

# PHYS-A1130 Sähkömagnetismi (SCI)

Petri Salo

Kevät 2023, III periodi

Petri.Salo@aalto.fi

<https://mycourses.aalto.fi/>

Kurssikirja: D.C. Giancoli, Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics (4th Edition, Pearson Prentice Hall)

# 1 Johdanto

Fysiikka on *kokeellinen luonnontiede*. Fysiikan tehtävä on

- ▶ havainnoida ja mitata erilaisia luonnonilmiöitä
  - ▶ mittauksen tulee olla deterministinen
  - ▶ mittauksen tulee olla toistettavissa
- ▶ etsiä lainalaisuuksia erilaisten matemaattisten mallien avulla
  - ▶ lineaarinen, polynominen, eksponentiaalinen, logaritminen, trigonometrinen, jne. sovitus
- ▶ luoda näiden pohjalta erilaisia fysiikan teorioita, periaatteita ja säilymlakeja, joiden tulee
  - ▶ olla sopuinnossa kokeellisten mittausten kanssa
  - ▶ antaa ennusteita systeemin käyttäytymisestä erilaisissa olosuhteissa ja tilanteissa
- ▶ testata kokeellisesti fysiikan teorioita
  - ▶ löytää teorian pätevyysalue
  - ▶ luoda uusi teoria vanhan tilalle, jos uudet kokeelliset tulokset eivät ole vanhan teorian kanssa sopuinnossa

# 1 Johdanto

- ▶ Jokaisesta teoriasta pitää kuitenkin tietää, milloin sitä voidaan soveltaa ja milloin ei. Jokaisella teorialla on oma sovellusalueensa, jonka ulkopuolella se ei enää päde. Esimerkiksi
- ▶ Newtonin liikeyhtälö toimii hyvin, kun nopeudet ovat pieniä, mutta suurilla nopeuksilla se ei enää sellaisenaan päde.
- ▶ Kvanttimekaniikassa yksittäinen tapahtuma ei ole deterministinen vaan systeemiä pitää kuvata todennäköisyyksien avulla.
  
- ▶ Tekniikassa tunnettava fysiikan perusteet.
- ▶ Yleissivistys.

# Johdanto ja kertaus

## Suureet ja yksiköt

*Fysikaalinen suure* on kappaleen tai ilmiön *mitattava ominaisuus*.

**Fysikaalinen suure = lukuarvo \* yksikkö (\* suunta).**

Esim. 1 s, 2 m.

Taulukko 1. SI-perussuureet ja -yksiköt

suure	merkintä	yksikkö	merkintä
pituus	$\ell$	metri	m
aika	$t$	sekunti	s
massa	$m$	kilogramma	kg
sähkövirta	$I$	ampeeri	A
lämpötila	$T$	kelvin	K
ainemäärä	$n$	mooli	mol
valovoima	$I$	kandela	cd

Taulukko 2. Johdannaisuureita ja -yksiköitä

suure	merkintä	yksikkö
voima	$F$	$\text{N} = \text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$
energia, työ	$E, W$	$\text{J} = \text{N}\cdot\text{m}$
teho	$P$	$\text{W} = \text{J}/\text{s} = \text{V}\cdot\text{A}$
taajuus	$f$	$\text{Hz} = 1/\text{s}$
sähkövaraus	$Q$	$\text{C} = \text{A}\cdot\text{s}$
jännite	$V$	$\text{V} = \text{J}/\text{C}$
sähkökentän voimakkuus	$E$	$\text{N}/\text{C} = \text{V}/\text{m}$
sähkövuo	$\Phi_E$	$\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$
resistanssi	$R$	$\Omega = \text{V}/\text{A}$
kapasitanssi	$C$	$\text{F} = \text{C}/\text{V}$
magneettivuon tiheys	$B$	$\text{T} = \text{N}/(\text{A}\cdot\text{m})$
magneettivuo	$\Phi_B$	$\text{Wb} = \text{T}\cdot\text{m}^2 = \text{V}\cdot\text{s}$
induktanssi	$L$	$\text{H} = \text{Wb}/\text{A}$

# Johdanto ja kertaus

Paikka  $x$ , nopeus  $v$  ja kiihtyvyys  $a$ :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow x(t) = \int v(t) dt$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow v(t) = \int a(t) dt$$

Tasaisesti kiihtyvä liike ( $a = \text{vakio}$ )

$$v(t) = \int a dt = at + C$$

$$v(0) = a \cdot 0 + C = v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = \int v(t) dt = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + C$$

$$x(0) = C = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Eliminoimalla aika  $t$  saadaan

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

# Johdanto ja kertaus

## Newtonin lait

Newton I määrittelee inertiaalikoordinaatistot

Newton II  $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$

Newton III  $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

## Voimat

kappaleen paino  $G = mg$  (kohti maapalloa)

normaalivoima  $N$  (pinnan normaalin suuntainen)

kitkavoima  $F_\mu \leq \mu_s N$  (lepokitka)

$F_\mu = \mu_k N$  (liikekitka liikettä vastaan)

keskeisvoima  $F_r = m\frac{v^2}{r}$  (ympyrän keskipistettä kohti)

narun jännitys  $T$  (narun vedon suuntaan)

jousivoima  $F = -kx$  (aina kohti tasapainoasemaa)

väliaineen vastus  $F = -bv^n$  ( $n = 1$  tai  $2$ , liikettä vastaan)

Newtonin grav.laki  $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$  (vetovoima)

# Johdanto ja kertaus

*Työ*

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

*Työ-energia-periaate*

$$W_{\text{tot}} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

*Liike-energia*

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

*Potentiaalienergia* (konservatiivisille voimille)

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

$$\vec{F} = -\nabla U \quad F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$



# Johdanto ja kertaus

## Potentiaalienergiat

$$U(y) = mgy + U_0 \quad (\text{painovoima})$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{jousivoima})$$

$$U(r) = -\frac{Gm_E m}{r} \quad (\text{gravitaatiovoima})$$

## Energian säilyminen

$$K_a + U_a + W' = K_\ell + U_\ell$$

missä  $W'$  on ei-konservatiivisten voimien tekemä työ.

Jos  $W' = 0$  (vain kons.voimia, ei kitkavoimia), niin

$$K_a + U_a = K_\ell + U_\ell$$

eli

$$E_{\text{mek}} = K + U = \text{vakio.}$$

## Teho

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

# Johdanto ja kertaus

*Kappaleen liikemäärä*

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Newton II

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

*Impulssi-liikemäärä-periaate*

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

Hiukkasjoukon massakeskipiste

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

Massakeskipisteen liike

$$\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ulk}} = M\vec{a}_{\text{cm}} = \frac{d(M\vec{v}_{\text{cm}})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

# Johdanto ja kertaus

## Liikemäärän säilyminen

$$\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ulk}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ulk}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{vakio.}$$

## Törmäykset

- ▶ Elastisessa törmäyksessä sekä liikemäärä että liike-energia säilyvät.
- ▶ Epäelastisessa törmäyksessä vain liikemäärä säilyy.
- ▶ Täysin epäelastisessa törmäyksessä vain liikemäärä säilyy ja törmäävät kappaleet jäävät toisiinsa kiinni törmäyksen jälkeen.

Esim. kahden kappaleen (1 ja 2) törmäykselle

$$\vec{p}_{1a} + \vec{p}_{2a} = \vec{p}_{1l} + \vec{p}_{2l}$$

## Johdanto ja kertaus

Kulma  $\theta$ , kulmanopeus  $\omega$ , kulmakiihtyvyys  $\alpha$ :

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Jäykälle kappaleelle

$$v = r\omega \quad a_t = r\alpha \quad a_r = r\omega^2$$

Vääntömomentti

$$\tau = Fl, \quad \ell \text{ on vipuvarsi}$$

Hitausmomentti

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Jäykälle kappaleelle NII

$$\tau = I\alpha,$$

työ

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \Delta K$$

ja liike-energia

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

# Johdanto ja kertaus

*Pyörimismäärä*

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

*Pyörimisliikkeen NII*

$$\vec{\tau}_{\text{tot}}^{\text{ulk}} = \sum_i \vec{\tau}_i^{\text{ulk}} = I\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

*Pyörimismäärän säilyminen*

$$\vec{\tau}_{\text{tot}}^{\text{ulk}} = \sum_i \vec{\tau}_i^{\text{ulk}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{vakio.}$$

Tasapainoehdot

$$\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ulk}} = 0 \quad \text{ja} \quad \vec{\tau}_{\text{tot}}^{\text{ulk}} = 0 \quad (\text{mv. pisteen suhteen})$$

**Huom.**  $\tau$ ,  $I$  ja  $L$  määritetään aina jonkun pisteen suhteen.

# Johdanto ja kertaus

Taulukko 3 ja 4. Analogia lineaarisen ja pyörimisliikkeen välillä (1D).

lineaarinen liike	pyörimisliike
$\Delta x$	$\Delta \theta$
$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta \theta$

lineaarinen liike	pyörimisliike
$m$	$I$
$p = mv$	$L = I\omega$
$F = ma = \frac{dp}{dt}$	$\tau = I\alpha = \frac{dL}{dt}$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
$dW = F_s ds$	$dW = \tau d\theta$
$P = Fv$	$P = \tau\omega$

## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

### Sähkövaraus (G 21-1)

*Sähköstatiikka* tutkii levossa olevia sähkövarauksia. Kokonaisvaraus säilyy, eli suljetun systeemin

**kokonaisvaraus on vakio.**

Varaus on lisäksi kvantittunut. Alkeisvaraus on

$$e = +1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad (1)$$

missä C on varauksen yksikkö, coulombi. 1 C (=As) on varaus, joka kulkee 1 s aikana johdossa, jossa on 1 A:n virta. Kaikki varaus voidaan esittää alkeisvarauksen avulla

$$Q = \pm Ne, \quad N \in \mathcal{N}. \quad (2)$$

Makroskooppisissa kappaleissa, joissa on paljon alkeisvarauksia, varausta voidaan pitää jatkuvana suureena. Varauksen siirtyminen kappaleelta toiselle johtuu usein negatiivisesti varautuneiden elektronien siirtymisestä kappaleiden välillä kontaktitilanteessa.

## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

### Johteet ja eristeet (G 21-3)

#### Johteet

- ▶ esim. metallit
- ▶ vapaita elektroneja aineessa
- ▶ metalleissa tyypillisesti 1 vapaa elektroni/atomi

#### Eristeet

- ▶ esim. puu, lasi, muovi
- ▶ elektronit sidottu atomiytimiin

#### Puolijohteet

- ▶ ominaisuudet eristeiden ja johteiden väliltä.

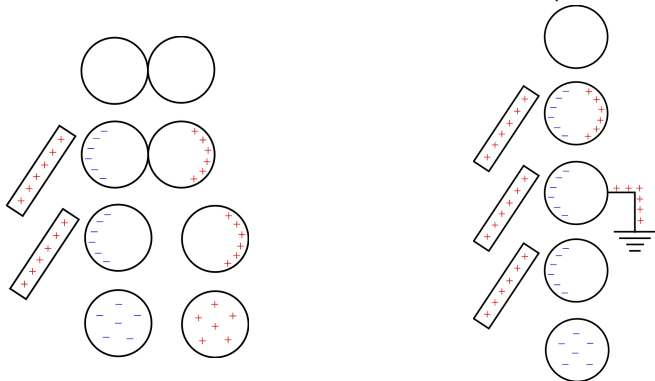
Normaalisti aine on sähköisesti neutraalia, koska aineessa on elektroneja ( $-e$ ) ja protoneja ( $+e$ ) yhtä paljon. Aineen kokonaisvarauksista voidaan muuttaa lisäämällä tai vähentämällä elektronien määrää. Johteiden ja eristeiden varausjakaumat ja varaamismekanismit eroavat toisistaan.



## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

### Indusoitunut varaus (21-4)

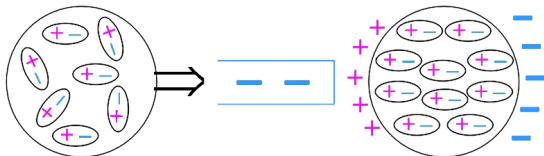
*Metallien varaaminen sähköstaattisella induktiolla (influenssi) on yksi osoitus varauksen säilymisestä. Maapalloa voidaan pitää suurena johteena, jossa on varastoituna suuri määrä vapaita varauksia. Kontaktissa maahan johde on maadoitettu (maadoitettu).*



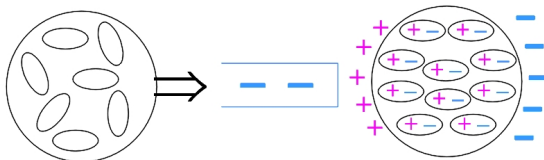
## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

*Eristeissä* ei ole vapaita varauksia, jotka voisivat liikkua sähköisten voimien vaikutuksesta, mutta siellä voi olla joko pysyviä tai indusoituja *sähködipoleja*, jotka polarisoituvat sähkökentässä.

Eriste:  
molekyyleillä  
pysyvä dipoli-  
momentti



Eriste:  
molekyyleillä  
ei ole pysyvää  
dipolimomenttia



## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

### Coulombin laki (G 21-5)

Varattujen kappaleiden välillä vaikuttaa **Coulombin voima**

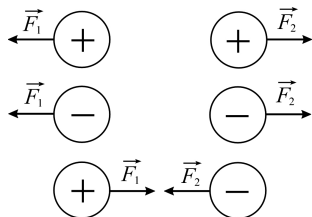
$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (3)$$

missä Coulombin vakio  $k = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ . Coulombin vakio  $k$  voidaan esittää tyhjiön permittiivisyyden  $\epsilon_0$  avulla

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (4)$$

missä  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ .

Samamerkkiset varaukset hylkivät toisiaan, erimerkkiset varaukset vetävät toisiaan puoleensa.



## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

Coulombin laki vektorimuodossa. Varaus  $q_2$  vaikuttaa varaukseen  $q_1$  voimalla

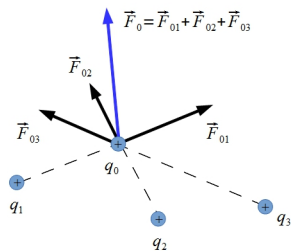
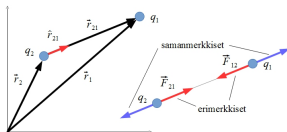
$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}. \quad (5)$$

Varausten  $q_1$  ja  $q_2$  välinen etäisyys on  $r_{21}$  ja yksikkövektori määrää voiman suunnan

$$\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (6)$$

Kun varauksia on useita, niin tiettyyn varaukseen ( $q_0$ ) vaikuttava voima on vektorisumma (superpositio) kaikkien muiden varausten ( $q_i$ ,  $i \neq 0$ ) aiheuttamista voimista

$$\vec{F}_0 = \sum_{i \neq 0}^N \vec{F}_{0i}. \quad (7)$$



## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

### Sähkökenttä (G 21-6)

Sähköinen voima välittyy sähkökentän  $\vec{E}$  avulla.

Tarkastellaan testivarausta  $+q_0$ , joka oletetaan niin pieneksi, ettei sillä ole vaikutusta tarkasteltavien varausten muodostamaan varausjakaumaan. Tällöin muiden varausten aikaansaama sähkökenttä testivarauksen kohdalla on

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}, \quad (8)$$

missä  $\vec{F}_0$  on varausten vaikuttava voima testivaraukseen  $q_0$ .

Sähkökentän (sähkökentän voimakkuuden) yksikkö:  $[E] = \text{N/C}$ .

Kuten voimankin tapauksessa, kenttä tarkastelupisteessä  $P$  saadaan superpositiona yksittäisten varausten muodostamista kentistä

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_{i \neq 0} \frac{\vec{F}_{0i}}{q_0} = \sum_i k \frac{q_i}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}, \quad (9)$$

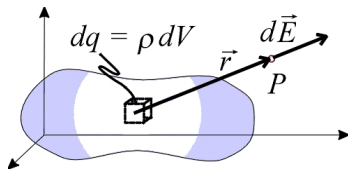
missä  $\hat{r}_{i0}$  on yksikkövektori, joka osoittaa varauksesta  $q_i$  tarkastelupisteeseen  $P$ , jossa sijaitsee testivaraus  $q_0$ .

## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

### Jatkuva varausjakauma (G 21-7)

Varausalkion  $dq = \rho dV$ , joka voidaan olettaa pistemäiseksi ( $\rho$  on varaustiheys, yksikkö  $[\rho] = \text{C}/\text{m}^3$ ), aikaansaama sähkökenttä tarkastelupisteessä  $P$

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^2} \hat{r}. \quad (10)$$



Summaamalla eli integroimalla koko varatun kappaleen tilavuuden  $V$  yli saadaan varatun kappaleen sähkökenttä tarkastelupisteessä  $P$ :

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E} = \int_V \frac{k dq}{r^2} \hat{r}, \quad (11)$$

missä  $dq = \rho dV$ . Kappaleen kokonaisvaraus

$$Q = \int dq = \int \rho dV. \quad (12)$$

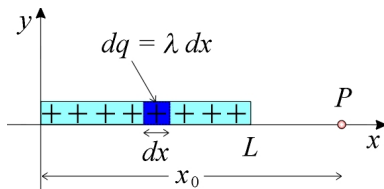
Vastaavasti pintavaraukselle ( $dq = \sigma dA$ ,  $\sigma$  pintavaraustiheys) ja viivavaraukselle ( $dq = \lambda dL$ ,  $\lambda$  viivavaraustiheys).

Yksiköt:  $[\sigma] = \text{C}/\text{m}^2$ ,  $[\lambda] = \text{C}/\text{m}$ .

## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

Esim. Äärellisen pituisen tasaisen viivavaruksen muodostama sähkökenttä viivan päässä pisteessä  $P$  ( $E_y = 0$ )

$$dE_x = \frac{k dq}{(x_0 - x)^2} = \frac{k \lambda dx}{(x_0 - x)^2}. \quad (13)$$



Integroimalla ja käyttämällä  $\lambda = Q/L$  saadaan

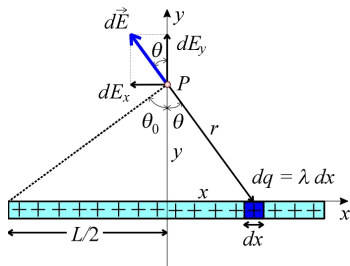
$$E_x = k\lambda \int_0^L \frac{dx}{(x_0 - x)^2} = \frac{kQ}{x_0(x_0 - L)}. \quad (14)$$

Kun  $x_0 \gg L$ , niin

$$E_x \approx \frac{kQ}{x_0^2}. \quad (15)$$

## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

Esim. Äärellisen pituisen tasaisen viivavarauksen muodostama sähkökenttä kohtisuoraan viivan keskikohdasta pisteessä  $P$  ( $E_x = 0$ )



$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} \sin \theta_0 = \frac{2k\lambda}{y} \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2}}. \quad (16)$$

Kun  $y \gg L$ , niin

$$E_y \approx \frac{kQ}{y^2}. \quad (17)$$

Esim. Äärettömän pitkän tasaisen viivavarauksen muodostama sähkökenttä viivan keskikohdassa, eli kun  $y \ll L$

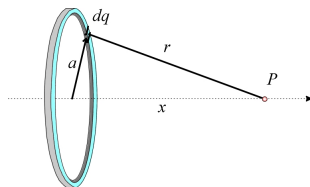
$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y}. \quad (18)$$



## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

Esim. Varausrenkaan muodostama sähkökenttä renkaan akselilla pisteessä  $P$  ( $E_{\perp} = 0$  symmetriasta)

$$dE_x = \frac{k dq}{r^2} \cos \theta = \frac{k dq}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{kx dq}{(x^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (19)$$



Tällöin

$$E_x = \int dE_x = \int \frac{kx dq}{(x^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (20)$$

Koska varausalkion etäisyys pysyy vakiona, saadaan

$$E_x = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dq = \frac{kxQ}{(x^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (21)$$

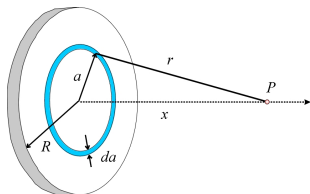
Kun  $x \gg a$ , niin

$$E_x \approx \frac{kQ}{x^2}. \quad (22)$$

## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

Esim. Tasaisesti varatun kiekon pintava-  
raus  $dq = \sigma dA = \sigma(2\pi a)da$ , missä  $\sigma =$   
 $Q/\pi R^2$ , jolloin renkaan muodostama säh-  
kökenttä kiekon akselilla

$$dE_x = \frac{kx dq}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{kx\sigma(2\pi a) da}{(x^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (23)$$



Laskemalla renkaat yhteen saadaan

$$E_x = kx\pi\sigma \int_0^R \frac{2a da}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = 2k\pi\sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right). \quad (24)$$

Kun  $x \gg R$ , niin

$$E_x \approx \frac{kQ}{x^2}. \quad (25)$$

## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

Esim. Äärettömän tason muodostama sähkökenttä, eli kun  $R \rightarrow \infty$ ,

$$E_x = +2\pi k\sigma = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad x > 0 \quad (26)$$

$$E_x = -2\pi k\sigma = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad x < 0 \quad (27)$$

eli sähkökentässä on epäjatkuvuuskohta tason kohdalla. Toisaalta kenttä on homogeeninen (ei riipu  $x$ :stä) epäjatkuvuuskohtaa lukuunottamatta.

