nära en gnuggad glasstav märker man att dessa attraherar varandra.



En modell för elektriska effekter:

- Materia innehåller två typer av elektriska laddningar, positiva och negativa. Neutrala objekt har lika många av vardera typen.
- Kroppar med samma typs laddning repellerar varandra.
- Kroppar med olika typs laddning attraherar varandra.

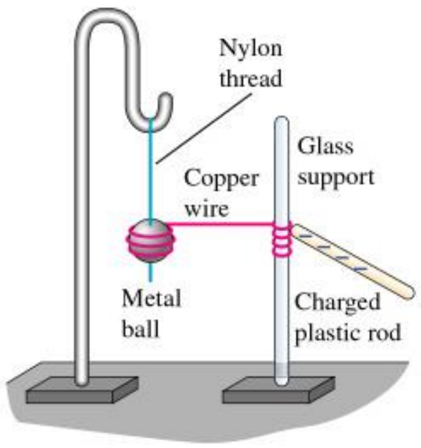
Atomstrukturen

- En liten kärna (~10^{-15} m) omges av ett elektronmoln (diameter ~ 10^{-10} m).
- Kärnan består av laddade protoner och neutrala neutroner.
- Elektronerna har lika stor laddning som protonerna, men laddningen har motsatt tecken. Teckenkonventionen är att elektroner har negativ laddning och protoner positiv.
- Protoner och neutroner har ungefär samma massa. Elektronens massa är ungefär 2000 gånger mindre än protonens och neutronens massa.
- Elektrisk laddning är en kvantiserad storhet. Minsta laddningen är elementarladdningen, elektronens och protonens laddning.

Princip:	**I ett slutet system bevaras laddningen i alla processer**

Ledare, isolatorer och influens

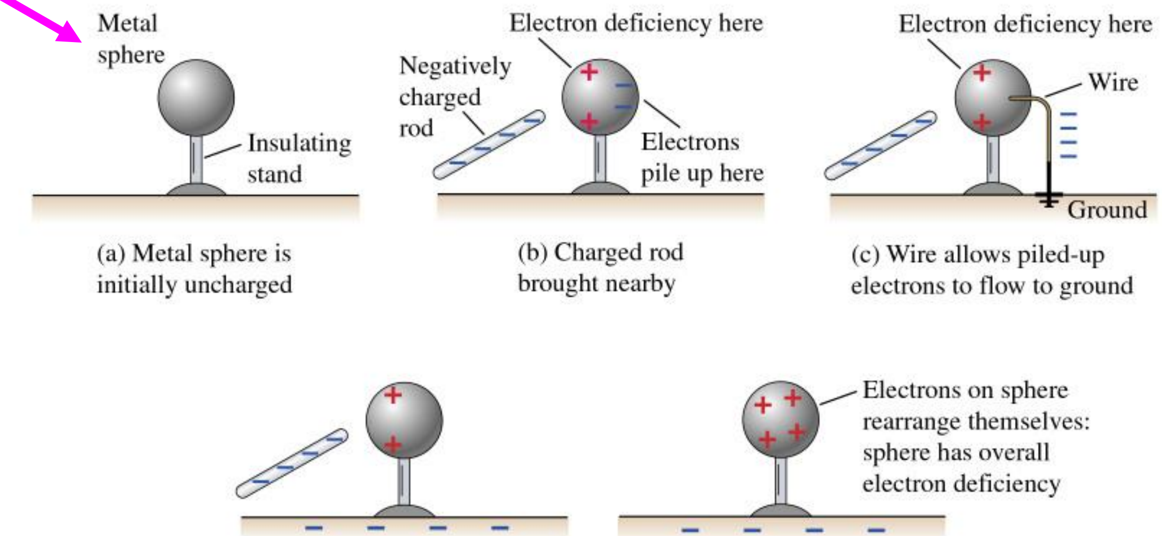
- En ledare är ett ämne som enkelt tillåter laddningar att strömma igenom det, t.ex. metall.
- En isolator är ett ämne som inte tillåter att laddningar strömmar igenom det.



(a)

En ledare kan laddas antingen genom att man rör vid ledaren med ett elektriskt laddat objekt,

eller med hjälp av influens fenomenet:



(a) Metal sphere is initially uncharged

(b) Charged rod brought nearby

(c) Wire allows piled-up electrons to flow to ground

(d) Wire is disconnected from sphere

(e) Charged rod is removed

Elfältet

- Coulombs lag och det elektriska fältet
- Elektriska fältlinjer
- Den elektriska dipolen

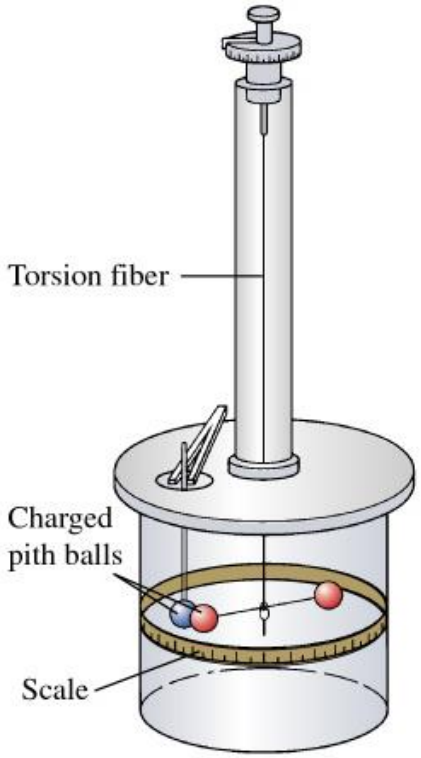
Coulombs lag

Kraften med vilken stillastående laddade partiklar påverkar varandra bestämdes experimentellt av Charles-Augustin de Coulomb (1784).

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}}$$

Coulombs lag

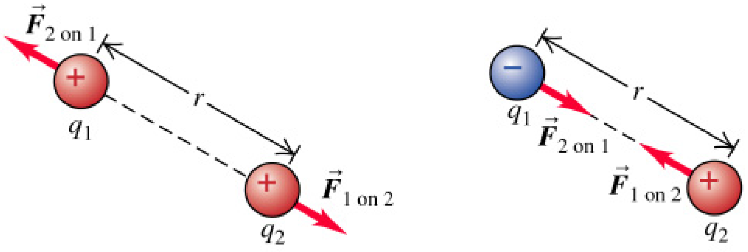
$[q]$ = coulomb (C)



Kraften F proportionell mot $1/r^2$
(jmf. Newtons gravitationslag)

- lika laddningar repellerar varandra
- olika laddningar attraherar varandra

Elektrostatiska kraften = vektorstorhet
Newtons tredje lag om växelverkan gäller.



Proportionalitetskonstanten ε_0 permittiviteten i vakuum.

ε_0= 8,854×10^{-12} C^2/Nm^2 => $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^9\ Nm^2/C^2$

Elementarladdningen har värdet e =1,6020710 × 10^{-19} C.

Flera laddningar => superpositionsprincipen

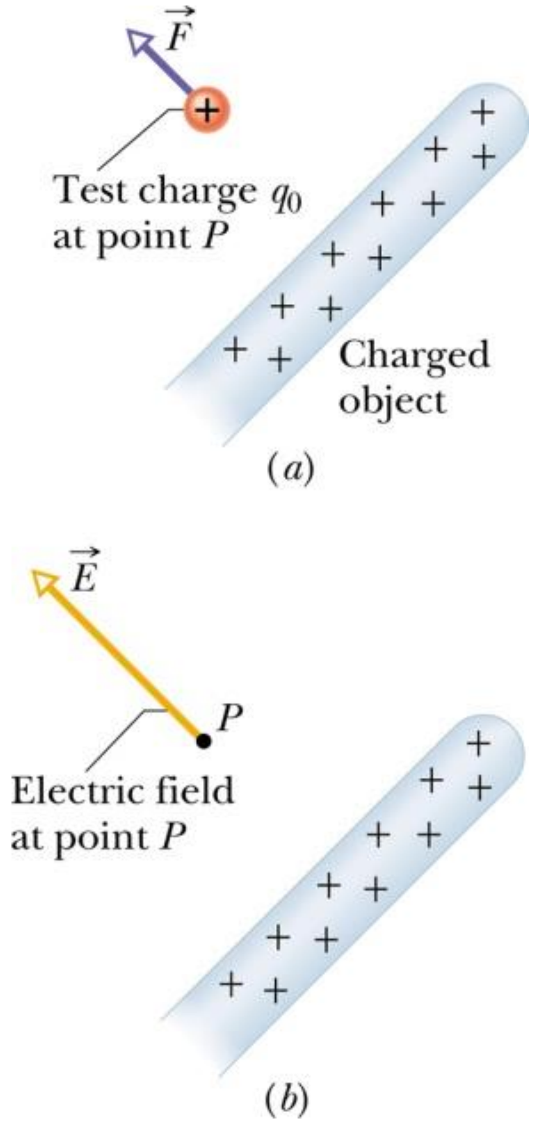
Elektriska fält

Ett fält är en storhet som associeras med läge, t.ex. temperaturen i varje punkt av ett rum $T(x,y,z)$ (skalärfält)

Elfältet i punkten P = Kraften med vilken laddningsfördelningen påverkar testpartikeln, dividerat med testpartikelns laddning.