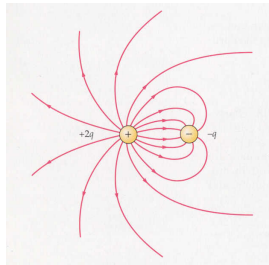
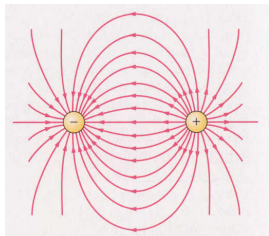
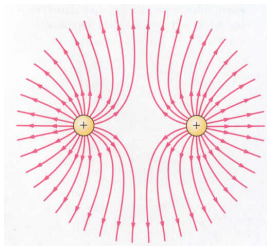
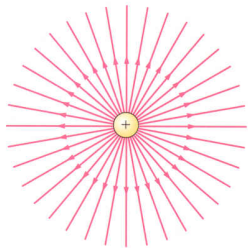
Esim. Kahden äärettömän tason, jotka leikkaavat  $x$ -akselin kohtisuoraan kohdissa  $0$  ja  $a$  ja joiden pintavaraustiheydet ovat  $+\sigma$  ja  $-\sigma$ , muodostama sähkökenttä on

$$E_x = +4\pi k\sigma = +\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad 0 < x < a \quad (28)$$

$$E_x = 0, \quad x < 0, \quad x > a. \quad (29)$$

# 21 Sähkövaraus ja -kenttä

## Kenttäviivat (G 21-8)



## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

Sähkökenttää voidaan havainnollistaa kenttäviivoilla, jotka osoittavat kentän voimakkuuden ja suunnan. Sääntöjä:

1. Missä tahansa pisteessä sähkökenttä  $\vec{E}$  on kenttäviivan tangentin suuntainen ja nuolet osoittavat positiiviseen testivaraukseen vaikuttavan voiman suunnan.
2. Viivat lähtevät radiaalisesti positiivisesta varauksesta (tai  $\infty$ :stä) ja päättyvät negatiiviseen varaukseen (tai  $\infty$ :een).
3. Viivat piirretään symmetrisesti lähellä yksittäistä varausta.
4. Varauksesta lähtevien (varaukseen saapuvien) viivojen lukumäärä kuvastaa varauksen suuruutta.
5. Viivojen tiheys kuvastaa kentän voimakkuutta.
6. Kaukana varauksista viivat ovat tasavälein ja radiaalisesti, ikäänkuin ne lähtisivät yhdestä pisteestä.
7. Viivat eivät risteä.

Huom: Viivojen tiheys pallopinnalla  $N/(4\pi r^2) \propto 1/r^2$  pienenee samalla tavalla kuin  $\vec{E}$  etäisyyden funktiona.

## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

### Varauksen liike sähkökentässä (G 21-10)

Varaukseen  $q$  vaikuttava voima missä tahansa avaruuden pisteessä riippuu sähkökentästä ko. pisteessä. Voima on

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (30)$$

Sähkökentässä  $\vec{E}$  pistevaraus  $q$  saa kiihtyvyyden

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}, \quad (31)$$

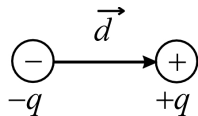
missä  $m$  on pistevarauksen massa.

Huom: Elektronin nopeus tyhjiössä on usein lähellä valon nopeutta. Tällöin Newtonin liikelait pitää korvata Einsteinin vastaavilla relativistisilla yhtälöillä. Väliaineessa elektronin nopeus on huomattavasti pienempi (esim. johteissa kulkeutumisenopeus  $\sim 10^{-4}$  m/s).

## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

### Sähködipolit (G 21-11)

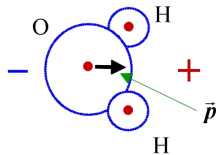
Sähködipoli on systeemi, joka koostuu kahdesta samansuuruisesta mutta vastakkaismerkkisestä varauksesta  $q$ , jotka ovat etäisyydellä  $d$  toisistaan.



Sähködipolin suuruutta ja suuntaa kuvaa sähköinen dipolimomentti

$$\vec{p} = q\vec{d}. \quad (32)$$

Sähködipoleja ovat esim. molekyylit, joilla on pysyvä sähköinen dipolimomentti johtuen elektronien epätasaisesta jakautumisesta molekyylissä (polaarinen molekyyli).  $\text{H}_2\text{O}$  on polaarinen molekyyli, joka esim. liuottaa hyvin suoloja.



## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

Tarkastellaan sähködipolin käyttäytymistä ulkoisessa kentässä. Homogeeninen kenttä ei aiheuta kokonaisvoimia dipoliin ( $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ ) vaan ainoastaan vääntömomentin, joka pyrkii kiertämään molekyylin kentän suuntaiseksi:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (33)$$

Sähkökentän tekemä työ

$$dW = -\tau d\theta = -pE \sin \theta d\theta \quad (34)$$

ja potentiaalienergian muutos

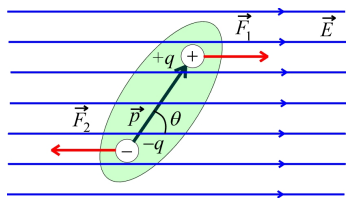
$$dU = -dW = pE \sin \theta d\theta, \quad (35)$$

mistä integroimalla

$$U = -pE \cos \theta + U_0. \quad (36)$$

Potentiaalienergian nollakohta ( $U(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0$ ) voidaan valita vapaasti, joten

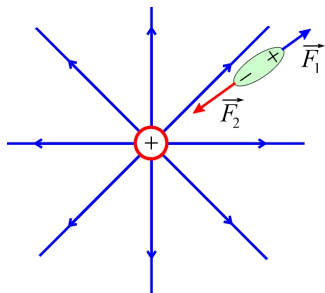
$$U = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (37)$$





## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

Epähomogeenisessa sähkökentässä dipoliin (kok.varaus = 0) kohdistuu kokonaisvoima, joka johtuu siitä, että sähkökentän voimakkuus on erilainen dipolin eri päissä.



Ei-polaariset neutraalit molekyylit voivat polarisoitua ulkoisessa kentässä.

## 21 Sähkövaraus ja -kenttä

**Sähködipolin muodostama kenttä.** Varaus  $-q$  on pisteessä  $x = -\frac{d}{2}$  ja varaus  $+q$  on pisteessä  $x = +\frac{d}{2}$ . Sähköinen dipolimomentti

$$\vec{p} = qd \hat{i}. \quad (38)$$

Sähkökenttä

$$\vec{E} = \frac{2kx\vec{p}}{(x^2 - \frac{1}{4}d^2)^2}, \text{ x-akselilla } (> \frac{d}{2}) \quad (39)$$

$$\vec{E} = -\frac{k\vec{p}}{(y^2 + \frac{1}{4}d^2)^{3/2}}, \text{ y-akselilla.} \quad (40)$$

Kaukana dipolista

$$\vec{E} \approx \frac{2k\vec{p}}{x^3}, \text{ x-akselilla} \quad (41)$$

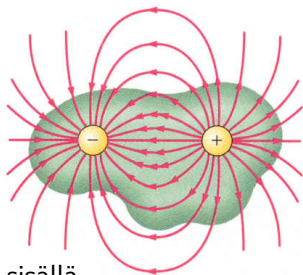
$$\vec{E} \approx -\frac{k\vec{p}}{y^3}, \text{ y-akselilla.} \quad (42)$$

Äärellisen varatun systeemin aikaansaama sähkökenttä pienenee kuten  $1/r^2$  etäisyyden kasvaessa, mutta systeemeillä, joiden kokonaisvaraus on nolla, sähkökenttä pienenee nopeammin, esim. dipolin tapauksessa kuten  $1/r^3$ .

## 22 Gaussin laki

### Sähkövuo (G 22-1)

Kun suljetun pinnan läpi tulevat ja lähtevät kenttäviivat lasketaan, saadaan pinnan läpi kulkevien viivojen nettolukumäärä, jota kuvaa *sähkövuo*.



- ▶ Vuon suuruus  $\propto$  nettovaraus pinnan sisällä.
- ▶ Vuon suunta  $\propto$  varauksen merkki.
- ▶ Pinnan ulkopuolisten varausten nettovuo = 0.
- ▶ Nettovuo ei riipu pinnan koosta ja muodosta.

**Gaussin laki:** Suljetun (kuvitteellisen) pinnan läpi kulkevien kenttäviivojen nettolukumäärä (vuo) on verrannollinen pinnan sisällä olevaan nettovaraukseen.

## 22 Gaussin laki

### Sähkövuon laskeminen

Sähkövuo kuvaa siis kenttäviivojen lukumäärää  $N$  pinnan  $A$  läpi.

Sähkövuo  $\Phi_E$  määritellään

$$\Phi_E = EA, \quad (43)$$

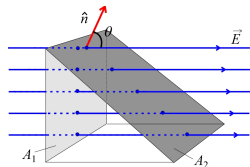
missä  $E$  on sähkökentän voimakkuus,  $A$  pinta-ala ja  $\vec{E} \parallel \hat{n}$ .

Yksikkö:  $[\Phi_E] = \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}$ .

Koska  $E \propto N/A$ , niin  $\Phi_E \propto N$  ko. pinnan läpi.

Jos sähkökenttä  $\vec{E}$  ei ole tarkasteltavaan pintaan  $A_2$  nähden kohtisuorassa, niin

$$\Phi_E = EA_1 = EA_2 \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{A}_2 = \vec{E} \cdot \hat{n} A_2. \quad (44)$$



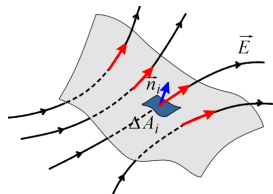
## 22 Gaussin laki

Mielivaltaiselle pinnalle

$$\Delta\Phi_{E,i} = \vec{E} \cdot \hat{n}_i \Delta A_i, \quad (45)$$

mistä kokonaisvuolle saadaan

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E} \cdot \hat{n}_i \Delta A_i = \int_S E_n dA, \quad (46)$$



missä  $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$  on pinnan normaalin  $\hat{n}$  suuntainen sähkökenttä ja  $S$  tarkoittaa, että integrointi tapahtuu pinnan  $S$  yli (pintaintegraali). Suljetun pinnan läpi sähkövuo

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E_n dA, \quad (47)$$

jonka merkki riippuu pinnan sisään jäävän kokonaisvarauksen merkistä, koska suljetun pinnan normaali  $\hat{n}$  osoittaa aina ulospäin pinnasta. Suljettua pintaa  $S$  kutsutaan *Gaussin pinnaksi*.

## 22 Gaussin laki

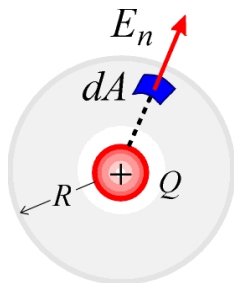
### Gaussin laki (G 22-2)

Pistevarauksen  $Q$  aiheuttama sähkökentän suuruus kaikkialla pallopinnalla on vakio

$$E_n = \frac{kQ}{R^2}. \quad (48)$$

Nettovuo pallopinnan läpi on

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint_S E_n dA = E_n \oint_S dA \\ &= \frac{kQ}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi kQ = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (49) \end{aligned}$$



Päätelmiä:

- ▶  $\Phi_E$  riippuu ainoastaan suljetun pinnan sisällä olevasta varauksesta.
- ▶  $\Phi_E$  on sama kaikilla varauksen  $Q$  sisältävillä suljetuilla pinnoilla, riippumatta pinnan muodosta ja koosta (riippumaton  $R$ :stä).

## 22 Gaussin laki

**Gaussin laki:** Kokonaisvuo  $\Phi_E$  suljetun pinnan  $S$  läpi on sama kuin ko. pinnan sisällä oleva kokonaisvaraus  $Q_{\text{encl}}$  jaettuna  $\epsilon_0$ :lla, eli

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}. \quad (50)$$

Suljetun pinnan ulkopuolella olevat varaukset eivät vaikuta tulokseen. Lisäksi nettovuo läpi suljetun pinnan, joka ei sisällä nettovarausta, on

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (51)$$

- ▶ Gaussin laki on Coulombin lain yleistys ja se soveltuu myös systeemeille, jotka eivät ole staattisia.
- ▶ Gaussin laki on *yksi Maxwellin yhtälöistä*.
- ▶ Symmetristen varausjakautumien muodostama kenttä saadaan helposti laskettua Gaussin laista valitsemalla sellainen **Gaussin pinta, jolla sähkökentän voimakkuus on vakio**.

## 22 Gaussin laki

### Esimerkkejä $E$ :n laskemisesta (G 22-3)

#### *Pallosymmetrinen varausjakauma*

Gaussin pinnaksi valitaan pallosymmetrinen pinta, jolla  $E = \text{vakio}$ .

Pistevarauksen  $Q$  ympärillä etäisyydellä  $r$  olevan pallopinnan läpi nettovoio

$$\Phi_E = \oint_S E_r dA = E_r \oint_S dA = E_r(4\pi r^2). \quad (52)$$

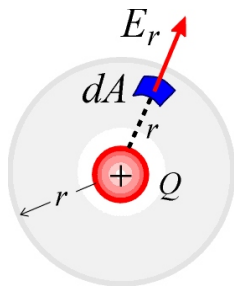
Varaus pallon sisällä on  $Q$ , joten Gaussin laista

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (53)$$

saadaan

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (54)$$

joka on Coulombin laki pistevarauksen sähkökentälle.



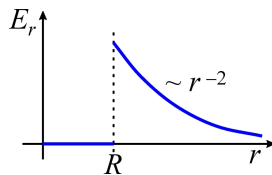


## 22 Gaussin laki

Varatun pallokuoren (johde), jonka säde on  $R$  ja varaus  $Q$ , aiheuttama sähkökenttä saadaan Gaussin laista

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r \geq R \quad (55)$$

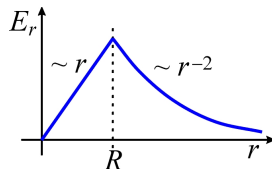
$$E_r = 0, \quad r < R. \quad (56)$$



Tasaisesti varatun pallon (eriste), jonka säde on  $R$  ja varaus  $Q$ , aiheuttama sähkökenttä saadaan Gaussin laista

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad r \geq R \quad (57)$$

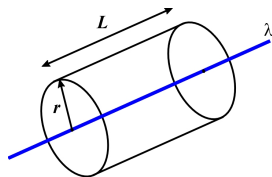
$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r, \quad r \leq R. \quad (58)$$



## 22 Gaussin laki

### *Sylinterisymmetrinen varausjakauma*

Äärettömän pitkän viivavarauksen, jonka viivavaraustiheys on  $\lambda$ , ympärille valitaan sylinterisymmetrinen Gaussin pinta, jolla  $E = \text{vakio}$ .  
Nettovuo on



$$\Phi_E = \oint_S E_r dA = E_r \oint_S dA = E_r(2\pi rL). \quad (59)$$

Varaus sylinterin sisällä on  $\lambda L$ , joten Gaussin laista

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}, \quad (60)$$

mikä on sama tulos kuin aikasemminkin (yhtälö (18)).

Varatun johtavan sylinterikuoren (säde  $R$ ) ulkopuolella ( $r > R$ ) saadaan sama tulos (60) ja sisäpuolella ( $r < R$ ) sähkökenttä  $E = 0$ .

## 22 Gaussin laki

### Ääretön varattu taso

Varatun tason pintavaraustiheys on  $\sigma$  ja sähkökenttä on kohtisuorassa tasoon nähden.

Valitulla Gaussin pinnalla  $E_n$  on vakio ja pinnan sisään jäävä varaus on  $\sigma A$ , jolloin Gaussin laista

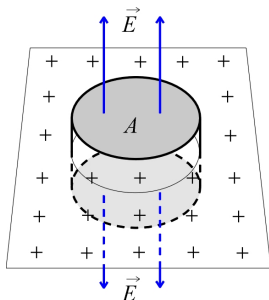
$$2E_n A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A, \quad (61)$$

mistä saadaan sähkökenttä

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (62)$$

joka on sama tulos, mitä aikaisemmin saatiin (yhtälö (26)).

Esim. Kaksi ääretöntä tasoa on etäisyydellä  $d$  toisistaan. Toisen levyn pintavaraustiheys on  $+\sigma$  ja toisen  $-\sigma$ . Tällöin sähkökenttä levyjen välissä on  $\sigma/\epsilon_0$  ja ulkopuolella 0. (Vrt. yhtälöt (28)–(29).)



## 22 Gaussin laki

### Johteen pintavaraus

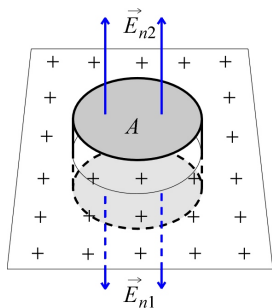
Äärettömän tason ja pallokuoren tapauksessa sähkökentässä, joka on pintaa vastaan kohtisuorassa, on epäjatkuvuuskohta, jonka suuruus on  $\sigma/\epsilon_0$ , kun pinnan pintavaraustiheys on  $\sigma$ .

Tarkastellaan ääretöntä tasoa. Gaussin laista saadaan

$$E_{n2}A - E_{n1}A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}, \quad (63)$$

missä  $E_{n1}$  ja  $E_{n2}$  ovat tason eri puolilla olevat sähkökentät, eli

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (64)$$

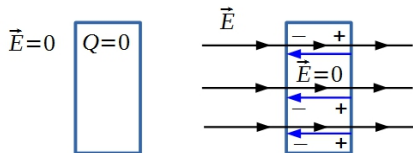


Huom: Tasaisesti varatun pallon pinnalla sähkökentässä ei ole epäjatkuvuuskohtaa, vaan kenttä on jatkuva (ks. yhtälöt (57)–(58)).

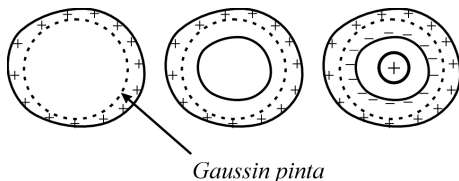
## 22 Gaussin laki

Johteessa varauksen kuljettajat voivat liikkua lähes vapaasti. Jos johteen sisällä olisi sähkökenttä, vapaat varaukset liikkuisivat kentässä kunnes saavuttaisivat tasapainotilan. Tällöin johteen sisällä sähköstaattisessa tasapainossa varaukset jakautuvat siten, että johteen sisällä sähkökenttä  $E = 0$ .

Ulkoisessa kentässä neutraaliin johteeseen indusoituu pintavaraus, jonka kenttä kumoaa sähköstaattisessa tasapainossa ulkoisen kentän johteen sisällä.