Elfältet = **vektorfält**
enhet = N/C (eller V/m)

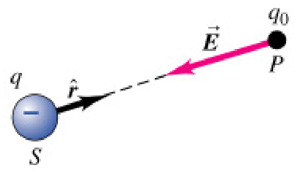
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

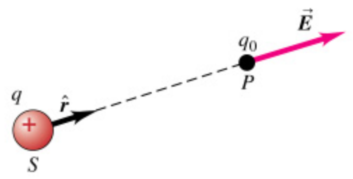


Elfältet från en punktladdning

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q_0}{r^2}\hat{r} \quad => \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Elfältet pekar mot en negativ laddning och från en positiv laddning

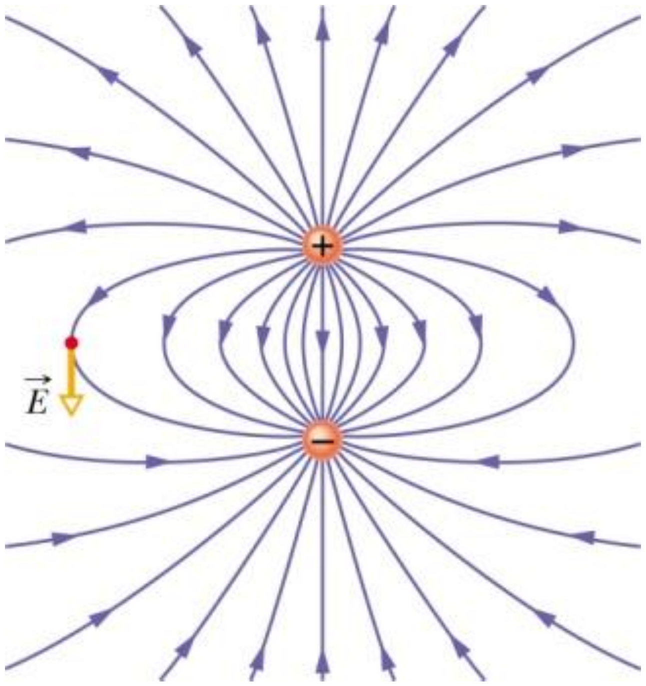


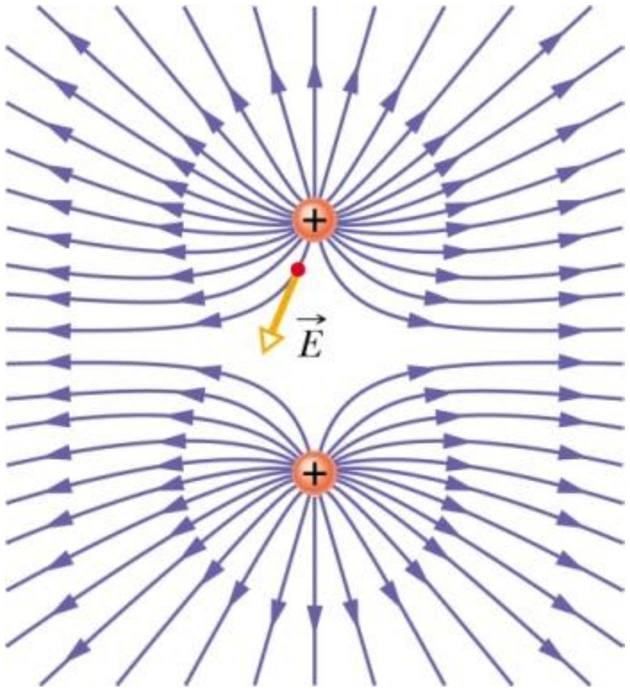


Superpositionprincipen gäller för diskreta laddningsfördelningar

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i}$$

Elektriska fältlinjer

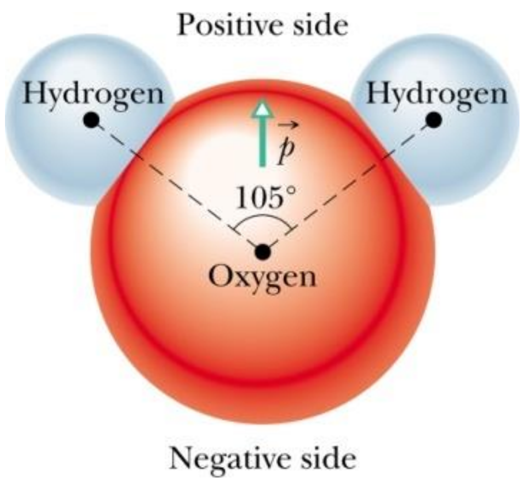




- Fältlinjer är ett sätt att visualisera elfältet
- Fältlinjens riktning ger elfältets riktning i en viss punkt
- Fältlinjerans densitet är ett mått på elfältets styrka

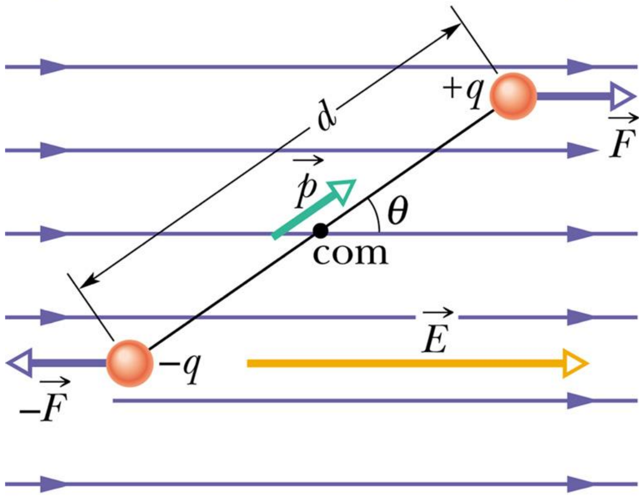
Den elektriska dipolen

- Vanligt förekommande laddningsfördelning



t.ex. vattenmolekylen H_2O

Den elektriska dipolen i ett elfält



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \tau = rF_{\perp} = rF\sin\theta = r_{\perp}F$$

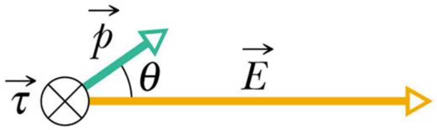
$$\tau = (d\sin\theta)(qE)$$

Dipolmomentet $p = qd$ =>

$$\tau = pE\sin\theta$$

=>

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$



Elektriska energistorheter

- Arbetet som elfältet utför
- Elektrisk potentialenergi

Elektrisk potentialenergi

Arbetet längs en cirkulär bana i fältet från en punktladdning

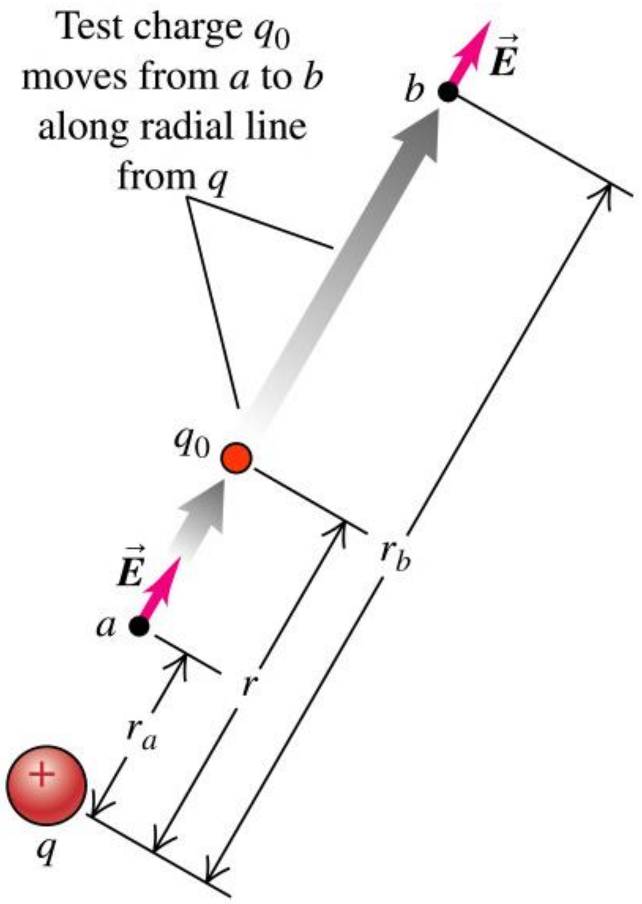
$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

då $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E\, dl \cos 90^\circ = 0$

Gäller också en godtycklig bana på en sfärisk yta.