## 22 Gaussin laki



Oletetaan, että johteessa on nettovarausta. Koska sähköstaattisessa tasapainossa johteen sisällä millä tahansa Gaussin pinnalla kenttä on nolla, niin Gaussin laista seuraa, että missä tahansa pisteessä johteen sisällä nettovaraus on nolla. Tästä seuraa se, että sähköstaattisessa tasapainossa johteen nettovaraus on johteen pinnalla.

Esim. Pistevaraus johdepallokuoren sisällä indusoi vastakkaismerkkisen varauksen pallokuoren sisäpinnalle, jolloin pistevarausta vastaava varaus indusoituu pallokuoren ulkopinnalle.

## 22 Gaussin laki

Varatun tason muodostaman sähkökentän epäjatkuvuus on suuruudeltaan  $\sigma/\epsilon_0$ , joten sähkökenttä varatun johteen pinnalla on

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (65)$$

koska johteen sisällä  $E = 0$ . Lisäksi sähköstaattisessa tasapainossa sähkökentän pitää olla pintaa vastaan kohtisuorassa, koska muussa tapauksessa pinnan tangentin suuntainen kenttä liikuttaisi vapaita varauksia kunnes tasapaino olisi saavutettu. Johteessa sähköstaattinen tasapaino saavutetaan hyvin nopeasti.

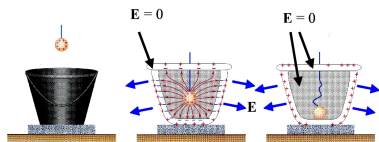
Huom: Johteen sisällä voi olla sähkökenttä, mutta sitä varten tarvitaan jännite johteen eri osien välille. Tällöin syntyy tasainen sähkövirta. Tähän palataan myöhemmin.

## 22 Gaussin laki

### Kokeellinen varmennus (G 22-4)

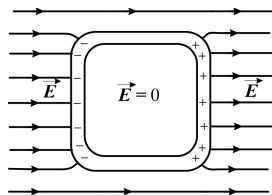
*Kokeellisesti* on varmennettu, että Gaussin laki on voimassa, ja siten Coulombin laki ( $\sim 1/r^2$ , eksponentin 2 virhe on pienempi kuin  $10^{-16}$ ).

Van de Graaff -generaattori  
(suuret sähkökentät)



Faradayn ämpärikoe

Faradayn häkki  
(sähköstaattinen suojaus)





## 23 Sähköinen potentiaali

### Potentiaalienergia ja potentiaali (G 23-1)

Potentiaalienergia  $U$  määriteltiin konservatiivisen voiman  $\vec{F}$  tekemän työn avulla

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\Delta U = U_a - U_b. \quad (66)$$

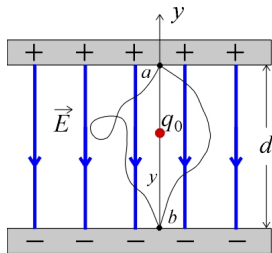
Esim. Homogeenisen kentän potentiaalienergia.

Tarkastellaan varattua hiukkasta ( $q_0 > 0$ ), joka liikkuu homogeenisessa kentässä  $\vec{E}$ , joka on konservatiivinen. Kentän tekemä työ matkalla  $d$  on

$$W_{a \rightarrow b} = Fd = q_0 E(y_a - y_b), \quad (67)$$

joten potentiaalienergia on

$$U = q_0 E y + U_0. \quad (68)$$



## 23 Sähköinen potentiaali

*Sähköinen potentiaali* määritellään potentiaalienergiana yksikkövarausta kohden

$$V = \frac{U}{q_0}. \quad (69)$$

Yksikkö:  $[V] = \text{V (voltti)} = \text{J/C}$ .

Kentän tekemä työ yksikkövarauksen siirrossa  $a \rightarrow b$  yksikkövarausta kohden on

$$\begin{aligned} \frac{W_{a \rightarrow b}}{q_0} &= -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) \\ &= -(V_b - V_a) = V_a - V_b. \end{aligned} \quad (70)$$

*Potentiaaliero*  $V_a - V_b \equiv V_{ab}$  on  $a$ :n potentiaali suhteessa  $b$ :hen, sähköpiirissä  $V_{ab}$  on nimeltään *jännite*.

## 23 Sähköinen potentiaali

### Yhteys suureiden välillä (G 23-2)

Potentiaalienergialle

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q_0 (V_a - V_b), \quad (71)$$

josta jakamalla yksikkövarauksella  $q_0$  saadaan potentiaalierolle

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (72)$$

Yksikkö:  $[E] = \text{N/C} = \text{V/m}$ .

Huom: Kenttäviivat osoittavat pienenevän potentiaalın suunnan.

Huom: Kuten potentiaalienergian tapauksessa, ainoastaan potentiaalın muutokset ovat tärkeitä, joten nollakohta voidaan valita (lähes) vapaasti. Tällöin vaikka jossakin pisteessä esim.  $V_b = 0$ , niin kentän ja varauksen ei tarvitse hävitä tässä pisteessä.

## 23 Sähköinen potentiaali

Esim. Potentiaali homogeenisessa kentässä

$$V(y) = \frac{U(y)}{q_0} = \frac{q_0 E y}{q_0} = E y, \quad (73)$$

kun potentiaalin nollakohta  $V(y = 0) = 0$ . Pisteiden  $a$  ja  $b$  välinen potentiaaliero eli jännite

$$V_{ab} = V_a - V_b = E d. \quad (74)$$

Koska levyjen välillä on homogeeninen sähkökenttä  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , niin johteen pintavaraustiheys saadaan laskettua

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V_{ab}}{d}, \quad (75)$$

kun jännite  $V_{ab}$  on ensin mitattu.

## 23 Sähköinen potentiaali

### Esim. Pistevarauksen potentiaali (G 23-3)

Tarkastellaan testivarausta  $+q_0$  pistevarauksen  $+q$  kentässä. Testivarauksen kohdalla vaikuttava kenttä on radiaalinen

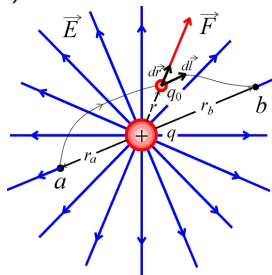
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (76)$$

Kentän tekemä työ yksikkövarausta  $q_0$  kohti siirtymässä  $a$ :sta  $b$ :hen

$$\frac{W_{a \rightarrow b}}{q_0} = \int_{r_a}^{r_b} E dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = V_a - V_b \quad (77)$$

on riippumaton reitistä pisteiden  $a$  ja  $b$  välillä, koska voima on konservatiivinen. Pistevarauksen  $q$  potentiaali etäisyydellä  $r$  on

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{ja} \quad V(\infty) = 0, \quad (78)$$



jota kutsutaan **Coulombin potentiaaliksi**.

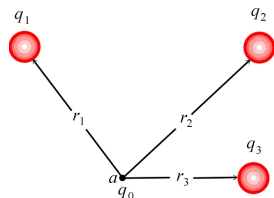
## 23 Sähköinen potentiaali

### Varausjakaumien potentiaali (G 23-4)

#### Useampia pistevarauksia

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (79)$$

missä  $r_i$  on varauksen  $q_i$  etäisyys tarkastelupisteestä  $a$ . Varausten yhteisvaikutus on skalaarisumma yksittäisten varausten potentiaaleista (ei vektorisumma).



#### Jatkuvalla varausjakaumalle

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad (80)$$

missä varausalkio  $dq$  on etäisyydellä  $r$  tarkastelupisteestä.

## 23 Sähköinen potentiaali

Esim. Tasaisesti varatun pallokuoren potentiaali.

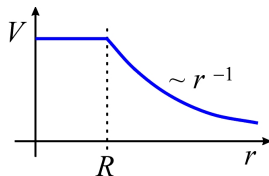
Kuten pistevarauksen tapauksessa pallokuoren ulkopuolella ( $r > R$ ) potentiaali on

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad r > R. \quad (81)$$

Pallokuoren sisällä kenttä on nolla, joten potentiaalin muutos mille tahansa siirtymälle pallokuoren sisällä on nolla, eli potentiaalin pitää olla vakio. Kun  $r \rightarrow R$  pallokuoren ulkopuolelta, niin potentiaali  $V \rightarrow q/(4\pi\epsilon_0 R)$ , joten

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad r \geq R \quad (82)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, \quad r \leq R. \quad (83)$$



Huom: Toisin kuin sähkökenttä  $\vec{E}$ , potentiaali  $V$  on aina jatkuva funktio.

## 23 Sähköinen potentiaali

Tuloksesta (82)-(83) voidaan johtaa tärkeä tulos: Sähkökenttä johteen pinnalla on

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} = \frac{V}{R}. \quad (84)$$

Moni eristävä materiaali ionisoituu suurissa sähkökentissä, jolloin niistä tulee johtavia (eristeen läpilyönti, valokaaripurkaus, salama). Suurin mahdollinen sähkökenttä, joka ilmassa voi olla ennen läpilyöntiä (ilman läpilyöntikestävyys), on

$$E_{\max} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}. \quad (85)$$

Johdepallon suurin mahdollinen potentiaali ilmassa on siis

$$V_{\max} = RE_{\max}. \quad (86)$$

Huom: Läpilyönti tapahtuu helpoiten terävissä kärjissä, joiden kaarevuussäde on pieni. Esimerkkinä ukkosenjohdatin.



## 23 Sähköinen potentiaali

Esim. Tasaisesti varatun pallon potentiaali

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad r \geq R \quad (87)$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad r \leq R. \quad (88)$$

Esim. Varatun äärettömän suoran potentiaali.

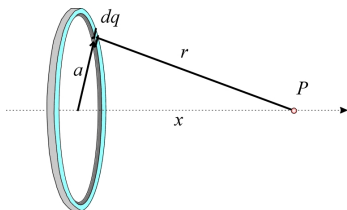
$$V_a - V_b = \int_{r_a}^{r_b} E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}. \quad (89)$$

Nyt potentiaalin nollakohtaa ei voida valita  $V_b(r_b = \infty) = 0$ , koska  $V_a \xrightarrow{r_b \rightarrow \infty} \infty$ . Toisaalta ei voida myöskään valita  $V_b(r_b = 0) = 0$ , koska  $V_a \xrightarrow{r_b \rightarrow 0} -\infty$ . Potentiaali nollakohta pitää valita siten, että  $V_b(r_b = r_0) = 0$ , jolloin

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (90)$$

## 23 Sähköinen potentiaali

Esim. Potentiaali varatun renkaan akselilla.



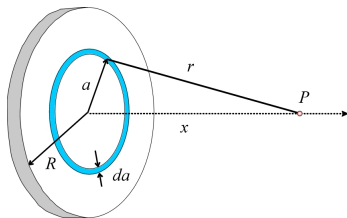
Varausrenkaan potentiaali akselilla pisteessä  $P$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned} \quad (91)$$

Kun  $x \gg a$ , niin  $V \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x}$ .

## 23 Sähköinen potentiaali

Esim. Potentiaali varatun kiekon akselilla.



Pintavaraukselle  $dq = \sigma dA = \sigma(2\pi a)da$ , missä  $\sigma = Q/\pi R^2$ , jolloin renkaan potentiaali akselilla

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma(2\pi a) da}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^R 2a(x^2 + a^2)^{-1/2} da = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ (x^2 + R^2)^{1/2} - x \right] \quad (92) \end{aligned}$$

Kun  $x \gg R$ , niin  $V \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x}$ .

## 23 Sähköinen potentiaali

Esim. Varatun äärettömän tason potentiaali.

Kun varatussa kiekossa  $R \rightarrow \infty$ , saadaan ääretön taso, mutta silloin yhtälön (92) mukaan  $V \rightarrow \infty$ . Toisaalta yhtälössä (80) oletetaan, että  $V(\infty) = 0$ , joten yhtälöä (92) ei voida soveltaa tässä yhteydessä. Sähkökenttä pitää siis laskea ensin Gaussin laista

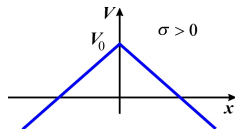
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (93)$$

josta saadaan tapauksessa  $x > 0$

$$V_a - V_b = \int_{x_a}^{x_b} E dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(x_b - x_a). \quad (94)$$

Koska  $V_a \xrightarrow{x_b \rightarrow \infty} \infty$ , niin potentiaalिन nollakoh-  
taa ei voida valita siten, että  $V_b(x_b = \infty) = 0$ ,  
vaan se pitää valita siten, että  $V_b(x_b = 0) = V_0$ .  
Vastaavasti, kun  $x < 0$ . Yleisesti ( $\sigma > 0$ ) saa-  
daan

$$V = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}|x|. \quad (95)$$



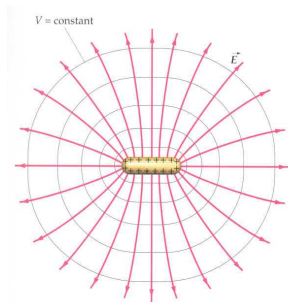
## 23 Sähköinen potentiaali

### Tasapotentialipinnat (Vrt. kartan korkeuskäyrät.)

- ▶ Tasapotentialipinta on kaikkialla jatkuva.
- ▶ Tasapotentialipinnan jokaisessa pisteessä potentiaali on vakio ( $V_{ab} = 0$ ), joten varauksen siirtämisessä tasapotentialipinnalla ei tehdä työtä.
- ▶ Tasapotentialipinta  $\perp \vec{E}$ :n kenttäviivat.
- ▶  $E$ :n ei tarvitse olla sama kaikkialla tasapotentialipinnalla.
- ▶ Gaussin pinta voidaan valita, tasapotentialipintaa ei.

Johteet sähköstaattisessa tasapainossa:

- ▶ Johteen pinta on tasapotentialipinta.
- ▶ Johteen pinnalla  $\vec{E} \parallel \hat{n}$ .
- ▶ Johteen sisällä olevan tyhjän onkalon seinissä ei ole nettovarausta.



## 23 Sähköinen potentiaali

Esim. Tarkastellaan kuvan muotoisen johteen pintavaraustiheyttä ja sähkökenttää kappaleen pinnalla. Ei-pallosymmetrisen johteen pintavaraustiheys  $\sigma$  ja sähkökenttä  $E_n$  johteen ulkopuolella riippuvat pinnan muodosta, vaikka johteen pinnalla potentiaali on vakio.



Johteen pinnalla

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi r^2 \sigma}{r} = \frac{r\sigma}{\epsilon_0}, \quad (96)$$

mistä

$$\sigma = \frac{V\epsilon_0}{r} \quad (97)$$

ja

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{V\epsilon_0}{\epsilon_0 r} = \frac{V}{r}, \quad (98)$$

eli mitä pienempi kaarevuussäde  $r$  sitä suurempi johteen pintavaraustiheys ja sähkökenttä, kun  $V = \text{vakio}$ .

## 23 Sähköinen potentiaali

### Kenttä ja potentiaali (G 23-7)

Jos  $\vec{E}$  tunnetaan, niin  $V$  voidaan laskea lausekkeesta

$$V_a - V_b = - \int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}. \quad (99)$$

Jos  $V$  tunnetaan, niin  $\vec{E}$  voidaan myös laskea. Tarkastellaan infinitesimaalista potentiaalin muutosta

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = [E_x dx + E_y dy + E_z dz], \quad (100)$$

missä sähkökentän komponentit ovat potentiaalin osittaisderivaatat (karteesisessa koordinaatistossa)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (101)$$

Sähkökenttä voidaan esittää potentiaalin avulla

$$\vec{E} = (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) = - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right) = -\nabla V, \quad (102)$$

eli sähkökenttä on potentiaalin negatiivinen gradientti.

## 23 Sähköinen potentiaali

Gradientti määrää suurimman muutoksen suunnan, eli sähkökentän kenttäviivat osoittavat potentiaalin suurimman pienenemisen suunnan.

Huom: Skalaarisuureen gradientti on vektorisuure.

Huom:  $\vec{E}$  ei riipu  $V_0$ :n valinnasta.

Jos potentiaali on pelkästään  $x$ :n funktio, niin

$$E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \quad (103)$$

Pallosymmetriselle potentiaalille sähkökenttä on pelkästään etäisyyden  $r$  funktio, joten

$$E(r) = -\frac{dV(r)}{dr}. \quad (104)$$

Jos potentiaali tai sähkökenttä tunnetaan jollain avaruuden alueella, niin toinen saadaan laskettua toisen avulla. Usein potentiaali on helpompi laskea, koska se on skalaarisuure.

**Elektronivoltti** (G 23-8). Pienille energioille on yksikkö

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$



## 24 Kapasitanssi

### Kondensaattori (G 24-1)

*Kondensaattori* on laite, joka varastoi varausta ja energiaa ja joka koostuu kahdesta erillisestä johteesta, joilla on samansuuruiset mutta erimerkkiset varaukset ( $+Q$  ja  $-Q$ ). Kondensaattorin *kapasitanssi* määritellään

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}, \quad (105)$$

missä  $Q$  on jomman kumman johteen varauksen suuruus ja  $V_{ab}$  on johteiden välinen potentiaaliero. Yksikkö:  $[C] = \text{F}$  (faradi) =  $\text{C}/\text{V}$ .

Kapasitanssi kuvastaa kondensaattorin kykyä varastoida varausta annetulla potentiaalierolla. Varauksen lisääminen lisää myös potentiaaliero, joten kondensaattorin kapasitanssi pysyy vakiona.

Kondensaattoreita on kaikkialla: salamalaite, kiihtyvyyssanturit (mm. turvatuynyt), radio- ja TV-vastaanottimet, jne.

## 24 Kapasitanssi

### Kapasitanssin määrittäminen (G 24-2)

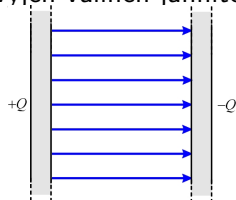
Yleisesti systeemin kapasitanssi riippuu johteiden koosta, muodosta ja geometrisesta ryhmittelystä sekä väliaineesta johteiden välissä.

Esim. *Levykondensaattorissa* levyjen pinta-ala  $A$  on huomattavasti suurempi kuin niiden välinen etäisyys  $d$ . Sähkökenttä levyjen välissä on siis homogeeninen. Levykondensaattorin levyjen välinen jännite

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d, \quad (106)$$

joten sen kapasitanssi on

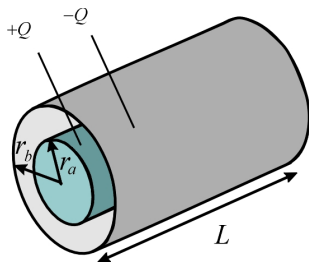
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (107)$$



Käytännössä levykondensaattori rakentuu kahdesta ohuesta metallikalvosta, joiden väliin on laitettu (eristävä) muovikalvo, ja koko systeemi on kierretty rullalle.

## 24 Kapasitanssi

Esim. *Sylinterikondensaattori* koostuu ohuesta sylinteristä tai langasta, jonka säde on  $r_a$ , ja suuremmasta samankeskisestä sylinteristä, jonka säde on  $r_b$ . (Koaksiaalikaapeli on eräänlainen sylinterikondensaattori.)



Aikaisemmin saatiin potentiaalierolle (89)

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}, \quad (108)$$

jossa  $\lambda = Q/L$  ja josta saadaan kapasitanssi

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)}, \quad (109)$$

eli sylinterikondensaattorin kapasitanssi riippuu mm. johteiden pituudesta.

## 24 Kapasitanssi

### Kondensaattorit sarjassa (G 24-3)

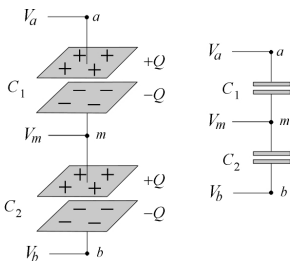
Sarjaan kytketyillä kondensaattoreilla on **sama varaus**  $Q$ . Jännitteet ovat

$$V_1 = V_a - V_m = \frac{Q}{C_1} \quad (110)$$

$$V_2 = V_m - V_b = \frac{Q}{C_2}. \quad (111)$$

Koko systeemin jännite on

$$V_{ab} = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right). \quad (112)$$



Sarjaan kytketyt kondensaattorit voidaan korvata yhdellä kondensaattorilla, jonka *ekvivalenttinen kapasitanssi* on

$$C_{\text{eq}} = \frac{Q}{V_{ab}} = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (113)$$

## 24 Kapasitanssi

### Kondensaattorit rinnan (G 24-3)

Rinnan kytketyillä kondensaattoreilla on **sama jännite**  $V_{ab}$ . Varaukset ovat

$$Q_1 = C_1 V_{ab} \quad (114)$$

$$Q_2 = C_2 V_{ab}. \quad (115)$$

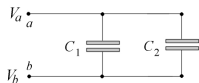
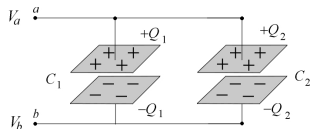
Systemin kokonaisvaraus on

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V_{ab} + C_2 V_{ab} = (C_1 + C_2) V_{ab} \quad (116)$$

Rinnan kytketyt kondensaattorit voidaan korvata yhdellä kondensaattorilla, jonka *ekvivalenttinen kapasitanssi* on

$$C_{\text{eq}} = \frac{Q}{V_{ab}} = C_1 + C_2, \quad (117)$$

eli kondensaattorien lisääminen rinnalle lisää kapasitanssia ja siten kondensaattorisysteemin kykyä varastoida varausta.



## 24 Kapasitanssi

### Varastoitunut energia (G 24-4)

Kondensaattoria varattaessa tehdään työtä varauksen siirtämiseen johteelta toiselle. Oletetaan, että varausta on siirtynyt johteiden välillä määrä  $q$ , jolloin niiden välillä on potentiaaliero  $v = q/C$ . Pienen varauksen  $dq$  siirtämisessä negatiiviselta johteelta positiiviselle potentiaalissa  $v$  tehdään työ

$$dW = v dq = \frac{q}{C} dq, \quad (118)$$

josta integroimalla

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \quad (119)$$

joka varastoituu kondensaattoriin ja joka voidaan tarvittaessa käyttää purkamalla kondensaattori. Käyttämällä kapasitanssin määritelmää (105) saadaan

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV, \quad (120)$$

ts.  $Q$  siirtyy keskimääräisellä potentiaalilla  $\frac{1}{2} V$ .

## 24 Kapasitanssi

Huom: Kondensaattori varataan usein kytkemällä se paristoon, jolla on jokin vakiojännite  $V$ . Työ, jonka paristo tekee kondensaattorin varaamisessa, on  $W = QV$ , joka on kaksi kertaa se, mitä kondensaattoriin varastoituu energiaa. Toinen puoli pariston tekemästä työstä menee lämpöhäviöihin.

Esim. Levykondensaattoriin varastoitunut energia on

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \frac{A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (Ad), \quad (121)$$

joka voidaan ajatella olevan varastoituneena levyjen väliseen sähkökenttään, jolloin sähkökentän *energiatiheys* (energia/tilavuus)

$$u_E = \frac{U}{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad (122)$$

missä  $\mathcal{V} = Ad$  on levyjen välisen alueen (ts. sähkökentän) tilavuus.

Saatu tulos on yleinen kaikille sähkökentille.

## 24 Kapasitanssi

### Eristeet (G 24-5)

Eriste kondensaattorilevyjen välissä:

- ▶ Eristeiden läpilyöntikestävyys suurempi kuin ilman  $\Rightarrow$  suurempi  $V_{ab} \Rightarrow$  suurempi  $Q$ .
- ▶ Levyjen väli mahdollisimman pieni  $\Rightarrow$  suurempi  $C \Rightarrow$  suurempi  $Q$ .

Kun levykondensaattorin levyjen väliin laitetaan eriste, niin kondensaattorin kapasitanssi muuttuu tekijällä  $K (>1)$

$$K = \frac{C}{C_0} \quad (123)$$

joka on eristeelle ominainen *dielektrisyysvakio* (eristevakio, suhteellinen permittiivisyys). Levykondensaattorin kapasitanssi on nyt

$$C = KC_0 = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d}. \quad (124)$$

missä  $\epsilon$  on *väliaineen (eristeen) permittiivisyys*

$$\epsilon = K\epsilon_0. \quad (125)$$



## 24 Kapasitanssi

Vastaavasti kaikissa muissakin yhtälöissä tyhjiön permittiivisyys voidaan korvata väliaineen permittiivisyydellä, jolloin esim. levykondensaattorin energia on

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (Ad), \quad (126)$$

missä energiatiheys

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} K \epsilon_0 E^2. \quad (127)$$

Huom: Koska eristeessä tapahtuu läpilyönti jänniteen kasvaessa tarpeeksi suureksi, niin kondensaattoreille ilmoitetaan suurin nimellisjännite, minkä ne kestävät. Suurin sähkökenttä, jonka eriste kestää, on eristeelle ominainen *läpilyöntikestävyys* tai *-lujuus*.

## 24 Kapasitanssi

Esim. Varatun kondensaattorin ollessa *kytkettynä kiinni* jännitelähteeseen  $V_0$  viedään eriste levyjen väliin, jolloin *jännite ei muutu*.

Tällöin

$$V_0 = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{KC_0}, \quad (128)$$

joten varaus kasvaa

$$Q = KQ_0. \quad (129)$$

Toisaalta, jos varattu kondensaattori on *kytkettynä irti*, kun eriste viedään levyjen väliin, levyjen *varaus ei muutu*. Tällöin

$$Q = C_0 V_0 = CV = KC_0 V, \quad (130)$$

joten jännite pienenee

$$V = \frac{V_0}{K}. \quad (131)$$

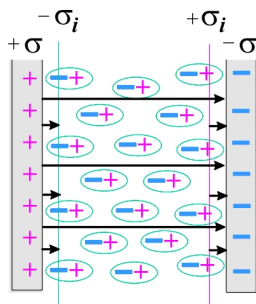
Vastaavasti sähkökenttä heikkenee

$$E = \frac{V}{d} = \frac{V_0}{Kd} = \frac{E_0}{K}. \quad (132)$$

## 24 Kapasitanssi

### Eristeiden mikroskooppinen kuvaus (G 24-6)

Tarkastellaan tilannetta, jossa johdelevyjen varaus ei muutu. Tällöin *vapaiden varausten* aiheuttama pintavaraustiheyskään  $\sigma$  ei muutu. Sähkökentässä eristeeseen indusoituu *sidottujen varausten* synnyttämä pintavaraustiheys  $\sigma_i$ , joka aiheutuu eristeessä olevien tai sinne indusoituneiden sähköisten dipolien suuntautuessa ulkoisen kentän suuntaiseksi (*polarisaatio*) ja jonka aiheuttama kenttä osoittaa levyjen kenttään nähden vastakkaiseen suuntaan pienentäen näin levyjen välissä olevaa kokonaiskenttää.



## 24 Kapasitanssi

Sähkökenttä levyjen välissä ilman eristettä

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}, \quad (133)$$

missä  $Q$  on levyillä oleva vapaa varaus. Sähkökenttä eristeen kanssa

$$E = E_0 - E_i = \frac{E_0}{K}, \quad (134)$$

mistä voidaan ratkaista eristeeseen indusoitunut kenttä

$$E_i = E_0 \left(1 - \frac{1}{K}\right). \quad (135)$$

Vastaavasti saadaan eristeeseen indusoitunut sidottu varaus

$$Q_i = Q \left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad (136)$$

ja tätä vastaava pintavaraustiheys

$$\sigma_i = \sigma \left(1 - \frac{1}{K}\right). \quad (137)$$

## 25 Sähkövirta ja resistanssi

### Sähkövirta (G 25-2)

Sähkövirta  $I$  määritellään sähkövarausten virtausnopeutena

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (138)$$

missä  $dQ$  on varaus, joka virtaa johteessa poikkipinta-alan  $A$  läpi ajassa  $dt$ . Yksikkö:  $[I] = \text{C/s} = \text{A}$  (ampeeri).

Sähkövirta syntyy, kun sähkökenttä vaikuttaa johteessa vapaisiin varauksenkuljettajiin voimalla  $\vec{F} = q\vec{E}$ .  $\vec{E}$  määrää siten positiivisten varausten eli virran kulkusuunnan sekä pienenevän potentiaalin suunnan. Usein aineessa varauksenkuljettajina toimivat elektronit, jotka liikkuvat päinvastaiseen suuntaan kuin näin määritelty virta.

## 25 Sähkövirta ja resistanssi

### Ohmin laki (G 25-3)

Johteessa sähkövirta  $I$  kasvaa lineaarisesti, kun jännitettä  $V$  kasvatetaan. Tulokseksi saadaan

$$I = \frac{V}{R}, \quad (139)$$

missä  $R$  on johteen *resistanssi*. Yksikkö:  $[R] = \Omega$  (ohmi) = V/A. Materiaalit, joiden resistanssi ei riipu jännitteestä tai virrasta, ovat ohmisia materiaaleja, joille

$$V = RI, \quad R = \text{vakio}, \quad (140)$$

mikä on **Ohmin laki**.

Johtimen resistanssi on

$$R = \rho \frac{\ell}{A}, \quad (141)$$

missä  $\ell$  on johtimen pituus,  $A$  sen poikkipinta-ala ja  $\rho$  on johteessa käytetyn materiaalin *resistiivisyys* (G 25-4). Yksikkö:  $[\rho] = \Omega \cdot \text{m}$ .

## 25 Sähkövirta ja resistanssi

### Sähköteho (G 25-5)

Potentiaalienergian muutos aikayksikössä on *teho*

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} V = IV, \quad (142)$$

Yksikkö:  $[P] = \text{W (watti)} = \text{VA} = \text{J/s}$ .

Komponentissa tehohäviö on

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}, \quad (143)$$

joka tarkoittaa sitä, millä teholla sähköistä potentiaalienergiaa siirtyy virtapiirin komponentteihin.

## 25 Sähkövirta ja resistanssi

### Virran mikroskooppinen kuvaus (G 25-8)

Olkoon varaustenkuljettajien lukumäärätiheys  $n = N/V$ , varaus  $q$  ja kulkeutumisnopeus  $v_d$ . Ajassa  $dt$  tilavuudessa  $A v_d dt$  olevat varaukset kulkevat poikkipinta-alan  $A$  läpi, jolloin kokonaisvaraus on

$$dQ = nq v_d A dt. \quad (144)$$

Sähkövirraksi saadaan

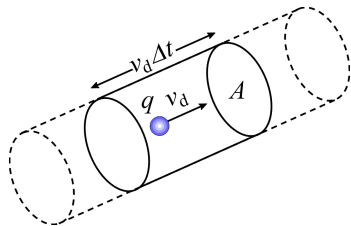
$$I = \frac{dQ}{dt} = nq v_d A. \quad (145)$$

Virrantiheys  $J$  määritellään

$$J = \frac{I}{A} = nq v_d. \quad (146)$$

Yksikkö:  $[J] = A/m^2$ .

Virran ja virrantiheyden merkki ei riipu varauksenkuljettajien merkistä ( $-q \rightarrow -v_d$ , koska elektronit liikkuvat  $-\vec{E}$ -suuntaan).





## 25 Sähkövirta ja resistanssi

Virrantiheys on yleisesti vektorisuure

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d, \quad (147)$$

joka on samansuuntainen kentän  $\vec{E}$  kanssa.

Virrantiheys kuvaa, kuinka varaus kulkee tietyssä pisteessä (vektori), ja virta kuvaa sitä, miten varaus kulkee esim. johtimessa (skalaari).

Vapaiden elektronien lukumäärä metalleissa on noin yksi atomia kohti, mikä on voitu todentaa kokeilla, jotka perustuvat Hallin ilmiöön. Hallin ilmiön avulla pystytään määrittämään myös varauksenkuljettajien merkki.

Resistiivisyys  $\rho$  määritellään

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{1}{\sigma}. \quad (148)$$

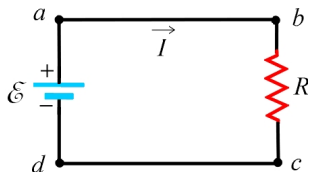
missä  $\sigma$  on aineen *johtavuus*.

## 26 Tasavirtapiirit

### Sähkömotorinen voima (smv) (G 26-1)

Suljetussa piirissä varaus säilyy ja siten virta on kaikkialla piirissä sama. Kun varaus kulkee potentiaalieron läpi, sen potentiaalienergia muuttuu, yleensä pienenee. Jotta tasainen virta voidaan pitää yllä, piirissä pitää olla paikka, jossa varauksen potentiaalienergia kasvaa.

Kun varaus kulkee *jännitelähteen* läpi, sen potentiaalienergia kasvaa. Työ, joka tehdään yksikkövaraukselta kohti, on *lähdejännite*  $\mathcal{E}$  (sähkömotorinen voima, smv). Yksikkö:  $[\mathcal{E}] = \text{V}$ . Jännitelähteitä voidaan kuvata myös niiden kokonaisvarauksella  $Q$ :  $[Q] = \text{A} \cdot \text{h} = 3600 \text{ C}$ .



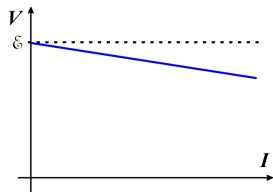
Jännitelähteitä ovat esimerkiksi paristo, akku, sähkögeneraattori, aurinkokenno, termopari ja polttokenno, jotka muuttavat kemiallista, mekaanista, säteily-, lämpö- jne. energiaa sähköenergiaksi.

## 26 Tasavirtapiirit

Todellisessa jännitelähteessä napojen välillä oleva jännite, ns. *napajännite* ei ole sama kuin lähdejännite, vaan jännitelähteellä on myös sisäinen resistanssi. Tällöin napajännite on

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir, \quad (149)$$

missä  $r$  on jännitelähteen sisäinen resistanssi.



Huomioita:

- ▶ Johdinsilmukan ympäri kokonaispotentiaalinen muutoksen pitää hävitä, koska energia säilyy, eli  $\mathcal{E} - Ir - IR = 0$ .
- ▶ Hyvällä paristolla tai akulla sisäinen resistanssi on hyvin pieni ( $\sim 0,01 \Omega$ ).
- ▶ Vanhan tai kylmän akun tai pariston lähdejännite ei ole juurikaan pienentynyt alkuperäisestä, mutta sisäinen resistanssi on saattanut kasvaa useilla kertaluokilla.

## 26 Tasavirtapiirit

### Vastukset sarjassa (G 26-2)

Sarjaan kytkettyjen vastusten läpi kulkee **sama virta**  $I$  (varaus säilyy). Jännitehäviöt vastuksissa

$$V_1 = IR_1 \quad (150)$$

$$V_2 = IR_2 \quad (151)$$

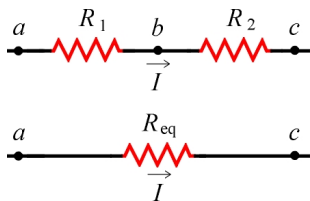
Kokonaisjännitehäviö (energia säilyy)

on

$$V = V_1 + V_2 = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2). \quad (152)$$

Sarjaan kytketyt vastukset voidaan korvata yhdellä vastuksella, jonka *ekvivalenttinen resistanssi* on

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2. \quad (153)$$



## 26 Tasavirtapiirit

### Vastukset rinnan (G 26-2)

Rinnan kytkettyjen vastusten yli on **sama jännitehäviö**  $V_{ab}$  (energia säilyy). Virta jakautuu eri vastuksille

$$I_1 = \frac{V}{R_1} \quad (154)$$

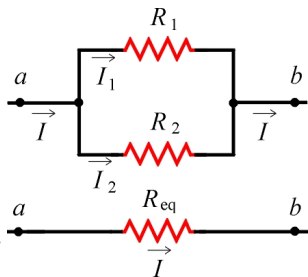
$$I_2 = \frac{V}{R_2} \quad (155)$$

Kokonaisvirta (varaus säilyy) on

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (156)$$

Rinnan kytketyt vastukset voidaan korvata yhdellä vastuksella, jonka *ekvivalenttinen resistanssi* on

$$R_{\text{eq}} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (157)$$



## 26 Tasavirtapiirit

### Kirchhoffin lait (G 26-3)

Usein kuitenkin piirit ovat sellaisia, että niitä ei pystytä analysoimaan pelkästään tarkastelemalla systeemin ekvivalenttisia vastuksia ja kondensaattoreita. Esim. piirissä useita jännitelähteitä.

**Kirchhoffin lait** toimivat mille tahansa piirille:

1. **Liitoskohtasääntö:** Missä tahansa liitoskohdassa, jossa virta voi jakautua, liitoskohtaan tulevien ja siitä lähtevien virtojen pitää olla yhtä suuret, eli

$$\sum_i I_i = 0. \quad (158)$$

2. **Silmukkasääntö:** Kun suljetussa johdinsilmukassa kulkee virta, niin potentiaalierojen summa silmukassa pitää olla nolla, eli

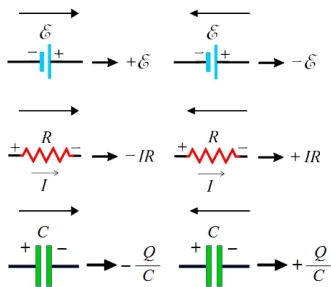
$$\sum_i V_i = 0. \quad (159)$$

Liitoskohtasääntö seuraa varauksen ja silmukkasääntö energian säilymisestä.

## 26 Tasavirtapiirit

### Ratkaisuohje

1. Piirrä kytkentäkaavio.
2. Valitse virran kulkusuunta piirin jokaisessa osassa ja merkitse se kaavioon. Merkitse jokaisen jännitelähteen, vastuksen ja kondensaattorin korkeampi potentiaali '+'-merkillä ja alhaisempi potentiaali '-'-merkillä.
3. Sovella liitoskohtasääntöä jokaisessa kohdassa, missä virta jakautuu.
4. Sovella silmukkasääntöä niin monen lenkkiin, että saat tarvittavat yhtälöt tuntemattomien ratkaisemiseksi. Silmukkaa ei tarvitse kiertää virran suuntaan.
5. Ratkaise yhtälöryhmä.
6. Tarkista tulos.



## 26 Tasavirtapiirit

### Esimerkki: $RC$ -piirit (G 26-5)

Tarkastellaan esimerkkinä  $RC$ -piiriä, joka sisältää vastuksen ja kondensaattorin ja jota voidaan käyttää esim. salamavalolaitteissa.