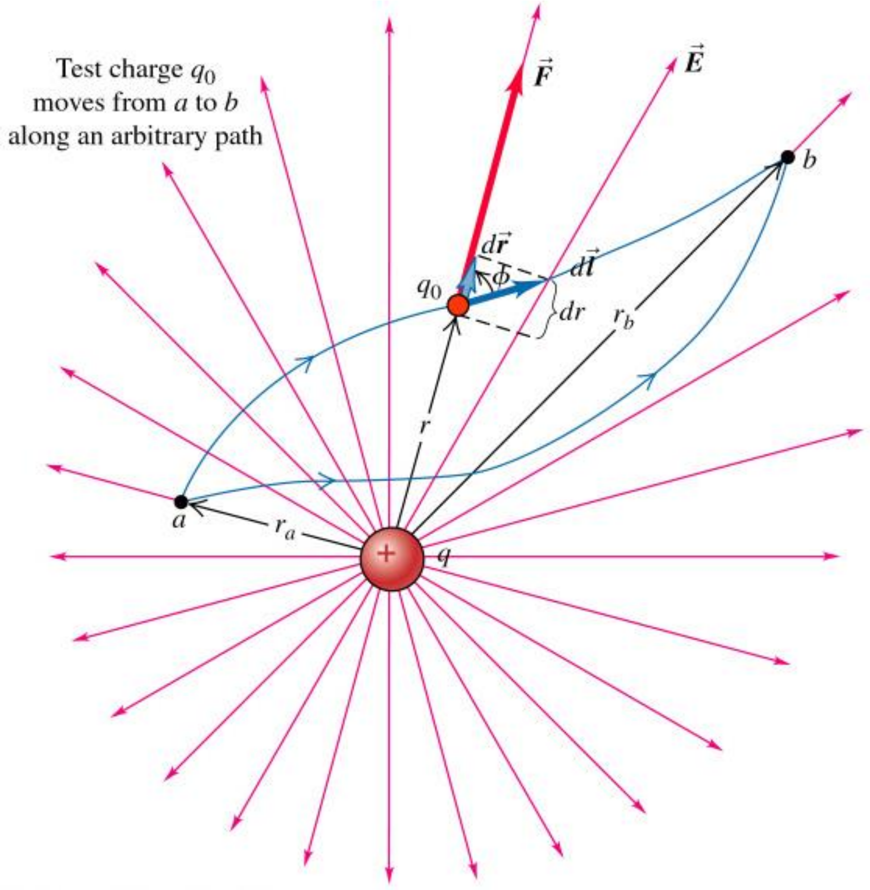
Arbetet längs en radiell bana i fältet från en punktladdning

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \right) \cdot (dr\hat{r}) \\ &= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \Big/_{r_a}^{r_b} \left(-\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \end{aligned}$$



Arbetet längs en godtycklig bana i fältet från en punktladdning

$$\boxed{W = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)}$$



Elektriska kraften är konservativ, då arbetet inte beror av banan!

=> Elektrisk potentialenergi

$$U_b - U_a = -W = -\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$U_b - U_a = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

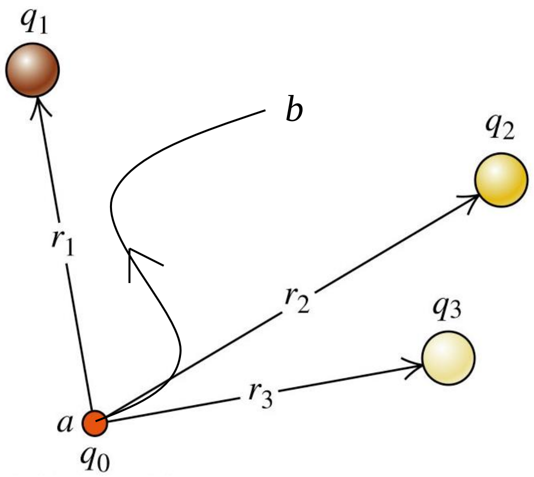
Sätter elektriska potentialen till noll oändligt långt
borta från punktladdningen:

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{U(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Elektrisk potentialenergi i fältet från flera laddningar

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = q_0(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3)$$



$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} \\ &= \int_a^b q_0(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3)\cdot d\vec{l} \\ &= q_0\left[\int_a^b \vec{E}_1\cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_3\cdot d\vec{l}\right] \end{aligned}$$

Kraften konservativ $\Longrightarrow$ $U = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{r_1} + \dfrac{q_2}{r_2} + \dfrac{q_3}{r_3}\right)$

Allmänt $\boxed{U = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum \dfrac{q_i}{r_i}}$

Elektriska energistorheter

- Elektrisk potential
- Ekvipotentialytor

Elektrisk potential

Definition $\boxed{V = \frac{U}{q_0}}$ Enhet: J/C eller volt (V)

Potentialen från punktladdningar $\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}}$

Potentialen från kontinuerliga laddningsfördelningar

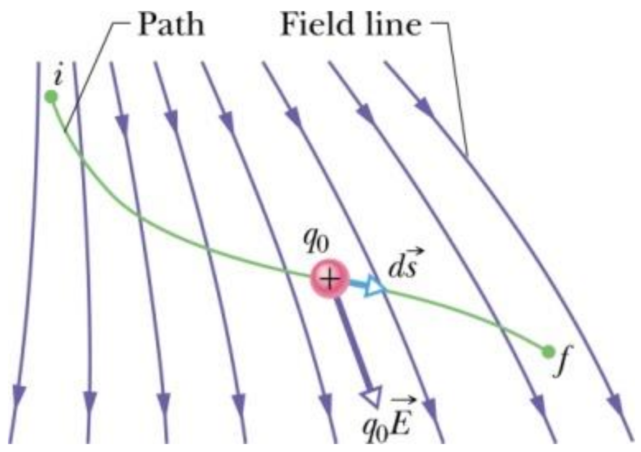
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{\substack{N \to \infty \\ q_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

Elektriska potentialen med hjälp av elfältet

$$U_f - U_i = -W = -\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

V minskar i elfältets riktning



Notera, från definitionen på elektrisk potential:

$[U]=[q][V]$ => energienheten eV

Beräkning av fältet från potentialen

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

väljer $a=(x,y,z)$ och $b=(x+\Delta x,y,z)$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}) \cdot (dx'\hat{i}) = E_x dx'$$

och

$$V(x+\Delta x,y,z) - V(x,y,z) = -\int_x^{x+\Delta x} E_x dx'$$

då Δx litet är $E_x \approx$ *konstant* inom integrationsintervallet

$$-E_x \int_x^{x+\Delta x} dx' = E_x\left[(x+\Delta x) - x\right] = -E_x \Delta x$$

dvs.

$$V(x+\Delta x,y,z) - V(x,y,z) \approx -E_x \Delta x \quad \Rightarrow$$

$$V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z) \approx -E_x \Delta x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} \right] = -E_x$$

Definitionen för partialderivatan av V med avseende på x!

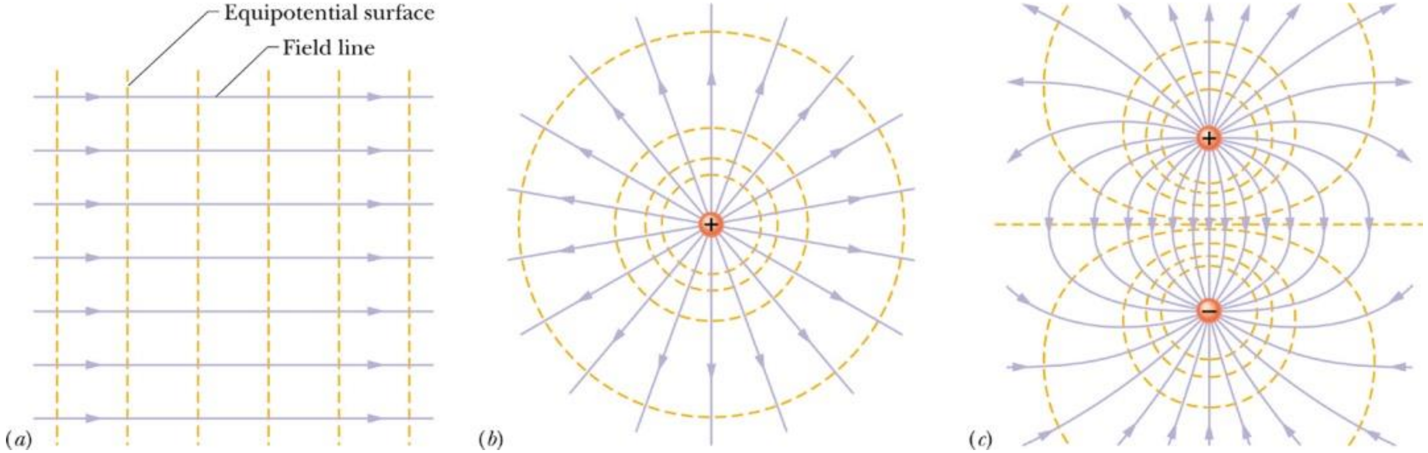
$$\Rightarrow$$

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

Då elfältet är radiellt riktat reduceras detta till:

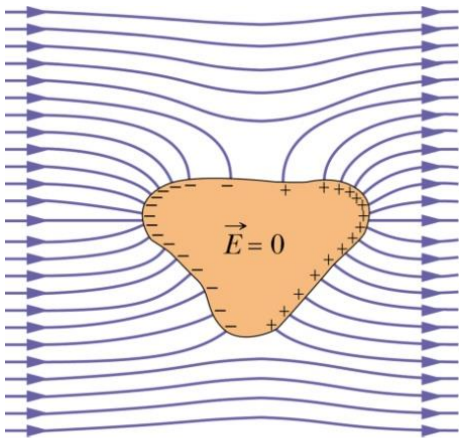
$$\boxed{E_r = -\frac{dV}{dr}}$$

Ekvipotentialytor



- En ekvipotentialyta är en yta på vilken potentialen är konstant.
- Inget arbete utförs av en elektrisk kraft då en laddad partikel förskjuts över en ekvipotentialyta

$\boxed{\text{Ekvipotentialyta} \perp \text{fältlinje}}$ $\Rightarrow$



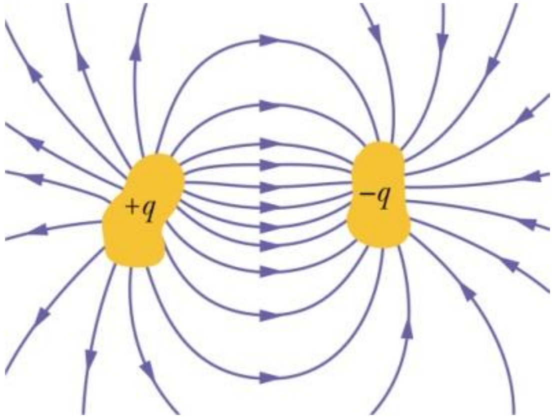
- Vid statiska förhållanden är en ledares yta en ekvipotentialyta.

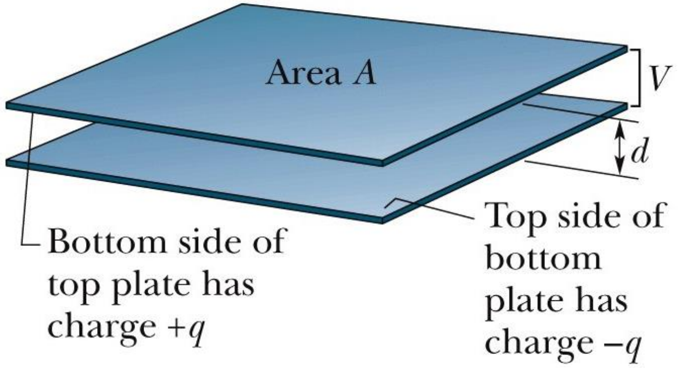
Kondensatorn och motståndet

- Kapacitans
- Skivkondensatorn
- Koppling av kondensatorer
- Energin i en laddad kondensator

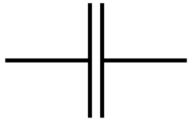
KAPACITANS

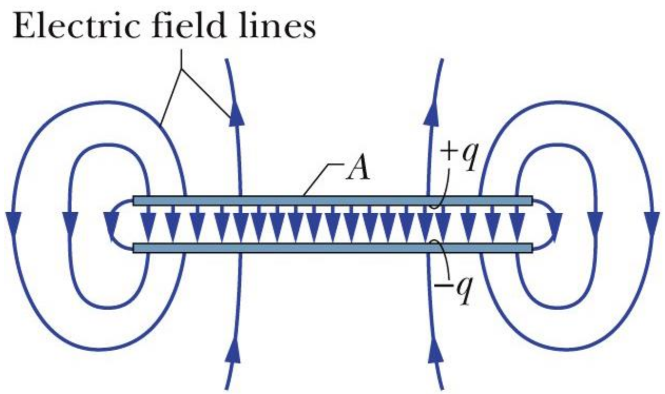
En kondensator är en komponent som består av två ledare som befinner sig nära varandra, men som är isolerade från varandra.





symbol i elektriska kretsar





Förhållandet mellan kondensatorskivornas laddning och deras potentialskillnad kommer att vara konstant

Definitionen på kapacitans

Enhet $[C] = 1\ \mathrm{C/V} = 1\ \mathrm{F}$ (farad)

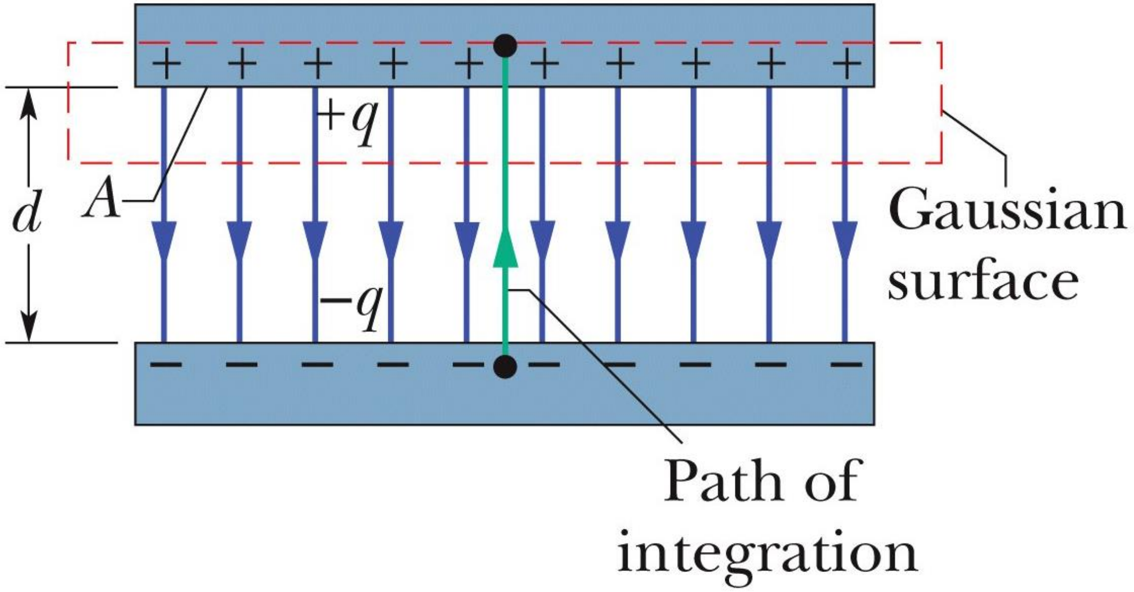
$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