**Kondensaattorin varaaminen.** Kondensaattori on varaamaton hetkellä  $t = 0$ . Jollakin hetkellä  $t$  kondensaattorin varaus on  $Q(t)$  ja piirissä kulkee virta  $I(t)$ . Silmukkasäännöstä seuraa (myötäpäivään)

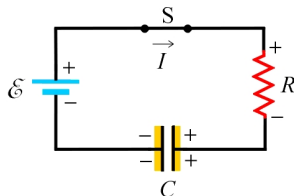
$$\mathcal{E} - I(t)R - \frac{Q(t)}{C} = 0. \quad (160)$$

Kondensaattorin varaus kasvaa, joten virran suunta on kasvavan varauksen suuntaan

$$I(t) = + \frac{dQ(t)}{dt}, \quad (161)$$

jolloin

$$\mathcal{E} - R \frac{dQ(t)}{dt} - \frac{Q(t)}{C} = 0. \quad (162)$$





## 26 Tasavirtapiirit

Järjestelemällä termejä

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}(Q - C\mathcal{E}) \Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ'}{Q' - C\mathcal{E}} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \quad (163)$$

saadaan ratkaistua varauksen aikariippuvuus

$$Q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/\tau}), \quad (164)$$

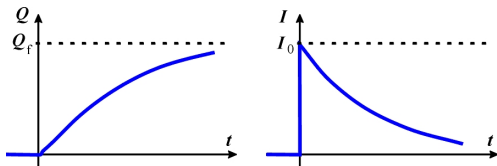
missä  $Q_f = C\mathcal{E}$  on kondensaattorin varaus lopussa ja  $RC$ -piirin aikavakio

$$\tau = RC. \quad (165)$$

Kun  $\tau$  on pieni, niin kondensaattori varautuu nopeasti. Virta on

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0e^{-t/\tau} \quad (166)$$

missä  $I_0 = \mathcal{E}/R$  on virta alussa



## 26 Tasavirtapiirit

**Kondensaattorin purkaminen.** Kondensaattorilla on aluksi varaus  $Q_0$ , jolloin jännite levyjen välillä on  $V_0 = Q_0/C$ . Kytetään vastus kondensaattorin kanssa samaan piiriin, jolloin hetkellä  $t = 0$  virta on

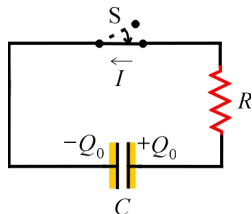
$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC}. \quad (167)$$

Kondensaattorin varaus pienenee kuitenkin koko ajan, joten virta mielivaltaisella hetkellä  $t$  on

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}. \quad (168)$$

Silmukkasäännöstä saadaan (vastapäivään)

$$\frac{Q(t)}{C} - I(t)R = 0. \quad (169)$$



## 26 Tasavirtapiirit

Eliminoimalla virta yhtälöistä (168) ja (169) saadaan

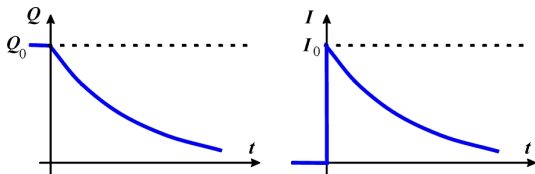
$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \Rightarrow \int_{Q_0}^Q \frac{dQ'}{Q'} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}. \quad (170)$$

Ratkaisuna saadaan kondensaattorin varauksen purkautumiselle aikariippuvuus

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad (171)$$

joka pienenee eksponentiaalisesti. Virran aikariippuvuus on vastaavasti

$$I = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/\tau}. \quad (172)$$



## 26 Tasavirtapiirit

### Energian säilyminen kondensaattoria varattaessa

Kondensaattoriin saatiin varattua kokonaisvaraus  $Q_f = \mathcal{E}C$ . Paristo tekee varaamisessa työn

$$W = Q_f \mathcal{E} = C \mathcal{E}^2, \quad (173)$$

josta puolet varastoituu kondensaattoriin

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} Q_f \mathcal{E} = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2. \quad (174)$$

Toinen puoli menee vastuksen lämpöhäviöihin. Vastuksen tehohäviö

$$\frac{dW_R}{dt} = I^2 R = \left( \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \right)^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}, \quad (175)$$

josta integroimalla saadaan

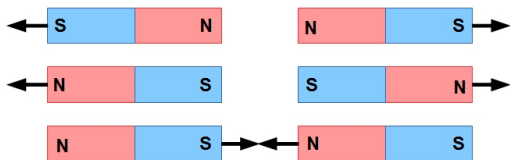
$$W_R = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2. \quad (176)$$

Tulos on riippumaton resistanssista  $R$ . Kun kondensaattoria varataan, puolet varastoituu kondensaattoriin ja puolet menee lämpöhäviöihin riippumatta resistanssin arvosta.

## 27 Magnetismi

### Magneetit ja magneettikentät (G 27-1)

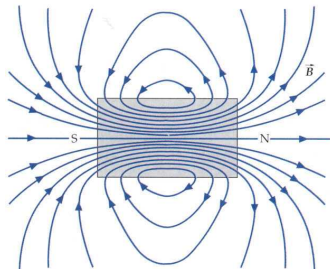
- ▶ Magneettisilla kappaleilla on pohjois- ja etelänapa. Magneetin pohjoisnapa (N) vetää puoleensa toisen magneetin etelänapaa (S) ja päinvastoin, ja samanlaiset navat hylkivät toisiaan.



- ▶ Esim. kompassineula, kestopagneetit, maan magneettikenttä.
- ▶ Vaikka sähköiset varaukset ja magneettiset navat ovat hyvin samankaltaiset, niin yksi tärkeä ero kuitenkin on: magneettiset navat esiintyvät aina pareittain; magneettista monopolia ei ole havaittu.
- ▶ Tärkeitä sovelluksia: sähkömoottori, keittiölaitteet, kodin elektroniikka, tiedon talletuslaitteet, jne.

## 27 Magnetismi

**Magneettiset kenttäviivat.** Vastaavasti kuten sähkökenttää, magneettikenttääkin voidaan kuvata kenttäviivoilla. Molemmissa tapauksissa kentän suunta osoitetaan nuollilla ja suuruus viivojen tiheydellä, kuitenkin on olemassa kaksi tärkeää eroa:

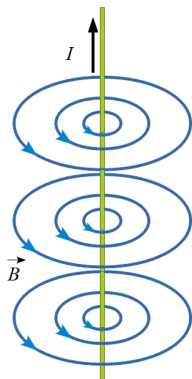


1. Sähkökentän kenttäviivat osoittavat positiiviseen varaukseen kohdistuvan voiman suunnan, kun taas magneettikentän kenttäviivat ovat kohtisuorassa liikkuvaan varattuun hiukkaseen kohdistuvien voimien kanssa.
2. Sähkökentän kenttäviivat alkavat positiivisesta ja päättyvät negatiiviseen varaukseen, kun taas magneettiset kenttäviivat eivät almistään eivätkä pääty mihinkään vaan ovat suljettuja käyriä.

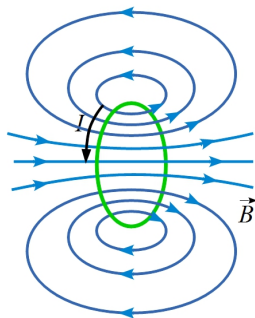
Magneettikentän kenttäviivat osoittavat pois päin N-navasta ja kohti S-napaa ja ne osoittavat suunnan, johon kompassineula osoittaisi.

## 27 Magnetismi

### Virtajohtimen aiheuttama kenttä (G 27-2)



Suora virtajohtin



Virtasilmukka

Huom: Oikean käden muistisääntö.

## 27 Magnetismi

### Magneettinen voima (G 27-3 & 27-4)

#### Pistevarauksen liike magneettikentässä

Kokeellisesti on havaittu, että kun varaus  $q$  liikkuu nopeudella  $\vec{v}$  magneettikentässä  $\vec{B}$ , niin varaukseen kohdistuu magneettinen voima

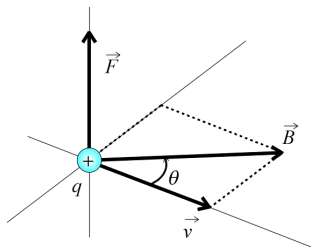
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB \sin \theta \hat{n}. \quad (177)$$

Yksikkö:  $[B] = \text{T (tesla)} = \text{N}/(\text{A}\cdot\text{m})$ .

Maan magneettikenttä on luokkaa  $10^{-4} \text{ T}$ , voimakas kestopagneetti  $0,1 - 0,5 \text{ T}$  ja sähkömagneetti  $1 - 2 \text{ T}$ . Joskus on käyttökelpoisempaa käyttää yksikköä  $1 \text{ G (gaussi)} = 10^{-4} \text{ T}$ .

Kun varattu hiukkanen liikkuu alueessa, jossa on sekä  $\vec{E}$ - että  $\vec{B}$ -kenttä, niin siihen kohdistuu ns. **Lorentzin voima**

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (178)$$





## 27 Magnetismi

Esim. Tarkastellaan varattua hiukkasta, jonka nopeus  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , homogeenisessa magneettikentässä. Voima

$$F = qvB \quad (179)$$

pitää varauksen ympyräradalla, joten se vastaa kappaleen keskeiskiihtyvyydestä, jolle

$$F = ma = m \frac{v^2}{r}, \quad (180)$$

josta voidaan ratkaista ympyräliikkeen säde

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (181)$$

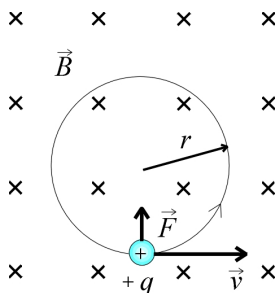
Ympyräliikkeen jaksonaika, *syklotronijakso* on

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (182)$$

ja *syklotronitaajuus* on

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}, \quad (183)$$

joka ei riipu säteestä tai nopeudesta vaan suhteesta  $q/m$ .

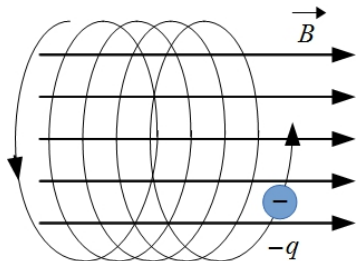


## 27 Magnetismi

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, jossa varattu hiukkanen tulee *homogeeniseen magneettikenttään, joka ei ole kohtisuorassa* hiukkasen nopeuteen nähden. Nyt hiukkasen nopeus kannattaa esittää komponenttimuodossa

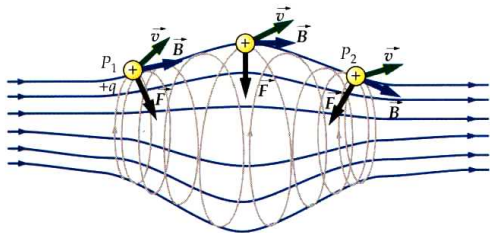
$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}, \quad (184)$$

missä magneettikenttä  $\vec{B}$  vaikuttaa komponenttiin  $\vec{v}_{\perp}$  kuten edellä ympyräliikkeen tapauksessa, mutta komponenttiin  $\vec{v}_{\parallel}$  se ei vaikuta. Tuloksena on spiraalirata.



## 27 Magnetismi

Kun magneettikenttä on *epähomogeeninen*, niin varausten liike voi olla siinä varsin monimutkaista. Tätä käytetään hyväksi esim. magneettisessa pullossa (esim. plasman kasaamiseen yhteen paikkaan fuusioreaktorissa). Maan magneettikenttä toimii vastaavalla tavalla varastoidessaan varattuja hiukkasia ns. van Allenin vöihin.



Huom. Koska  $\vec{F} \perp \vec{v}$ , niin voima muuttaa varauksen nopeuden suuntaa, mutta ei sen suuruutta. Siksi magneettikenttä ei tee työtä pistevaraukseen ( $dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = 0$ ) eikä siten vaikuta varauksen liike-energiaan.

## 27 Magnetismi

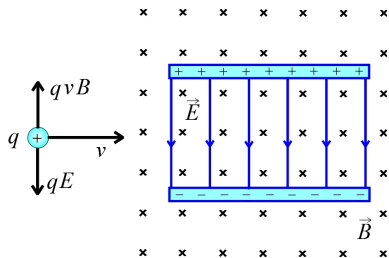
Esim. **Nopeusvalitsin.** Varattuun hiukkaseen kohdistuva magneettinen voima voidaan "kumota" sopivasti valitulla sähkökentällä. Kun läsnä on sekä sähkö- että magneettikenttä, voima saadaan lausekkeesta

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (185)$$

Jos kentät ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden sekä nopeuteen nähden ja jos  $qE = qvB$ , niin hiukkaseen kohdistuva kokonaisvoima  $\vec{F} = 0$ . Tällöin varauksen nopeus on

$$v = \frac{E}{B}, \quad (186)$$

joka on riippumaton sekä massasta että varauksesta. Kenttiä muuttamalla saadaan valittua vain ne hiukkaset, jotka kulkevat suoraan nopeusvalitsimen läpi nopeudella  $v = E/B$ .



## 27 Magnetismi

### Virtajohtoon kohdistuva voima (G 27-3)

Johdinalkiossa, poikkipinta-ala  $A$  ja pituus  $\ell$ , kulkee virta  $I$ . Jos johdinalkio on magneettikentässä  $\vec{B}$ , niin johdinalkioon kohdistuva voima on

$$F = (nA\ell)(qv_d B) \sin \theta = (nqv_d A)\ell B \sin \theta = I\ell B \sin \theta, \quad (187)$$

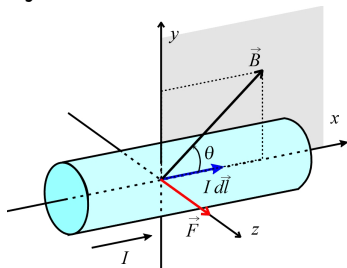
missä  $n$  on varauksenkuljettajien lukumäärätiheys,  $v_d$  niiden kulkeutumisnopeus ja  $\theta$  kentän ja virtajohtoon välinen kulma.

Yleisesti suoralle johtimelle

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}. \quad (188)$$

Yleisesti mille tahansa johtimelle

$$\vec{F} = \int I d\vec{\ell} \times \vec{B}. \quad (189)$$



## 27 Magnetismi

### Virtasilmukkaan kohdistuva vääntömomentti (G 27-5)

Tarkastellaan suorakaiteen muotoista virtasilmukkaa, jonka normaali  $\hat{n}$  on kulmassa  $\theta$  homogeeniseen magneettikenttään  $\vec{B}$  nähden.

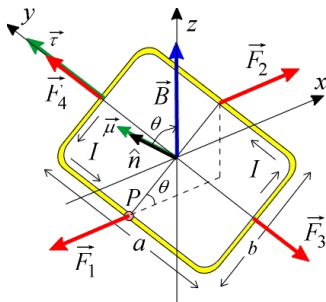
(Kun virta kulkee oikean käden sormien osoittamaan suuntaan, niin peukalo osoittaa silmukan normaalin  $\hat{n}$  suunnan.)

Silmukan  $a$ -pituisiin sivuihin kohdistuvat voimat ovat suuruudeltaan yhtäsuuret

$$F_1 = F_2 = laB, \quad (190)$$

mutta vastakkaisuuntaiset, ja vastaavasti  $b$ -pituisiin sivuihin vaikuttavat voimat, joten kokonaisvoima

$$\vec{F}_{\text{kok}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0. \quad (191)$$



## 27 Magnetismi

Vääntömomentti vaikuttaa kuitenkin silmukkaan. Se voidaan laskea minkä tahansa pisteen esim.

$P$ :n suhteen:

$$\tau = F_2 b \sin \theta = I a B b \sin \theta = I A B \sin \theta, \quad (192)$$

missä  $A = ab$  virtasilmukan pinta-ala. Magneettikenttä pyrkii kiertämään virtasilmukkaa siten, että silmukan normaali on samaan suuntaan kentän kanssa. Jos silmukassa on tiheässä  $N$  kierrosta (solenoidi), niin vääntömomentti on

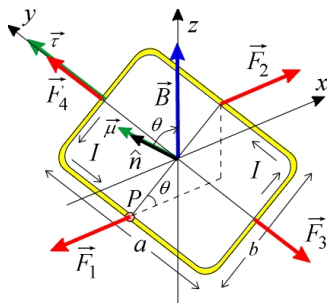
$$\tau = N I A B \sin \theta. \quad (193)$$

Määritellään vielä virtasilmukan *magneettinen (dipoli)momentti*

$$\vec{\mu} = I A \hat{n} = I \vec{A}, \quad (194)$$

jonka avulla vääntömomentti voidaan kirjoittaa yhdelle silmukalle muodossa

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (195)$$



## 27 Magnetismi

Kun magneettinen dipoli kiertyy magneettikentässä, kenttä tekee magneettiseen dipoliin työn

$$dW = -\tau d\theta = -\mu B \sin \theta d\theta. \quad (196)$$

Potentiaalienergian muutos on

$$dU = -dW = +\mu B \sin \theta d\theta, \quad (197)$$

josta integroimalla saadaan

$$U = -\mu B \cos \theta + U_0. \quad (198)$$

Valitsemalla potentiaalienergian nollakohtaksi  $U(\theta = 90^\circ) = 0$  saadaan magneettisen dipolin potentiaalienergia

$$U = -\mu B \cos \theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (199)$$

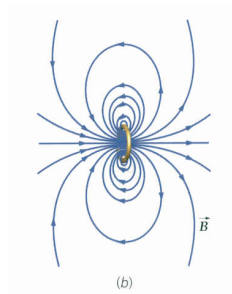
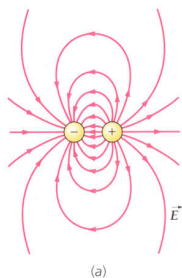
Huom: Saadut tulokset ovat voimassa kaikenmuotoisille virtasilmukoille.

Huom: Virtasilmukka magneettikentässä käyttäytyy samalla tavalla kuin sähköinen dipoli sähkökentässä.



## 27 Magnetismi

Virtasilmukkaa kutsutaan *magneettiseksi dipoliksi*, joka on magnetismin perusyksikkö. Vaikka sähköisen ja magneettisen dipolin muodostamat kentät kaukana näyttävätkin samanlaisilta, kentät ovat eri suuntiin dipolien 'sisällä'.



### Sovelluksia (G 27-6)

Esim. Sähkömoottori.

Esim. Kaiutin.

Esim. Galvanometri.

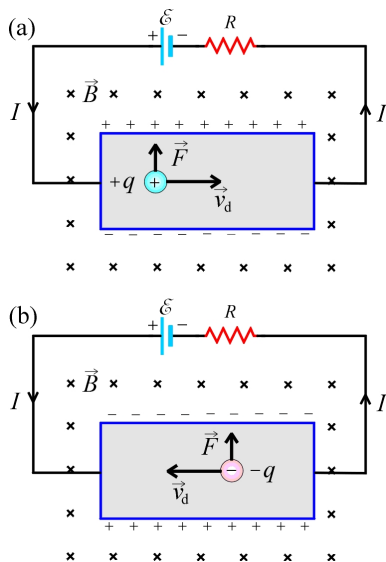
## 27 Magnetismi

### Hallin ilmiö (G 27-8)

Koska liikkuvaan varaukseen vaikuttaa magneettinen voima kohtisuoraan liikettä vastaan, niin johdinlangassa varaukset siirtyvät johtimen toiseen laitaan magneettikentän vaikutuksesta. Tätä kutsutaan **Hallin ilmiöksi**.

Tarkastellaan kuvan mukaista systeemiä, jossa johtavassa nauhassa on varauksenkuljettajina (a) positiiviset tai (b) negatiiviset varaukset. Nauhan reunojen välille (leveys  $w$ ) syntyy tasapainotilassa ( $qE = qv_d B$ ) ns. *Hallin jännite*

$$V_H = Ew = v_d Bw. \quad (200)$$



## 27 Magnetismi

Varauskuljettajien *merkki* saadaan Hallin jännitteen suunnasta ja *lukumäärätiheys* voidaan ratkaista virran ( $I = nqv_dA$ ) avulla

$$n = \frac{I}{qv_dA} = \frac{IB}{(A/w)eV_H} = \frac{IB}{teV_H}, \quad (201)$$

missä  $t = A/w$  on nauhan paksuus.

*Puolijohteissa* varauksenkuljettajina voi toimia sekä elektronit että positiiviset aukot, *metalleissa* vain elektronit.

Hallin ilmiö mahdollistaa varauksen *kulkeutumisenopeuden*  $v_d$  mittaamisen: kun johdinta liikutetaan nopeudella  $v_d$  varauksen kuljettajien nopeuden suuntaa vastaan, niin varaukset ovat paikallaan magneettikentässä, jolloin  $V_H = 0$ .