Kapacitansen för en skivkondensator

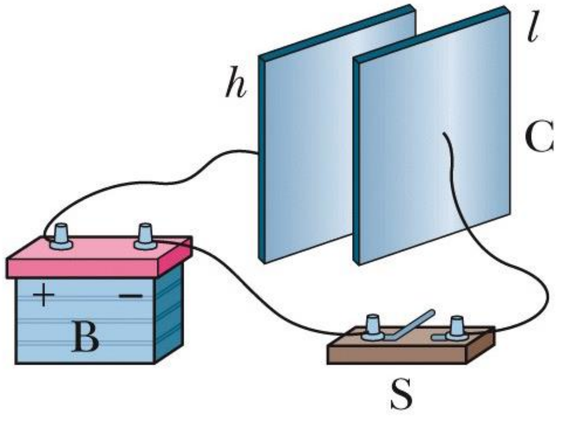
Elfältet mellan skivorna $$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

Potentialskillnaden (elfältet homogent) $$V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

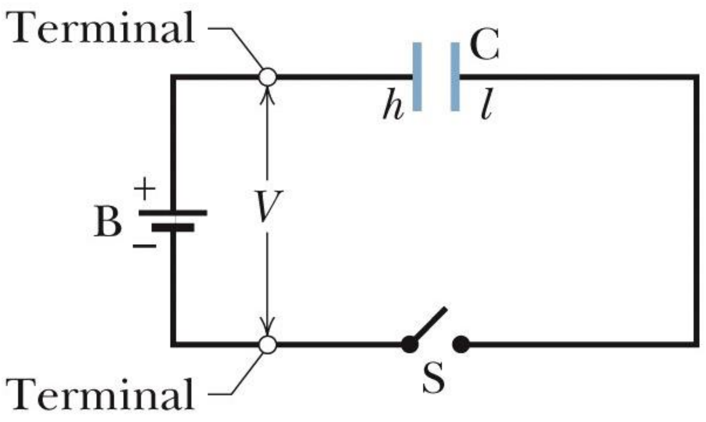
Kapacitansen $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Qd/\varepsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$



Koppling av en kondensator



(a)

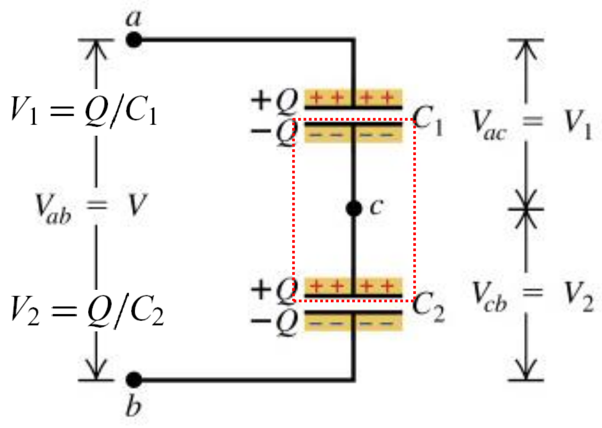


(b)

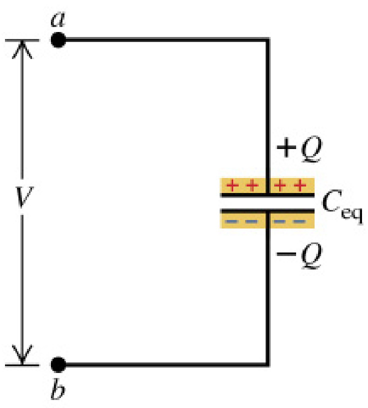
- Då brytaren S sluts börjar batteriet transportera laddning från kondensatorns ena skiva till den andra.
- Potentialskillnaden mellan skivorna ökar ända tills den är lika stor som batteriets polspänning.
- Energi lagras i den uppladdade kondensatorn.
  - Laddningsbärarnas potentialenergi ökar.

Seriekoppling av kondensatorer

Kondensatorer i serie   Varje kondensator har samma laddning!



$\Rightarrow$



Allmän princip: **Potentialskillnaden över ett antal elektriska komponenter i serie är lika med summan av potentialskillnaderna över de enskilda komponenterna.**

För att **en** kondensator skall ge samma effekt

$$C_{12} = \frac{Q}{V} \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{Q}{C_{12}}$$

då $V = V_1 + V_2$ är

$$\frac{Q}{C_{12}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Longrightarrow$$

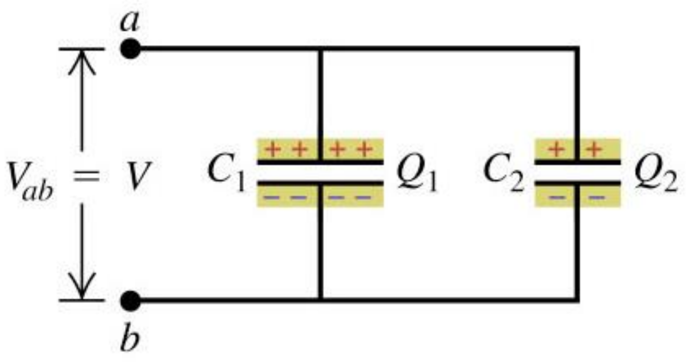
$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Allmänt: $$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$ (kondensatorer i serie)

Parallellkoppling av kondensatorer

Allmän princip:

$$\boxed{\text{Potentialskillnaden över komponenter kopplade parallellt är den samma.}}$$



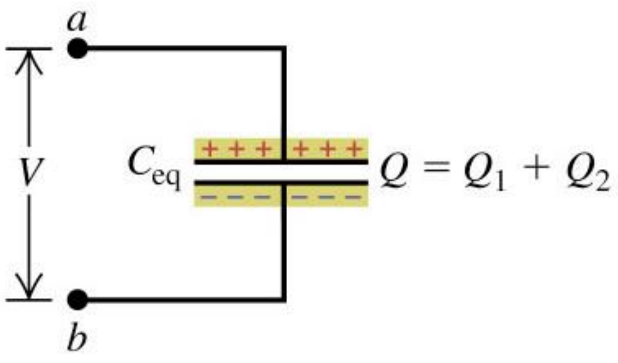
(a)

För att **en** kondensator skall ge samma effekt

$Q = Q_1 + Q_2$ och $V = V_{ab}$ $\Rightarrow$

$$C_{12} = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} \Rightarrow$$

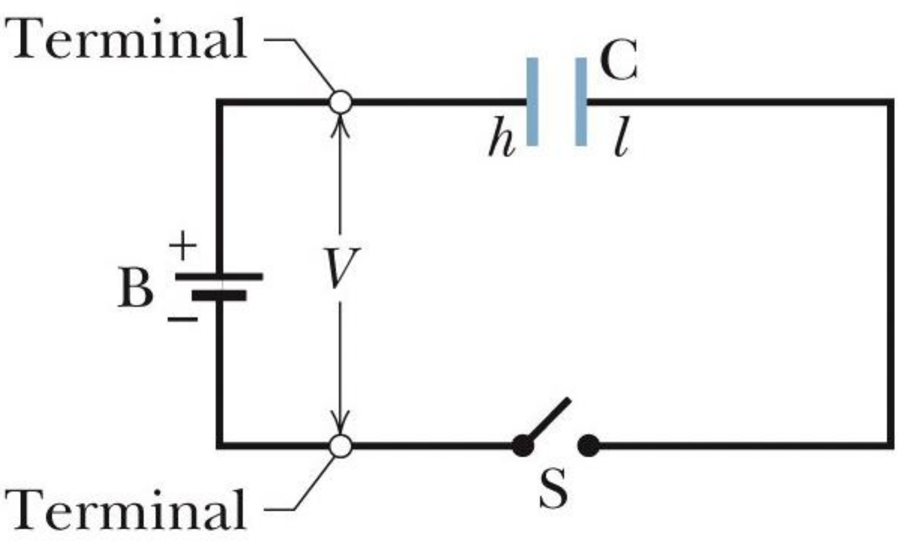
$$C_{12} = C_1 + C_2$$



(b)

Allmänt: $\boxed{C_{eq} = \sum_i C_i}$ (kondensatorer parallellt)

Energin i en laddad kondensator



Ett batteri laddar upp en kondensator:

- Arbete utförs då laddningsbärare förflyttas från en av kondensatorns skivor till den andra. $\Longrightarrow$

Laddningsbärarna erhåller potentialenergi $\Longrightarrow$

Potentialenergin lagras i kondensatorn.

U = kondensatorns energi då den uppladdats till en slutlig laddning Q och slutlig potentialskillnad V.

U', Q' och V' = motsvarande storheter under uppladdningsprocessen.

Enligt definitionen för elektrisk potential: $V = \dfrac{U}{q_0}$

$$dU' = V'\,dQ'$$

Kondensatorn laddas upp $\Longrightarrow U = \int_0^Q V'\,dQ' \Longrightarrow U = \int_0^Q \frac{Q'}{C}\,dQ' = \frac{1}{C}\int_0^Q Q'\,dQ' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \boxed{U = \frac{Q^2}{2C} \qquad U = \frac{CV^2}{2} \qquad U = \frac{QV}{2}}$$

Kondensatorn och motståndet

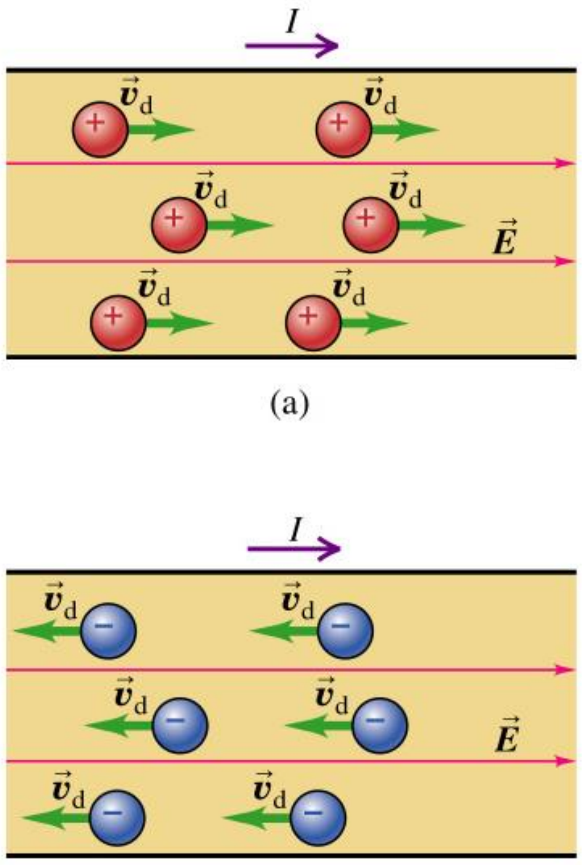
- Elektrisk ström
- Resistans
- Ohms lag
- Koppling av motstånd
- Elektrisk effekt
- Källspänning

Elektrisk ström

Elektrisk ström I definieras som laddningen, som passerar genom en yta A per tidsenhet.

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

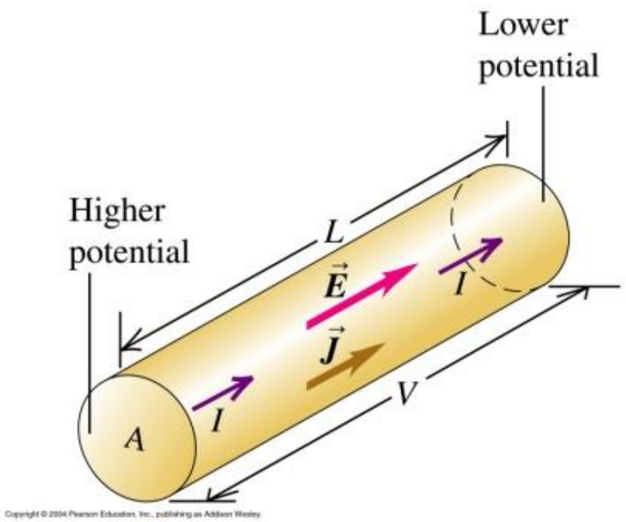
Strömmen är en skalär, men har riktning



Enhet: $[I] = [Q]/[t] = \mathrm{C/s} = \mathrm{A}$ (Ampere)

Resistans, Ohms lag

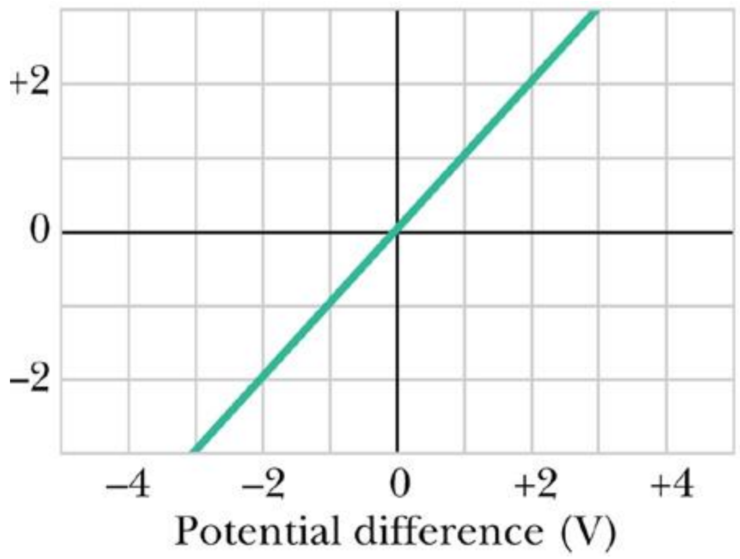
Om en potentialskillnad existerar över en ledare kommer en ström att gå genom ledaren.



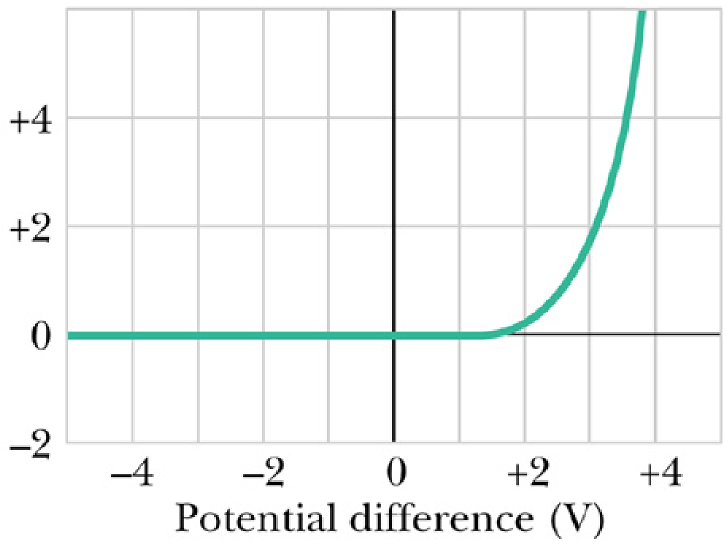
$$R = \rho \frac{L}{A}$$

ρ = resistivitet

Ohmisk



icke - Ohmisk



Potentialskillnaden som krävs för att producera en viss ström beror på ledarens resistans R.

Definition:

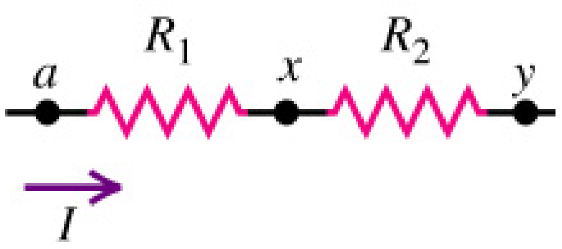
$$\boxed{R = \frac{V}{I}} \qquad \boxed{V = IR}$$

Ohms lag

Enhet: $[R] = [V]/[I] = \mathrm{V/A} = \Omega$ (Ohm)

Koppling av motstånd

Seriekopplade motstånd



Ekvivalent resistans: En motståndskombination ersätts med ett motstånd genom vilken samma ström går med samma potentialskillnad som för motståndskombinationen.

Potentialen över kombinationen av motstånd i serie är lika med summan av potentialerna över varje enskilt motstånd.

eller $V = V_1 + V_2 \quad \Rightarrow V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \Rightarrow \quad R_{12} = \frac{V}{I} = R_1 + R_2$

Allmänt $$\boxed{R_{eq} = \sum_i R_i}$$

Parallellkopplade motstånd

Samma potentialskillnaden över de tre motstånden.