Hallin jännite mahdollistaa myös *magneettikentän* mittaamiseen. Kalibroidaan laite tunnetuilla kentillä, jonka jälkeen siitä voidaan lukea  $V_H$ , jolloin

$$B = \frac{nte}{I} V_H. \quad (202)$$

## 27 Magnetismi

### Massaspektrometri (G 27-9)

Massaspektrometrillä voidaan erotella esim. aineen eri isotoopit toisistaan. Kiihdytetään ionit sähkökentässä, jolloin niiden liike-energia on

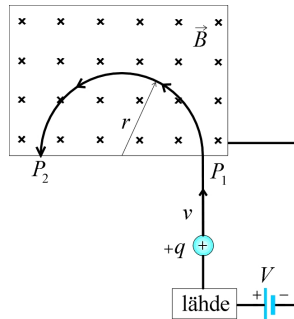
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = qV. \quad (203)$$

Homogeenisessä magneettikentässä ionit liikkuvat ympyrärataa, jonka säde saadaan yhtälöstä (181). Tällöin

$$\frac{1}{2}m \left( \frac{rqB}{m} \right)^2 = qV, \quad (204)$$

josta edelleen

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2V}. \quad (205)$$



Huom: Massaspektrometrin erotuskykyä voidaan edelleen parantaa lisäämällä nopeusvalitsin ennen magneettikenttää.

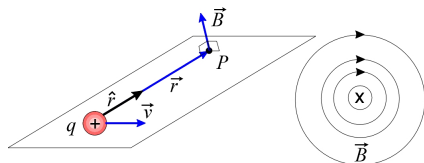
## 28 Magneettikentän alkuperä

### Liikkuvan varauksen aikaansaama kenttä (G 28-1 & 28-6)

#### Liikkuvan pistevarauksen muodostama magneettikenttä

Vakionopeudella  $\vec{v}$  liikkuva pistevaraus  $q$  muodostaa ympärillään magneettikentän

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{r}}{4\pi r^2}, \quad (206)$$



missä  $\hat{r} = \vec{r}/r$  on yksikkövektori, joka osoittaa varauksesta etäisyydellä  $r$  olevaan tarkastelupisteeseen  $P$ . Tyhjiön permeabiliteetti (läpäisevyys)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (207)$$

Luonnonvakioilla  $\epsilon_0$  ja  $\mu_0$  sekä valon nopeudella  $c$  tyhjiössä on yhteys

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (208)$$

## 28 Magneettikentän alkuperä

### Virtajohtimen muodostama magneettikenttä

Virtajohtimelle

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq v_d \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nqA dl v_d \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}. \quad (209)$$

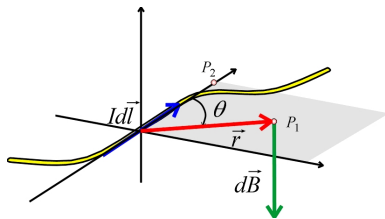
Virtajohtimen virta-alkion  $Id\vec{\ell}$  aikaansaama magneettikenttä on siis

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad (210)$$

joka on **Biot-Savartin laki**, joka vastaa Coulombin lakia sähkökentille.

Virtajohtimen kokonaiskenttä on vektorisumma johdinalkioiden muodostamista kentistä

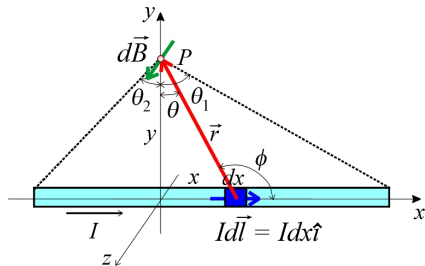
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (211)$$



## 28 Magneettikentän alkuperä

### Esim. Suora virtajohtin.

Tarkastellaan suoran virtajohtimen aikaansaamaa magneettikenttää pisteessä  $P$ . Valitaan virtajohtimen suunnaksi positiivinen  $x$ -akseli ja tarkastelupiste  $y$ -akselilta. Kaikkien virtajohtinalkioiden aiheuttama kenttä pisteessä  $P$  on  $z$ -akselin suuntainen



$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \sin \phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \cos \theta. \quad (212)$$

Johdinalkiolle

$$dx = d(y \tan \theta) = y \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{r^2}{y} d\theta. \quad (213)$$

## 28 Magneettikentän alkuperä

Tällöin magneettikenttä pisteessä  $P$  on

$$\begin{aligned} B_z &= \int dB_z = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\theta_1} \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \cos \theta d\theta + \int_0^{\theta_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2). \end{aligned} \quad (214)$$

Kun virtajohdin on hyvin pitkä ( $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ ), niin

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}, \quad (215)$$

missä  $y$  on kohtisuora etäisyys virtajohtimesta.

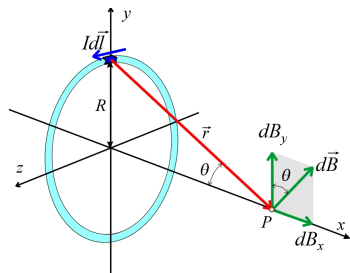
Huom: Vertaa tulosta vastaavaan sähkökenttään  $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$ .



## 28 Magneettikentän alkuperä

### Esim. Johdinsilmukka.

Tarkastellaan  $yz$ -tasossa olevan johdinsilmukan aikaansaama magneettikenttä  $x$ -akselilla. Integroimalla yli koko silmukan  $yz$ -tason suuntainen magneettikenttä kumoutuu symmetrian perusteella, joten riittää tarkastella pelkkää  $x$ -akselin suuntaista kenttää



$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}, \quad (216)$$

josta integroimalla saadaan

$$B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (217)$$

## 28 Magneettikentän alkuperä

Origossa

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (218)$$

Kaukana virtasilmukasta ( $x \gg R$ )

$$B_x = \frac{\mu_0 \pi I R^2}{2\pi |x^3|} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi |x^3|}, \quad (219)$$

missä  $\mu = IA = I\pi R^2$  on magneettinen momentti. Tulos on magneettisen dipolin kenttä kaukana dipolista.

Huom. Vertaa tulosta sähköisen dipoliin ( $E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{|x^3|}$ ); dipolikentät heikkenevät samalla tavalla kaukana dipolista.

## 28 Magneettikentän alkuperä

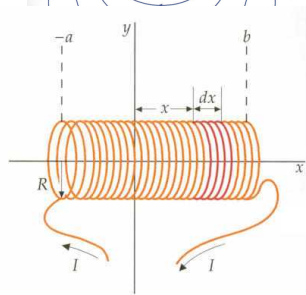
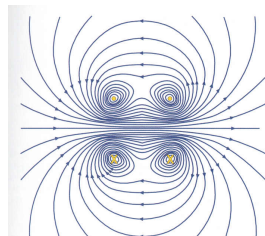
### Esim. Solenoidi.

Solenoidissa on monta tiukkaan kiedottua virtasilmukkaa vierivieressä spiraalin muodossa. Kun johtimessa kulkee virta, solenoidin sisälle syntyy lähes homogeeninen magneettikenttä. Solenoidin muodostamat kenttäviivat sekä sen sisä- että ulkopuolella ovat samanlaiset kuin vastaavan muotoisella sauvamagneetilla.

Tarkastellaan solenoidia, jonka pituus on  $L$ , jossa on  $N$  johdinsilmukkaa ja jossa kulkee virta  $I$ . Yhtälöstä (217) saadaan alkion  $dx$  kenttä origossa

$$dB_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{(nI dx) R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (220)$$

jossa  $n = N/L$ .



## 28 Magneettikentän alkuperä

Integroimalla saadaan

$$\begin{aligned} B_x &= \int_{-a}^b dB_x = \frac{\mu_0}{2} R^2 n l \int_{-a}^b \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 n l \left( \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right). \end{aligned} \quad (221)$$

Hyvin pitkälle solenoidille ( $a, b \gg R$ ) saadaan

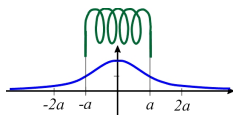
$$B_x = \mu_0 n l = \frac{\mu_0 N I}{L}. \quad (222)$$

Pitkän solenoidin toisessa päässä kenttä puolittuu

$$B_x = \frac{1}{2} \mu_0 n l, \quad (223)$$

koska  $a = 0$  tai  $b = 0$ .

Huom. Sähköinen analogia: homogeeninen sähkökenttä kondensaattorin levyjen välissä.

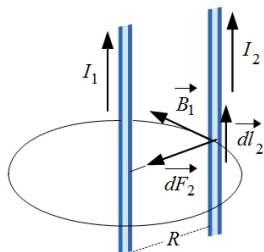


## 28 Magneettikentän alkuperä

### Samansuuntaiset johtimet

(G 28-2 & 28-3)

Tarkastellaan kahta samansuuntaista toisistaan etäisyydellä  $R$  olevaa virtajohdinta, joissa kulkee virta samaan suuntaan. Toinen virtajohdin ( $I_1$ ) vetää puoleensa toisen johtimen virta-alkiota ( $I_2 d\vec{l}_2$ ) voimalla



$$dF_2 = |I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1| = I_2 dl_2 B_1 = I_2 dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}, \quad (224)$$

missä on oletettu, että johtimet ovat hyvin pitkiä verrattuna niiden väliseen etäisyyteen. Tällöin

$$\frac{dF_2}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}. \quad (225)$$

**Ampeerin määritelmä:** Kun kahden hyvin pitkässä ja ohuessa virtajohdinta, jotka ovat etäisyydellä 1 metri toisistaan tyhjiössä, kulkee yhden ampeerin virtaa samaan suuntaan, johtimien välillä vaikuttaa voima, joka on suuruudelta  $2 \times 10^{-7}$  newtonia johdinmetriä kohti.

UUSITTU 2019

## 28 Magneettikentän alkuperä

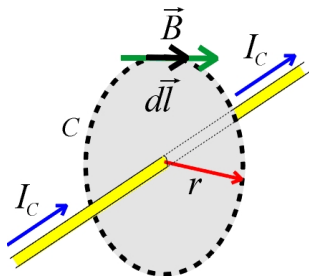
### Ampèren laki (G 28-4)

Symmetrisissä tapauksissa sähkökenttä saatiin laskettua helpommin Gaussin kuin Coulombin laista. Vastaavasti symmetrinen magneettikenttä voidaan laskea helposti **Ampèren laista**

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_C. \quad (226)$$

Yhtälön vasen puoli, jossa summataan magneettikenttän tangenciaaliset komponentit suljettua käyrää  $C$  pitkin, on verrannollinen oikean puolen kokonaisvirtaan  $I_C$ , joka kulkee käyrän  $C$  rajoittaman pinnan läpi.

Kuvassa esimerkkinä suoran virtajohtimen aikaansaama kenttä.



## 28 Magneettikentän alkuperä

### Huomioita:

- ▶ Voimassa minkä muotoisille johteille ja suljetuille käyrille tahansa, kunhan virta on jatkuva (ei ala mistään äärellisestä pisteestä eikä pääty mihinkään äärelliseen pisteeseen).
- ▶ Tasainen virta, ei magneettisia materiaaleja, ei ajasta riippuvia  $\vec{E}$ -kenttiä.
- ▶ *Maxwellin yhtälöissä* esiintyy Ampèren lain yleistetty muoto, jonka avulla voidaan tarkastella myös mm. epäjatkuvia virtoja.
- ▶ Konservatiivisille voimille, kuten sähköstaattiselle voimalle  $\vec{F} = q\vec{E}$ ,  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ , mutta  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$ . Jälkimmäinen lauseke ei kuitenkaan liity magneettikentän tekemään työhön, koska  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , toisaalta magneettinen voima ei ole konservatiivinen, koska se riippuu paikan lisäksi myös varauksen nopeudesta. Itse asiassa magneettinen voima ei tee edes työtä pistevarauksiin.

## 28 Magneettikentän alkuperä

Esim. Suoralle äärettömän pitkälle virtajohtimelle

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \oint_C d\ell = B(2\pi r) \stackrel{(226)}{=} \mu_0 I_C, \quad (227)$$

josta (kun  $I_C = I$ ) saadaan

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (228)$$

eli sama tulos kuin aikaisemminkin (yhtälö (215)).

Esim. Pitkässä suorassa virtajohtimessa, jonka säde on  $R$  (sylinteri), kulkee virta  $I$ . Magneettikenttä johteen sisä- ja ulkopuolella on

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r, \quad r \leq R \quad (229)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r \geq R. \quad (230)$$



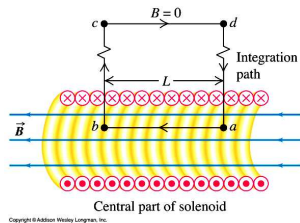
## 28 Magneettikentän alkuperä

### Solenoidi ja toroidi (G 28-5)

Esim. Solenoidin sisällä

$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = BL \stackrel{(226)}{=} \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0 nI, \quad (231)$$

missä  $n = N/L$ . Vrt. yhtälö (222).

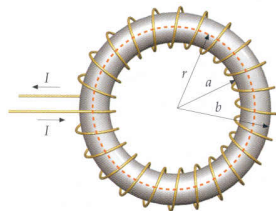


Esim. Toroidin ympärille on kiedottu virtajohdin. Magneettikenttä etäisyyden funktiona on

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \quad a < r < b \quad (232)$$

$$B = 0, \quad r < a \quad \text{tai} \quad r > b. \quad (233)$$

Kun  $r \gg (b - a)$ , niin magneettikenttä toroidin sisällä on lähes homogeeninen ( $\rightarrow$  solenoidi).



## 28 Magneettikentän alkuperä

### **Magneettiset materiaalit** (G 28-7 – G 28-10)

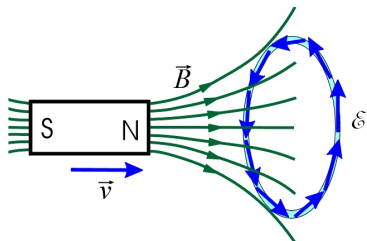
Aine sisältää magneettisia dipoleja, jotka sopivasti järjestäytyessään saavat aikaiseksi magneettikentän. Dipolit syntyvät joko elektronien liikkeestä atomeissa tai ovat aineelle ominaisia, esim. alkeishiukkas-ten *spin*.

Aineen rakenne -kurssilla tarkastellaan vähän tarkemmin magneettisia materiaaleja.

## 29 Sähkömagneettinen induktio

### Indusoitunut lähdejännite (G 29-1)

Kokeellisesti on havaittu, että kun magneettikenttä  $\vec{B}$  muuttuu virtasilmukan rajoittaman pinnan läpi, silmukkaan indusoituu lähdejännite  $\mathcal{E}$ , joka on verrannollinen magneettivuon muutoksen suuruuteen.



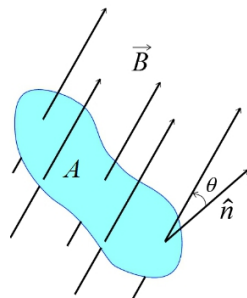
- ▶ Liikuttalemalla kela magneettikentässä tai magneettia kelan lähellä *muuttuva magneettikenttä* kelan läpi saa aikaiseksi kelaan indusoituneen lähdejännitteen ja induktiovirran.
- ▶ Tulos on riippumaton siitä kumpi liikkuu (suhteellinen liike).
- ▶ Tulos riippuu ainoastaan magneettivuon muutoksesta.
- ▶ Induktiovirran suuruus riippuu aineen resistanssista ( $I = \mathcal{E}/R$ ).

## 29 Sähkömagneettinen induktio

### Sähkömagneettinen induktio (G 29-2)

**Magneettivuo** pinnan läpi määritellään samalla tavalla kuin sähkövuo. Jos pinta on taso, jonka pinta-ala on  $A$  ja jonka läpi kulkee homogeeninen magneettikenttä  $\vec{B}$  kulmassa  $\theta$  pinnan normaaliin  $\hat{n}$  nähden, niin vuo on

$$\Phi_B = BA \cos \theta = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (234)$$



Yksikkö:  $[\Phi_B] = \text{Wb (weber)} = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{N} \cdot \text{m} / \text{A}$ .

Yleisessä tapauksessa  $dA$  on pinta-ala-alkio, jonka normaalin suuntainen yksikkövektori on  $\hat{n}$ . Magneettivuo pinnan läpi on

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B_n dA = \int_S B \cos \theta dA. \quad (235)$$

## 29 Sähkömagneettinen induktio

**Faradayn laki** kertoo kelaan indusoituvan lähdejännitteen ja magneettivuon muutoksen välisen yhteyden:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (236)$$

missä  $N$  on kelan johdinkierrosten lukumäärä. (Merkki saadaan oikein valitsemalla ensin magneettivuon lausekkeessa pinnan suunta  $\hat{n}$ , minkä jälkeen silmukan positiivinen kiertosuunta määräytyy oikean käden muistisäännöllä.)

Faradayn laki on *yksi Maxwellin yhtälöistä*.

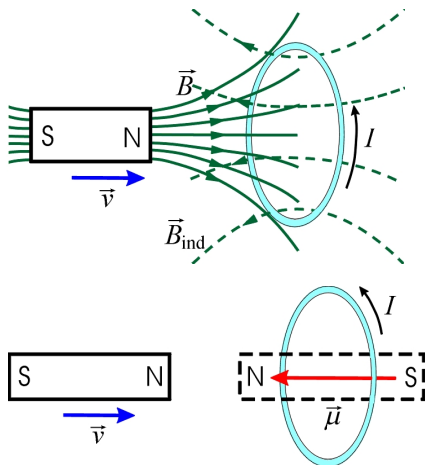
**Lenzin laki** kertoo Faradayn laissa olevan merkin eli indusoituneen lähdejännitteen suunnan:

**Indusoituva lähdejännite ja induktiovirta suuntautuvat siten, että ne pyrkivät vastustamaan muutosta, joka saa ne aikaan.**

## 29 Sähkömagneettinen induktio

Esim. Johdinsilmukkaa kohti liikuvan sauvamagneetin magneettivuokasvaa silmukan läpi, jolloin silmukkaan indusoituu virta ( $I = \mathcal{E}/R$ ), jonka aikaansaama magneettivuokasvaa magneettivuon kasvua silmukan läpi.

Johdinsilmukka käyttäytyy siis kuin pieni sauvamagneetti, joka hylkii silmukkaa kohti tulevaa sauvamagneettia.



Esim. Mikrofonit, tiedon tallennus, pankkikortin lukijat, hammasharjan laturi, seismografi, jne. (G 29-8)

## 29 Sähkömagneettinen induktio

### Esim. Liikkuvaan johteeseen syntyvä lähdejännite (G 29-3)

Tarkastellaan erästä Faradayn lain erikoistapausta. Johtavilla kiskoilla homogeenisessa magneettikentässä liikutetaan johtavaa tankoa nopeudella  $v$ . Magneettivuo johdinsilmukan läpi on

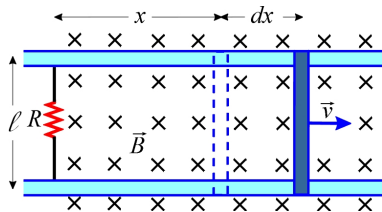
$$\Phi_B = BA = Blx. \quad (237)$$

Kun tankoa liikutetaan, kasvaa johdinsilmukan pinta-ala ja täten magneettivuo muuttuu

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv, \quad (238)$$

missä  $v$  on tangon nopeus. Tällöin indusoituneen lähdejännitteen suuruus on

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = Blv. \quad (239)$$



## 29 Sähkömagneettinen induktio

Faradayn lain mukaan johdinsilmukkaan indusoituu lähdejännite, joka pyrkii pienentämään kasvavaa magneettivuota. Tällöin lähdejännite suuntautuu siten, että induktiovirta ( $I = \mathcal{E}/R$ ) kulkee silmukassa vastapäivään, eli tangossa ylöspäin. Tankoon, jossa kulkee virta, kohdistuu magneettinen voima ( $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$ ), joka on vastakkaissuuntainen tangon liikkeeseen nähden. Magneettikenttä pyrkii siis hidastamaan tangon liikettä. Mitä enemmän yritetään lisätä tangon nopeutta, sitä enemmän magneettikenttä yrittää jarruttaa sen kulkua.

### Huomioita:

- ▶  $\mathcal{E}$  ei synny tyhjästä: ulkoinen mekaaninen työ muuttuu sähköiseksi energiaksi.
- ▶ Magneettinen voima ei tee työtä.