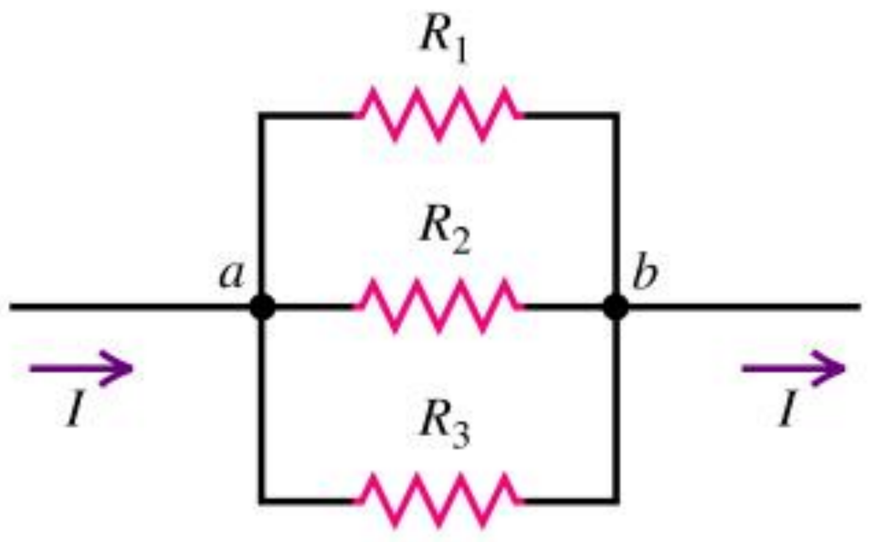
För strömmen gäller:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow$$

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{I}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Allmänt $$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}}$$



Effekt i elektriska kretsar

Ett godtyckligt kretselement:

Laddning genom elementet per tidsenhet: $dQ = I\,dt$

Förändringen i potentialenergi för laddningarna: $V\,dQ = VI\,dt$

$\Rightarrow \boxed{P = IV}$ Effekten med vilken energi tas från eller ges till ett godtyckligt kretselement

Effektförlusten i ett motstånd

$P_R = VI$ + Ohms lag

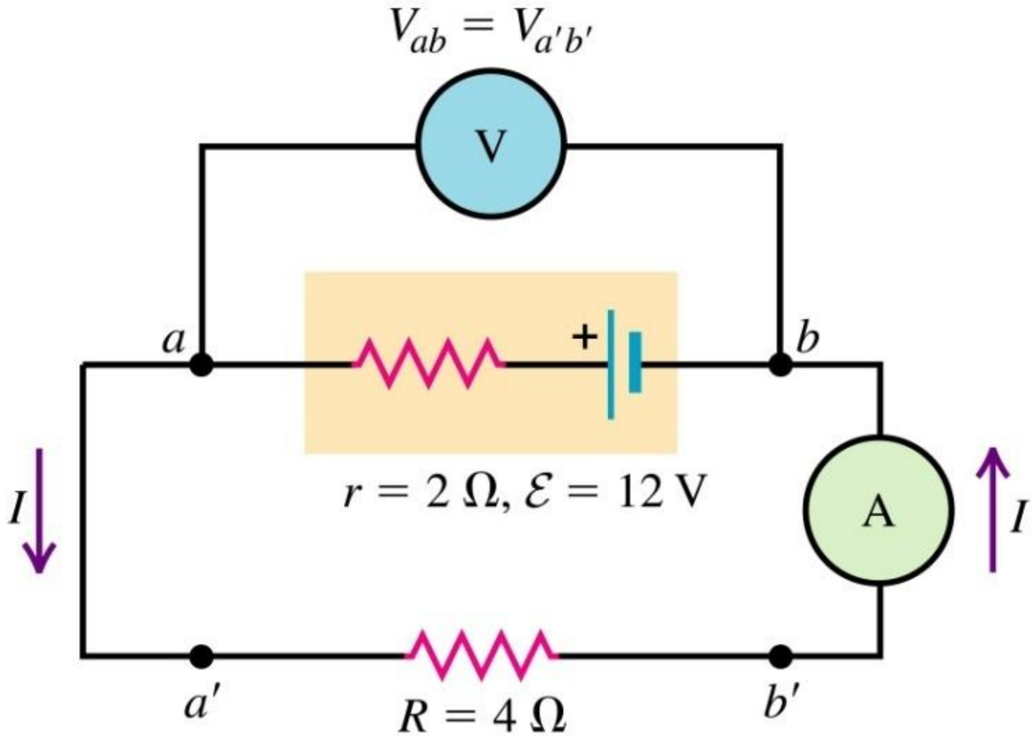
$$\boxed{P_R = I^2 R \quad P_R = \frac{V^2}{R}}$$

- Laddningsbärarna förlorar energi i motståndet
- Energin omvandlas till värmeenergi

Källspänning

För att det i en elektrisk krets ska gå en kontinuerlig ström, måste kretsen innehålla ett element som fungerar som källa till elektrisk energi, en källspänning eller en elektromotorisk kraft (emk).

Ex.: Batteri, generator, solcell, termopar ...



Då ett batteri kopplas till en kondensator förflyttas laddningsbärare från den ena kondensatorskivan till den andra.

Då ett batteri kopplas till ett motstånd går en ström genom kretsen.

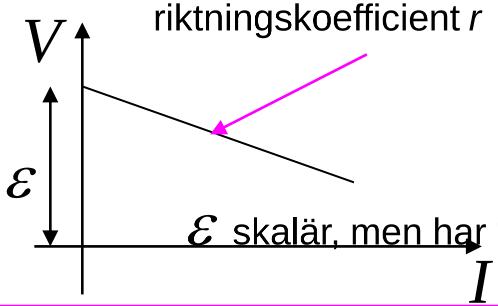
Källspänning och inre resistans

Spänningsmätaren (V) och amperemätaren (A) ger följande samband:

riktningskoefficient *r*

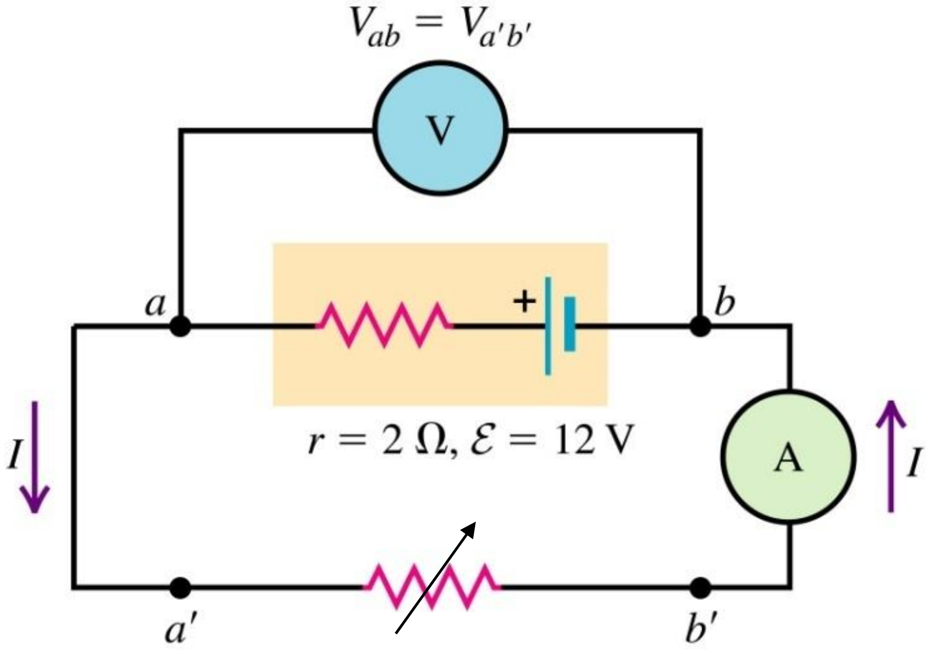
$$\boxed{V = \mathcal{E} - Ir}$$

Polspänningen



$\mathcal{E}$ skalär, men har “riktning”: från - till +

Källspänningen är den elektriska potentialenergin per laddningsehet som ges åt laddningsbärarna av icke elektrostatiska krafter i batteriet.

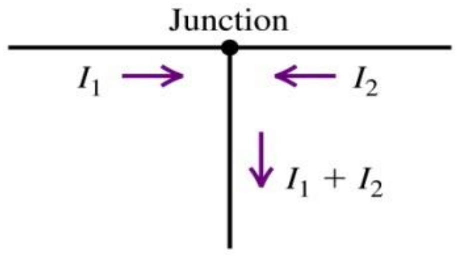


Strömskretsar

- Kirchhoff I och II
- Applikation av Kirhchoffs lagar: RC-kretsar

Kirchhoffs lagar

Kirchhoffs första lag



Summan av de strömmar som kommer in till en förgreningspunkt är lika med summan av de strömmar som går ut ur förgreningspunkten.

eller $\sum i_{in} = \sum i_{ut}$

i betecknar en ström som kan vara positiv eller negativ.

Kirchhoff I bygger på att elektrisk laddning bevaras.

Kirchhoffs andra lag

Summan av potentialskillnaderna i en sluten strömslinga är noll, eller $\sum V = 0$

Kirchhoffs II är en följd av energins bevarande eftersom den elektriska potentialen är direkt relaterad till laddningsbärarnas potentialenergi.

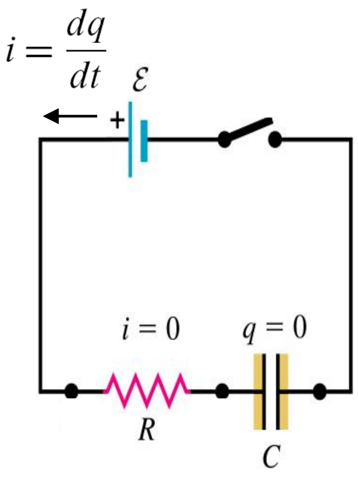
Teckenkonventioner:

1. Om vi passerar en strömkälla i riktningen från - till + polen tas källspänningen som positiv, i motsatt riktning som negativ.
2. Om vi passerar ett motstånd i strömmens riktning tas potentialskillnaden över motståndet som $V=-iR$. Om vi passerar ett motstånd i motsatt riktning mot strömmen tas potentialskillnaden som $V=+iR$.

RC-kretsar

Uppladdning av en kondensator

Kondensatorn oladdad í början. Då brytaren sluts börjar batteriet flytta laddning från kondensatorns ena skiva till den andra.



Kirchhoff II motsols ger

$$(\mathcal{E}) + (-iR) + \left(-\frac{q}{C}\right) = 0$$

$$(\mathcal{E}) - R\left(\frac{dq}{dt}\right) - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{-dq}{\mathcal{E}C - q} = -\frac{1}{RC}dt$$

betecknar: $\boxed{\begin{aligned} u &= \mathcal{E}C - q \\ du &= -dq \end{aligned}}$ differentialekvation av första ordningen => lösning genom integration

$$\frac{du}{u} = \frac{-1}{RC}\,dt \Longrightarrow$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-1}{RC}\,dt \Longrightarrow$$

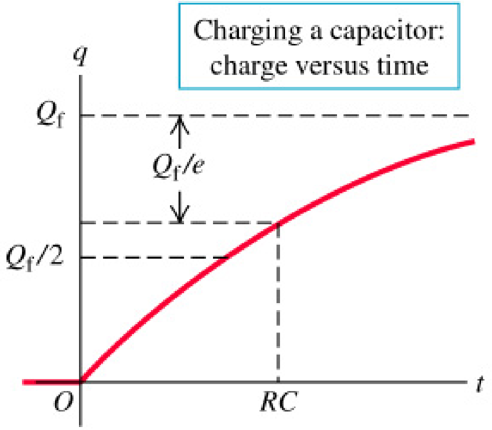
$$\ln u = -\frac{t}{RC} \Longrightarrow$$

$$\ln(\mathcal{E}C - q) = -\frac{t}{RC} + \text{konstant}$$

Integrationskonstanten: $\ln(\mathcal{E}C)$

$$\frac{\mathcal{E}C - q}{\mathcal{E}C} = \mathrm{e}^{-t/RC}$$

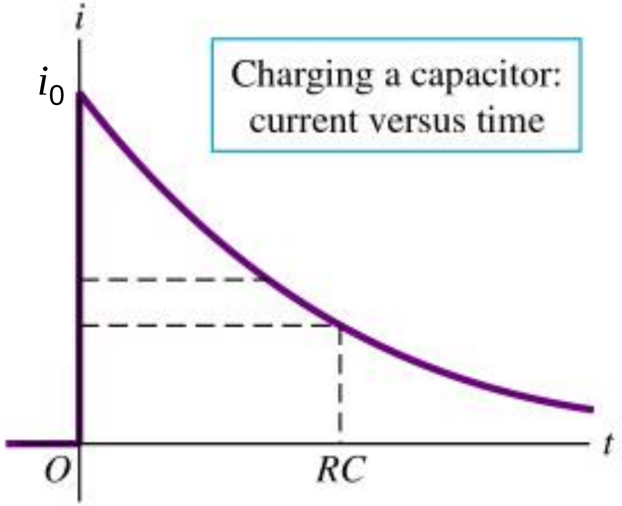
$$\boxed{q(t) = \mathcal{E}C(1 - \mathrm{e}^{-t/RC})}$$



Strömmen som tidsderivatan av q

Begynnelsevillkor: $t=0$, $q=0 \Rightarrow$

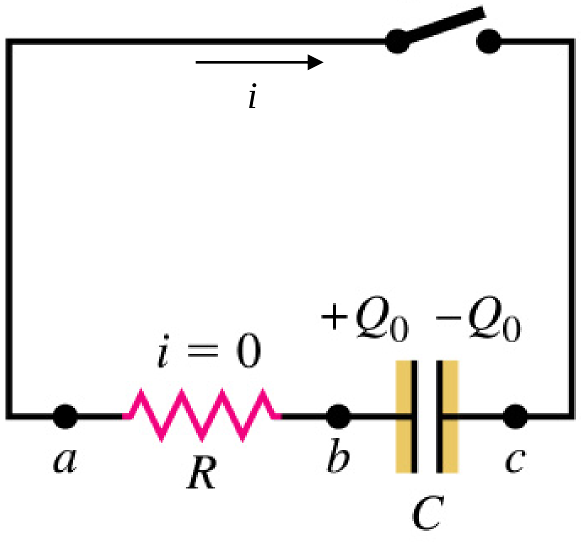
$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R}\mathrm{e}^{-t/RC} = i_0\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$



Faktorn $\tau = RC$ kallas kretsens tidskonstant och bestämmer takten med vilken uppladdningen sker.

Urladdning av en kondensator

En kondensator C kopplas i serie med ett motstånd R. Vid tidpunkten $t=0$ är kondensatorns laddning Q_0 och strömbrytaren är öppen. Då strömbrytaren sluts börjar laddning strömma genom kretsen för att utjämna laddningen på de båda kondensatorskivorna.



Strömmen blir $i=-\dfrac{dq}{dt}$ (laddningen minskar)

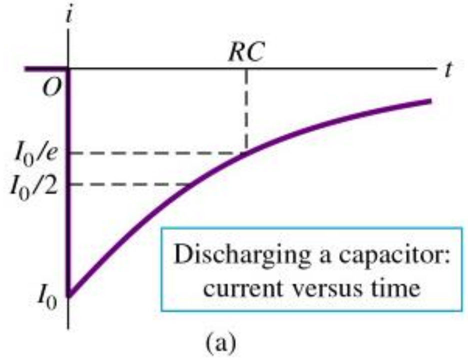
Kirchhoff II medsols

$$-iR+\frac{q}{C}=0 \Rightarrow iR=\frac{q}{C}$$

$$-\frac{dq}{dt}R=\frac{q}{C} \Rightarrow$$

$$\frac{dq}{q}=-\frac{1}{RC}dt \quad \text{integrering} \Rightarrow$$

$$\ln q=-\frac{t}{RC}+\text{konstant}$$



Begynnelsevillkor: $t=0,\ q=Q_0$ $\Rightarrow$

$$\boxed{q(t)=Q_0e^{-t/RC}=Q_0e^{-t/\tau}} \qquad \boxed{i(t)=\frac{V_0}{R}e^{-t/RC}=i_0e^{-t/\tau}}$$