## 29 Sähkömagneettinen induktio

### Esim. Liikkuva sauva magneettikentässä (G 29-3)

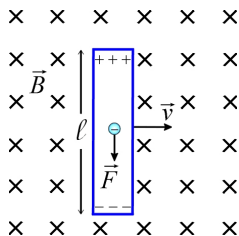
Homogeenisessa magneettikentässä liikkuvan metallisauvan vapaisiin elektroneihin kohdistuu voima  $qvB$ , jolloin elektronit siirtyvät sauvan toiseen päähän.

Sauvan päiden välille syntyy potentiaaliero  $V$  ja siten sähkökenttä  $E$  ( $V = E\ell$ ). Tasapainossa voimat kumoaa toisensa ( $qE = qvB$ ), joten sauvan päiden välisen jännitteen suuruus on

$$V = B\ell v, \quad (240)$$

joka on sama tulos kuin suljetussa piirissä.

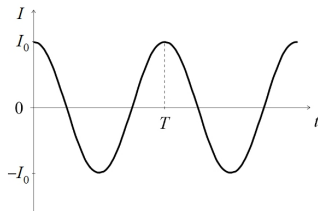
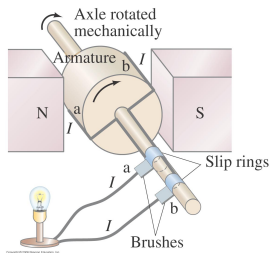
Huom. Ei ole silmukkaan, jonka yli magneettivuo muuttuisi. Kyseessä ei ole siis sm-induktio, vaan pikemminkin Hallin ilmiö.



## 29 Sähkömagneettinen induktio

### Sähkögeneraattori ja vaihtovirta (G 29-4 & 25-7)

Sähkögeneraattorissa, jossa kela pyörii homogeenisessa magneettikentässä, mekaaninen työ muuttuu sähkövirraksi.



Tällöin magneettivuo kelan läpi muuttuu ajan funktiona

$$\Phi_B = NBA \cos(\omega t + \varphi), \quad (241)$$

missä  $A$  on silmukan pinta-ala,  $N$  johdinkierrosten lukumäärä,  $\omega$  kelan kulmanopeus (kulmataajuus) ja  $\varphi$  alkuvaihekulma.

## 29 Sähkömagneettinen induktio

Kelaan indusoituu sinimuotoinen lähdejännite

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = +NBA\omega \sin(\omega t + \varphi) \\ &= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi),\end{aligned}\tag{242}$$

missä

$$\mathcal{E}_0 = NBA\omega.\tag{243}$$

Vastaavasti sinimuotoinen vaihtovirta (ac) on

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = I_0 \sin(\omega t + \varphi).\tag{244}$$

Alkuvaihekulma määräytyy alkuehdoista (esim. edellisen sivun kuvassa  $\varphi = \pi/2$ ). Generaattorin tuottama teho on

$$P(t) = \mathcal{E}(t)I(t).\tag{245}$$

Vastuksen hetkellinen tehohäviö (ol.  $\varphi = 0$ )

$$P(t) = I(t)^2 R = I_0^2 R \sin^2 \omega t.\tag{246}$$

## 29 Sähkömagneettinen induktio

Yleensä ollaan kiinnostuneita tehon keskimääräisestä arvosta

$$P_{\text{av}} = (I^2 R)_{\text{av}} = I_0^2 R (\sin^2 \omega t)_{\text{av}} = \frac{1}{2} I_0^2 R = I_{\text{rms}}^2 R, \quad (247)$$

missä virran *tehollinen arvo* on

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{(I^2)_{\text{av}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0. \quad (248)$$

Kaikkien suureiden, jotka vaihtelevat sinimuotoisesti, tehollinen arvo saadaan jakamalla suureen maksimiarvo  $\sqrt{2}$ :lla. Esimerkiksi

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}, \quad (249)$$

joten

$$P_{\text{av}} = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}}. \quad (250)$$

Useimmat virta- ja jännitemittarit mittaavat tehollisia arvoja. Teholliset lausekkeet ovat samaa muotoa kuin tasavirran tapauksessa.

## 29 Sähkömagneettinen induktio

### Esim. **Muuntaja** (G 29-6)

Muuntaja on laite, jolla nostetaan tai lasketaan piirin jännitettä ilman, että syntyy merkittäviä tehohäviöitä. Muuntajan toiminta perustuu sähkömagneettiseen induktioon. Primääripuolella (ensiö-) Kirchhoffin silmukkasäännöstä saadaan jännite

$$V_1 = N_1 \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (251)$$

Ideaalisessa muuntajassa (ilman jännitehäviöitä) sekundääripuolella (toisio-)

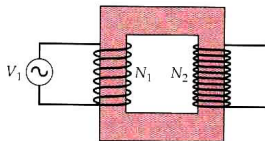
$$V_2 = N_2 \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (252)$$

jolloin saadaan

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (253)$$

Ideaaliselle muuntajalle saadaan kuormituksessa

$$V_{1,\text{rms}} I_{1,\text{rms}} = V_{2,\text{rms}} I_{2,\text{rms}}. \quad (254)$$



## 29 Sähkömagneettinen induktio

### Indusoitunut sähkökenttä (G 29-7)

Faradayn laki yleisessä muodossa:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (255)$$

Huomioita:

- ▶ Muuttuvan  $\Phi_B$ :n aikaansaama  $\vec{E}$ -kenttä ei ole konservatiivinen ( $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$ ), toisin kuin staattisen varausjakauman kenttä.
- ▶ Indusoitunut lähdejännite on jakautuneena koko silmukkaan  $C$  (esim. dc-piirissä lähdejännite on lokalisoitunut paristoon).  $\vec{E}$ -kentän suunta vaihtelee ja se muodostaa suljettuja lenkkejä.
- ▶  $\vec{E}$ -kenttä indusoituu mihin tahansa alueeseen, jossa on muuttuva  $\vec{B}$ -kenttä, vaikka johdetta siinä ei olisikaan.
- ▶ Muuttuva  $\vec{B}$  toimii siis  $\vec{E}$ :n lähteenä.
- ▶ Toimiiko muuttuva  $\vec{E}$   $\vec{B}$ :n lähteenä? (G 31-1)

## 30 Induktanssi

### Keskinäisinduktanssi (G 30-1)

Jos kaksi kelaä ovat lähekkäin toisiaan, niin toisen *virran muutos* indusoi toiseen kelaan lähdejännitteen  $\mathcal{E}$  ja virran  $I$ .

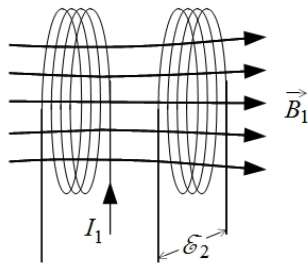
Tarkastellaan kahta kelaä. Kelassa 1 muuttuva virta  $I_1(t)$  muuttaa magneettivuota  $\Phi_{21}(t)$  kelan 2 läpi, jolloin kelaan 2 indusoituu lähdejännite

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}. \quad (256)$$

Magneettivuoto  $\Phi_{21}$  kelan 2 läpi riippuu kelan 1 magneettikentästä  $B_1$  ja siten virrasta  $I_1$

$$N_2 \Phi_{21} = M_{21} I_1(t), \quad (257)$$

missä  $M_{21}$  on kelojen *keskinäisinduktanssi*.



## 30 Induktanssi

Tällöin

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dl_1(t)}{dt}. \quad (258)$$

Keskinäisinduktanssi on

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}, \quad (259)$$

joka riippuu kelojen koosta, muodosta, johdinkierrosten lukumäärästä ja geometrisesta asettelusta tyhjiössä tai väliaineessa.

Vastaavasti

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dl_2(t)}{dt}, \quad (260)$$

missä

$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}. \quad (261)$$

Keskinäisinduktansseille on aina voimassa

$$M_{12} = M_{21} \equiv M, \quad (262)$$

vaikka kelat olisivatkin erilaiset.

Yksiköt:  $[M] = \text{H (henry)} = \text{Wb/A} = \text{T} \cdot \text{m}^2/\text{A}$ .

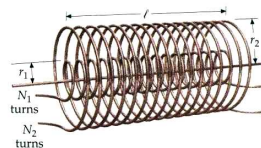


## 30 Induktanssi

Esim. Kahden sisäkkäisen ( $\infty$ -pitkän) solenoidin  $M$ .

Tarkastellaan ulomman solenoidin läpi kulkevaa magneettivuota. Sisemmän solenoidin, jossa kulkee virta  $I_1$ , aikaansaama magneettikenttä

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell}. \quad (263)$$



Keskinäisinduktanssi on

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 B_1 A_1}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A_1}{\ell}. \quad (264)$$

Keskinäisinduktanssista on usein haittaa piirissä. Kelat on tällöin laitettava sellaiseen asentoon, että  $M$  olisi mahdollisimman pieni.

## 30 Induktanssi

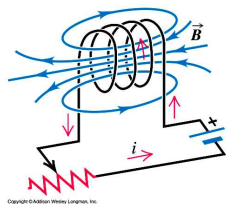
### Itseinduktanssi (G 30-2)

Kun yksittäisessä kelassa virta muuttuu, muuttuu kelan itsensä aiheuttama magneettivuo kelan läpi, jolloin kelaan itseensä indusoituu lähdejännite. Kelan (*itse*)induktanssi määritellään

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}, \quad (265)$$

joka riippuu kelan geometriasta ja joka kuvaa kelan kykyä vastustaa virran muuttumista. Yksiköt:  $[L] = \text{H}$ . Faradayn laista saadaan indusoitunut lähdejännite

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (266)$$



joka pyrkii aina vastustamaan virran muutosta kelassa.

## 30 Induktanssi

Esim. Solenoidin itseinduktanssi. Solenoidin läpi magneettivuo

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 NIA}{\ell}, \quad (267)$$

josta solenoidin itseinduktanssiksi saadaan

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} = \mu_0 n^2 A\ell, \quad (268)$$

joka riippuu ainoastaan solenoidin geometriasta (johdinsilmukoiden lukumäärätiheys  $n = N/\ell$  ja solenoidin tilavuus  $A\ell$ ).

Huom. Yleisesti induktanssin laskeminen ei ole helppoa, mutta se on helppo mitata käyttäen hyväksi Faradayn lakia (yhtälö (266)).

Jokaisessa piirissä on itseinduktanssia. Käämin (induktori, kuristin) itseinduktanssi on suuri verrattuna muun piirin itseinduktanssiin, joten muun piirin induktanssia ei laskuissa tarvitse huomioida.

## 30 Induktanssi

Kirchhoffin silmukkasääntö perustuu energian säilymiseen konservatiivisessa  $\vec{E}_c$ -kentässä. Nyt ei-konservatiiviselle  $\vec{E}_n$ -kentälle käämin päiden yli

$$\int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{\ell} = \oint \vec{E}_n \cdot d\vec{\ell} = -L \frac{di}{dt}. \quad (269)$$

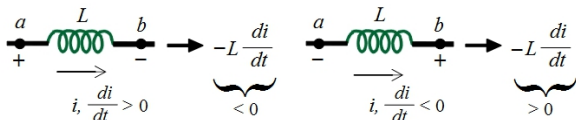
Koska käämin resistanssi on häviävän pieni, niin kokonaiskenttä käämissä  $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_n = 0$ , joten

$$\int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{\ell} = L \frac{di}{dt}. \quad (270)$$

Käämin päiden välillä on siis konservatiivinen kenttä ja sitä kautta jännite

$$V_{ab} = V_a - V_b = L \frac{di}{dt}, \quad (271)$$

jota voidaan käyttää silmukkasäännössä (kulkusuunta virran suuntaan):



## 30 Induktanssi

### Magneettikentän energia (G 30-3)

Virta käämiin läpi vaatii energiaa, joka varastoituu käämiin magneettisena energiana (vrt. kondensaattori ja varastoitunut sähköenergia).

Energiaa syötetään käämiin teholla

$$P = IV_{ab} = LI \frac{dI}{dt}, \quad (272)$$

josta saadaan varastoitunut energia

$$U = \int P dt = L \int_0^I I' dI' = \frac{1}{2} LI^2. \quad (273)$$

Käämiin varastoitunut energia voidaan ajatella varastoituneeksi käämin sisällä olevaan magneettikenttään.

## 30 Induktanssi

Esim. Solenoidin magneettikenttä  $B = \mu_0 n I$ , jolloin virta

$$I = \frac{B}{\mu_0 n}. \quad (274)$$

Itseinduktanssi

$$L = \mu_0 n^2 A \ell. \quad (275)$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (273) saadaan

$$U_B = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 A \ell) \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} A \ell, \quad (276)$$

missä  $A \ell$  on solenoidin tilavuus. Magneettikentän energitiheys on

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (277)$$

mikä on yleinen tulos.

Huom. Vertaa tulosta sähkökentän energitiheyteen  $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ .

Huom. Magneettisessa väliaineessa  $\mu_0 \rightarrow \mu$ .

## 30 Induktanssi

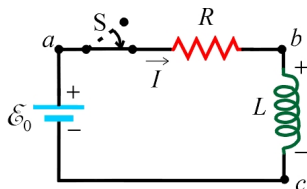
### *LR*-piiri (G 30-4)

Tarkastellaan kuvan *LR*-piiriä. Katkaisimen sulkemisen jälkeen piirissä kulkee virta  $I(t)$ . Vastuksessa tapahtuu jännitehäviö  $IR$  ja käämiin indusoituu lähdejännite  $L di/dt$ , joka pyrkii vastustamaan virran kasvua. Kirchhoffin silmukkasäännöstä saadaan

$$\mathcal{E}_0 - IR - L \frac{di}{dt} = 0. \quad (278)$$

Virta ei voi hypätä äkkiä nolasta johonkin äärelliseen arvoon, koska piirissä on induktanssia. Virran pitää olla jatkuva ajan suhteen, joten heti katkaisimen sulkemisen jälkeen  $I = 0$  ja

$$\left( \frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \frac{\mathcal{E}_0}{L}. \quad (279)$$



## 30 Induktanssi

Kun virta vähitellen kasvaa, niin  $IR$  kasvaa ja  $dI/dt$  pienenee. Ajan  $t$  kuluttua

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} - \frac{IR}{L} = -\frac{R}{L} \left( I - \frac{\mathcal{E}_0}{R} \right). \quad (280)$$

Integroimalla saadaan

$$\int_0^I \frac{dI'}{I' - \mathcal{E}_0/R} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt', \quad (281)$$

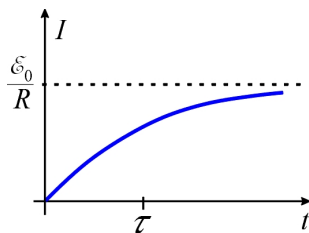
jonka jälkeen

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) = I_f (1 - e^{-t/\tau}), \quad (282)$$

missä  $I_f = \mathcal{E}_0/R$  on virta lopussa ( $dI/dt = 0$ ) ja

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (283)$$

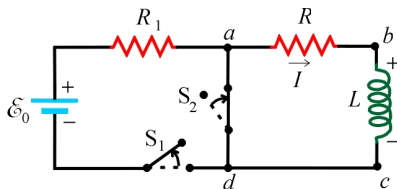
on piirin *aikavakio*. Mitä pienempi  $L$  tai/ja mitä suurempi  $R$ , sitä nopeammin virta saavuttaa saturoituneen arvonsa.





## 30 Induktanssi

Tarkastellaan seuraavaksi *käämin purkautumista*. Kun katkaisija  $S_1$  on kiinni ja  $S_2$  auki, niin virran kasvu piirissä tapahtuu edellä kuvatulla tavalla ( $I_f = \mathcal{E}_0 / (R + R_1)$ ).



Kun ollaan saavutettu tasapainotila, niin piirissä kulkee tasainen virta  $I_0$ . Suljetaan katkaisija  $S_2$  ja avataan  $S_1$ . Kirchhoffin silmukkasäännöstä

$$-IR - L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (284)$$

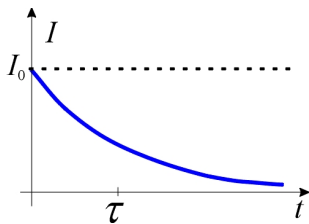
Tällöin

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I, \quad (285)$$

jolla on ratkaisu

$$I(t) = I_0 e^{-(R/L)t} = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (286)$$

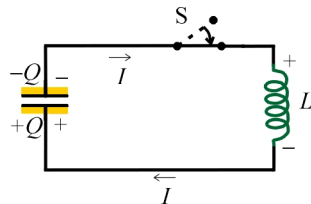
missä  $\tau$  on aikavakio.



## 30 Induktanssi

### LC-piiri (G 30-5)

Tarkastellaan kondensaattoria ja käämiä sarjassa ilman resistanssia. Alussa kondensaattorilla on varaus  $Q_0$  ja kytkin on auki. Suljetaan kytkin hetkellä  $t = 0$ , jolloin varausta alkaa virrata käämin läpi.



Kuvassa kondensaattorin levyjen varausten  $Q$  merkki ja virran  $I$  suunta on valittu siten, että

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (287)$$

Tällöin Kirchhoffin silmukkasäännöstä saadaan

$$-L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0, \quad (288)$$

josta edelleen

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (289)$$

## 30 Induktanssi

Saatu yhtälö on vastaava kuin harmoniselle värähtelijälle saatu liikeyhtälö

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0, \quad (290)$$

jolloin induktanssia  $L$  vastaa massa  $m$ , varausta  $Q$  vastaa paikka  $x$  ja kapasitanssin käänteislukua  $1/C$  vastaa jousivakio  $k$ . Vastaavasti virtaa  $I = dQ/dt$  vastaa nopeus  $v = dx/dt$ . Harmonisen värähtelijän ratkaisu on

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (291)$$

missä

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (292)$$

Virta

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (293)$$

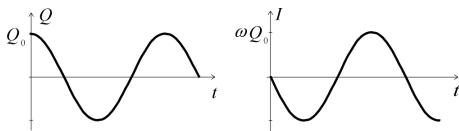
Alkuehdoista  $Q(t=0) = Q_0$  ja  $I(t=0) = 0$  saadaan

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega t \quad (294)$$

ja

$$I(t) = -\omega Q_0 \sin \omega t = -I_0 \sin \omega t. \quad (295)$$

## 30 Induktanssi



Kuten mekaanisen värähtelijänkin tapauksessa,  $LC$ -piirissä on kahdenlaista energiaa, jotka vaihtelevat ajan suhteen. Sähköistä energiaa varastoituu kondensaattoriin (vastaa jousen potentiaalienergiaa)

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega t \quad (296)$$

ja magneettista energiaa varastoituu käämiin (vastaa kappaleen liike-energiaa)

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L\omega^2 Q_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2 \omega t. \quad (297)$$

Näiden energioiden summa on

$$U_{\text{kok}} = U_E + U_B = \frac{Q_0^2}{2C}, \quad (298)$$

joka on vakio ja joka oli alun perin varastoituna kondensaattoriin.

## 30 Induktanssi

### *LRC*-sarjapiiri (G 30-6)

Lisätään vastus, jolloin saadaan *LRC*-piiri.

Kirchhoffin silmukkasäännöstä saadaan

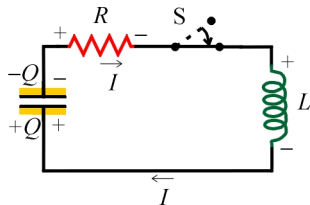
$$-L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} - IR = 0, \quad (299)$$

josta edelleen ( $I = +dQ/dt$ )

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (300)$$

Mekaniikassa vaimennetun harmonisen värähtelijän liikeyhtälö on

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (301)$$



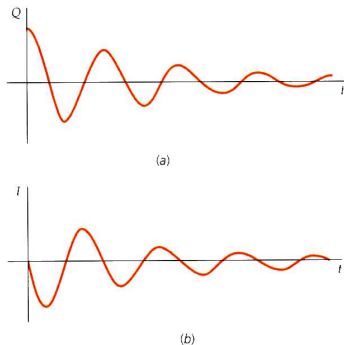
## 30 Induktanssi

Ratkaisuksi saadaan

$$Q = Q_0 e^{-(R/2L)t} \cos \left( \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t + \varphi \right). \quad (302)$$

Vaimennetussa harmonisessa värähtelijässä vaimennuskerroin  $b$  johtaa siihen, että mekaaninen energia muuttuu lämmöksi.

Vastaavasti  $LRC$ -piirissä resistanssista  $R$  johtuen sähköenergia muuttuu vastuksessa lämmöksi.  $LRC$ -piirin varaus ja virta heilahtelevat, mutta amplitudit pienenevät ajan kuluessa.

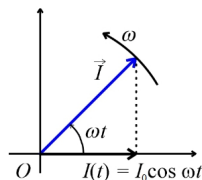


## 30 Induktanssi

### AC-piirit generaattorilla (G 30-7)

*Vaihevektorin*, joka pyörii vastapäivään kulmanopeudella  $\omega$ , projektio  $x$ -akselille ajanhetkellä  $t$  antaa ac-piirissä kulkevan hetkellisen virran

$$I(t) = I_0 \cos \omega t. \quad (303)$$



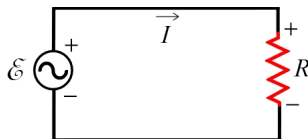
### Vastus ac-piirissä

Jännitehäviö vastuksessa on

$$V_R = IR = I_0 R \cos \omega t = V_0 \cos \omega t, \quad (304)$$

missä  $V_0 = I_0 R. \quad (305)$

Vastuksen läpi kulkeva *virta*  $I(t)$  on samassa vaiheessa ( $\varphi = 0$ ) kuin jännite  $V_R(t)$ .



## 30 Induktanssi

### Käämi ac-piirissä

Jännitteen pudotus käämissä on

$$\begin{aligned}V_L &= L \frac{dl}{dt} = -\omega L I_0 \sin \omega t \\ &= V_0 \cos(\omega t + 90^\circ)\end{aligned}\quad (306)$$

missä

$$V_0 = I_0 \omega L = I_0 X_L, \quad (307)$$

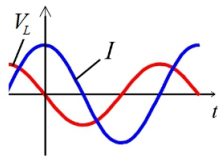
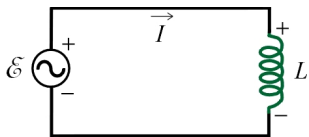
ja induktiivinen reaktanssi

$$X_L = \omega L = 2\pi f L. \quad (308)$$

Yksikkö:  $[X_L] = \Omega$ .

Jännite  $V_L$  ja virta  $I$  käämin yli ovat siis eri vaiheissa, *jännitteen ollessa  $90^\circ$  virtaa edellä*.

Huom: Toisin kuin resistanssi, induktiivinen reaktanssi riippuu vaihtovirran taajuudesta: mitä pienempi taajuus, sitä pienempi reaktanssi ja sitä suurempi virta (*alipäästösuodatin*).





## 30 Induktanssi

### Kondensaattori ac-piirissä

Jännitteen pudotus kondensaattorissa on

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{Q}{C} = \frac{\int_0^t I dt}{C} = \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t \\ &= V_0 \cos(\omega t - 90^\circ) \end{aligned} \quad (309)$$

missä

$$V_0 = I_0 \frac{1}{\omega C} = I_0 X_C, \quad (310)$$

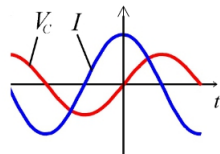
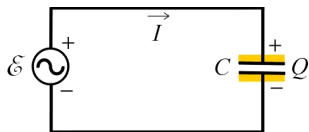
ja kapasitiivinen reaktanssi

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}. \quad (311)$$

Yksikkö:  $[X_C] = \Omega$ .

Kondensaattorissa  $V_C$  ja  $I$  ovat eri vaiheissa, jännitteen ollessa nyt  $90^\circ$  virtaa jäljessä.

Huom: Kuten induktiivinen reaktanssi, kapasitiivinen reaktanssikin riippuu vaihtovirran taajuudesta, mutta kääntäen: mitä suurempi taajuus, sitä pienempi reaktanssi ja sitä vähemmän kondensaattori estää varauksen siirtymistä, eli sitä suurempi virta (*ylipäästösuodatin*).



## 30 Induktanssi

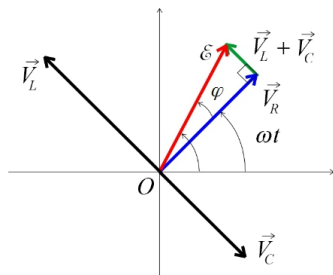
### *LRC*-sarjapiiri generaattorilla (G 30-8)

Tilannetta voidaan tarkastella vaihevektoriesityksellä. Jännitehäviöt komponenteissa ovat

$$V_{R,0} = I_0 R, \quad (312)$$

$$V_{L,0} = I_0 X_L, \quad (313)$$

$$V_{C,0} = I_0 X_C. \quad (314)$$



Lähdejännite on vaihevektorin

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C \quad (315)$$

projektio

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (316)$$

ja sen pituus

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= |\vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C| = \sqrt{V_{R,0}^2 + (V_{L,0} - V_{C,0})^2} \\ &= I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \end{aligned} \quad (317)$$

## 30 Induktanssi

Maksimivirta on

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad (318)$$

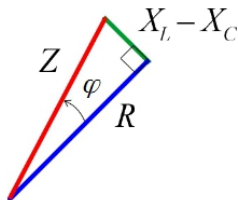
missä

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (319)$$

Suure  $X_L - X_C$  on kokonaisreaktanssi ja  $Z$  on  $LRC$ -sarjapiirin *impedanssi*. Yksikkö:  $[Z] = \Omega$ .

Edellisen sivun kuvasta nähdään

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{|\vec{V}_L + \vec{V}_C|}{|\vec{V}_R|} = \frac{I_0 X_L - I_0 X_C}{I_0 R} \\ &= \frac{X_L - X_C}{R}. \end{aligned} \quad (320)$$



## 30 Induktanssi

Mielivaltaisessa ac-sarjapiirissä hetkellinen teho on

$$\begin{aligned}P(t) &= \mathcal{E}(t)I(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) I_0 \cos \omega t \\ &= \mathcal{E}_0 I_0 (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) \cos \omega t \\ &= \mathcal{E}_0 I_0 (\cos \varphi \cos^2 \omega t - \frac{1}{2} \sin \varphi \sin 2\omega t),\end{aligned}$$

josta

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \cos \varphi = \mathcal{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \varphi, \quad (321)$$

joka kuluu piirin resistanssin tehohäviöihin. Termi  $\cos \varphi$  on *LRC*-sarjapiirin *tehokerroin*, joka *LRC*-sarjapiirissä on  $\cos \varphi = R/Z$ .

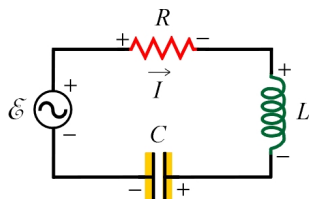
## 30 Induktanssi

Toinen tapa ratkaista  $LRC$ -sarjapiiri on muodostaa systeemiä kuvaava differentiaaliyhtälö. Kirchhoffin silmukkasäännöstä saadaan

$$\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) - IR - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0, \quad (322)$$

josta

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (323)$$



Mekaniikassa pakotetun harmonisen värähtelijän liikeyhtälö on samaa muotoa

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (324)$$

Vastaavasti kuten mekaanisen pakkovärähtelijän tapauksessa, yhtälöllä (323) on tasapainossa *tasaisesti kulkevan vaihtovirran* ratkaisu.

## 30 Induktanssi

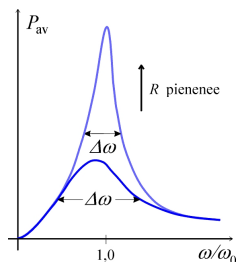
### Resonanssi (G 30-9)

Kun  $X_L = X_C$ , niin impedanssilla on pienin arvonsa, eli  $Z = R$ . Tällöin virta saavuttaa suurimman arvonsa, koska virta on samassa vaiheessa ac-generaattorin lähdejännitteen kanssa ( $\varphi = 0$ ). Tällöin

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad (325)$$

ja sanotaan, että piiri on *resonanssissa*.

Ominaistaajuutta  $f_0 = \omega_0/2\pi$  sanotaan piirin resonanssitaajuudeksi. Resonanssikäyrä on sitä terävämpi, mitä pienempi resistanssi on (vrt. mekaaninen pakotettu värähtelijä).



Esim. Resonanssia käytetään hyväksi radiossa. Antenni poimii monia taajuuksia, joista viritin vahvistaa resonanssitaajuuden lähellä olevat taajuudet. Piirin resonanssitaajuutta muutetaan muuttamalla esim. piirin kapasitanssia.

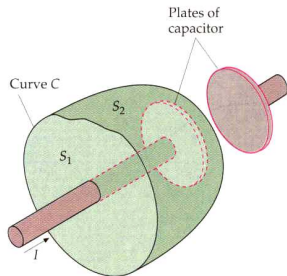
## 31 Sm-aallot

### Maxwellin kenttämuutosvirta (G 31-1)

Tarkastellaan kondensaattorin varaamista. Ampèren lain mukaan

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I, \quad (326)$$

missä  $C$  on suljettu käyrä, jonka rajoittaman pinnan läpi kulkee virta  $I$ . Ampèren laki ei ole kuitenkaan voimassa epäjatkuville virroille, koska eri pintojen  $S_1$  ja  $S_2$  läpi ei kulje sama virta. Laki voidaan kuitenkin yleistää.



Kun levykondensaattoria varataan, sen varaus on

$$Q(t) = CV(t) = \frac{\epsilon_0 A}{d} E(t)d = \epsilon_0 E(t)A = \epsilon_0 \Phi_E(t). \quad (327)$$

## 31 Sm-aallot

Johtimessa kulkeva johdinvirta

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E(t)}{dt}. \quad (328)$$

Määritellään levyjen välissä Maxwellin *kenttämuutosvirta* (siirrosvirta)

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (329)$$

Ampèren lain yleistetty muoto on

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_D) = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right). \quad (330)$$

Huomioita:

- ▶ Yleistetty virta  $I + I_D$  on aina jatkuva (yleistetty Kirchhoffin liitoskohtasääntö).
- ▶ Kenttämuutosvirta on todellinen, koska se luo ympärilleen magneettikentän. Tämä havaitaan mm. kondensaattoria varattaessa: muuttuva  $\vec{E}$ -kenttä saa aikaan  $\vec{B}$ -kentän.
- ▶ Yksi Maxwellin yhtälöistä.



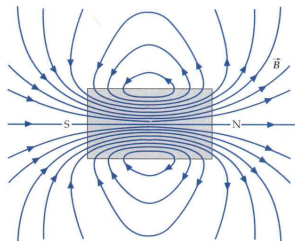
## 31 Sm-aallot

### Gaussin laki magneettikentälle (G 31-2)

Koska magneettista monopolia ei ole vielä havaittu, niin kokonaismagneettivuolle suljetun pinnan läpi

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (331)$$

joka on **Gaussin laki magneettikentälle**.  
Magneettikentän kenttäviivat ovat siis suljettuja lenkkejä, jotka jatkuvat myös aineen sisäosiin.



Gaussin laki magneettikentälle on *yksi Maxwellin yhtälöistä*.

## 31 Sm-aallot

### Maxwellin yhtälöt (G 31-3)

1. Gaussin laki sähkökentälle

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (332)$$

2. Gaussin laki magneettikentälle

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (333)$$

3. Faradayn laki

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (334)$$

4. Yleistetty Ampèren laki

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (335)$$

## 31 Sm-aallot

Huom. Sähkökenttä on vektorisumma

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_n, \quad (336)$$

missä  $\vec{E}_c$  on staattisen varausjakautuman konservatiivinen sähkökenttä ja  $\vec{E}_n$  on muuttuvan magneettikentän indusoima ei-konservatiivinen sähkökenttä. Maxwellin yhtälöissä tämä ei aiheuta ongelmaa, sillä

$$\text{Gauss : } \oint_S \vec{E}_n \cdot d\vec{A} = 0 \quad (337)$$

$$\text{Faraday : } \oint_C \vec{E}_c \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (338)$$

Huom. Muuttuva magneettikenttä saa aikaan sähkökentän ja päinvastoin. Erityisesti tyhjiössä sm-aalto etenee ilman väliainetta:

$$\text{Faraday : } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (339)$$

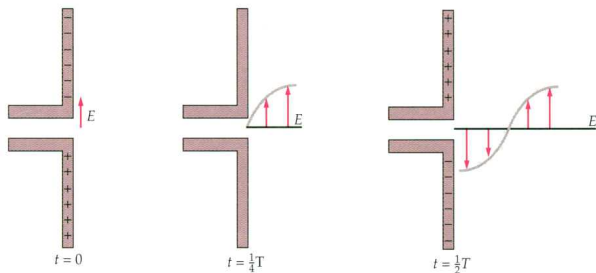
$$\text{Ampère : } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (340)$$

## 31 Sm-aallot

### Sähkömagneettiset aallot (G 31-4 – 31-6)

Levossa olevat tai vakionopeudella liikkuvat varaukset eivät saa aikaan sm-aaltoja. Tarvitaan *kiihtyvässä liikkeessä* olevia varauksia, jotta sm-aaltoja saataisiin aikaiseksi.

Esim. Vaihtovirta ja hidastuvassa, kiihtyvässä ja ympyräliikkeessä olevat elektronit aikaansaavat sm-säteilyä. Esimerkkinä antenni. Aallot (säteily) ovat voimakkaimpia varauksen liikettä vastaan kohtisuorassa suunnassa.



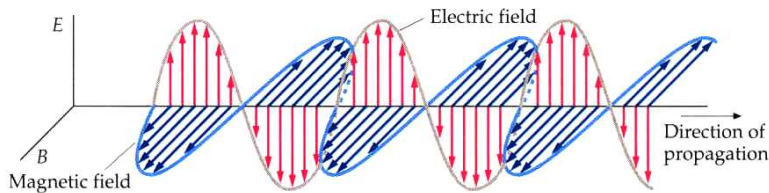
## 31 Sm-aallot

### Sähkömagneettiset tasoallot

Kaukana lähettimestä sm-aallot muodostavat vakionopeudella eteneviä aaltorintamia, *tasoaaltoja*. Tarkastellaan tasoaaltoa, joka etenee tyhjiössä  $x$ -akselin suuntaan (suuntaan  $\hat{i}$ ). Gaussin laista sähkö- ja magneettikentille seuraa, että

$$\vec{E} \perp \hat{i} \quad \text{ja} \quad \vec{B} \perp \hat{i}. \quad (341)$$

Sähkömagneettinen aaltoliike on siis poikittaista aaltoliikettä ja lisäksi  $\vec{E} \perp \vec{B}$ . Valitaan  $\vec{E} = E\hat{j}$ , jolloin  $\vec{B} = B\hat{k}$ .



## 31 Sm-aallot

Faradayn laista seuraa  $E = cB,$  (342)

ja Ampèren laista  $B = \epsilon_0\mu_0cE.$  (343)

Yhdistämällä nämä saadaan

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}},$$
 (344)

joka on sm-aallon nopeus tyhjiössä.

Faradayn ja Ampèren lait antavat lisäksi sm-tasoaallon aaltoyhtälöt (tyhjiössä)

$$\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial t^2},$$
 (345)

$$\frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial t^2}.$$
 (346)

Huom. Jos  $\vec{E}$ -kenttä on aina tietyssä suunnassa, sanotaan, että sm-aalto on *lineaarisesti polarisoitunut* siinä suunnassa. Mikä tahansa  $x$ -suuntaan etenevä aalto voidaan esittää  $yz$ -tasossa lineaarisesti polarisoituneiden aaltojen superpositiona.

## 31 Sm-aallot

### Sinimuotoiset sm-aallot

Positiivisen  $x$ -akselin suuntaan etenevä poikittainen siniaalto on muotoa

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (347)$$

missä  $A$  on amplitudi,  $k$  aaltoluku ja  $\omega$  kulmataajuus. Aaltoluku on

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (348)$$

missä  $\lambda$  on aallonpituus. Kulmataajuus on

$$\omega = 2\pi f, \quad (349)$$

missä  $f$  on taajuus. Aallon vaihenopeus (etenemisnopeus) on

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k}. \quad (350)$$

Sm-aallon, joka etenee  $\hat{i}$ -suuntaan, aaltofunktiot ovat siis

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{j}, \quad (351)$$

$$\vec{B}(x, t) = B_0 \sin(kx - \omega t) \hat{k}, \quad (352)$$

missä

$$E_0 = cB_0. \quad (353)$$

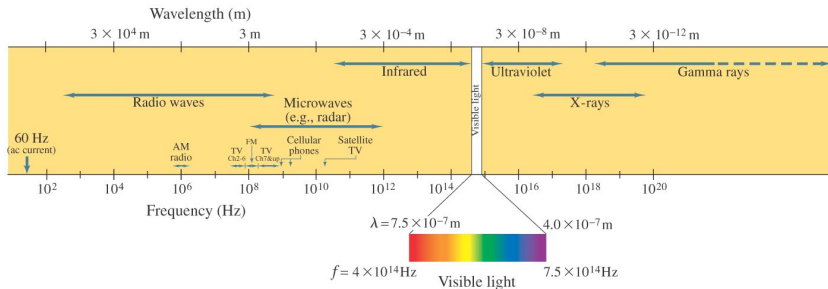
# 31 Sm-aallot

## Sähkömagneettinen spektri

Sähkömagneettisilla aalloilla voi olla erilaisia taajuuksia  $f$  ja aallonpituuksia  $\lambda$ , mutta nopeus on tyhjiössä aina sama

$$c = \lambda f. \quad (354)$$

Sm-aallot on jaettu eri alueisiin: radio-, mikro- ja infra-puna-aallot, näkyvä valo, ultravioletti-, X- ja  $\gamma$ -säteily.





## 31 Sm-aallot

### Sm-aaltojen energia (G 31-8)

Sm-aallon energiatiheys on

$$\begin{aligned}u &= u_E + u_B = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\sqrt{\epsilon_0\mu_0} E)^2 = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0},\end{aligned}\quad (355)$$

joka yleisessä tapauksessa riippuu ajasta ja paikasta. Lisäksi nähdään, että  $\vec{E}$ - ja  $\vec{B}$ -kenttien energiatiheydet ovat samat. Etenevä aalto kuljettaa energiaa

$$dU = u dV = (\epsilon_0 E^2)(A c dt),\quad (356)$$

josta energia aika- ja poikkipinta-alayksikköä kohti on

$$S = \frac{1}{A} \frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2 = \frac{EB}{\mu_0}.\quad (357)$$

Yksikkö:  $[S] = \text{W}/\text{m}^2$ .

## 31 Sm-aallot

Poyntingin vektori määritellään

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad (358)$$

joka osoittaa aallon etenemissuunnan.

Tyypillisesti sm-aaltojen taajuudet ovat niin korkeita, että riittää tarkastella  $S$ :n keskimääräistä arvoa

$$S_{\text{av}} = \frac{E_{\text{rms}} B_{\text{rms}}}{\mu_0} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}, \quad (359)$$

jota kutsutaan *intensiteetiksi*

$$I = \frac{P_{\text{av}}}{A} = S_{\text{av}} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} B_0^2. \quad (360)$$

Yksikkö:  $[I] = \text{W/m}^2$ .

Esim. Maan etäisyydellä auringon säteilyn intensiteetti on  $1,4 \text{ kW/m}^2$ .

## 31 Sm-aallot

### Säteilypaine (G 31-9)

Sm-aalto kuljettaa mukanaan liikemäärää

$$p = \frac{U}{c}, \quad (361)$$

missä  $U$  on sm-aallon energia. Kun aineen pinta absorboi sm-aallon täydellisesti, aallon liikemäärä siirtyy kokonaisuudessaan pintaan.

Syntyy *säteilypaine*

$$p_r = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{Ac} \frac{dU}{dt} = \frac{S_{av}}{c} = \frac{I}{c} \quad (362)$$

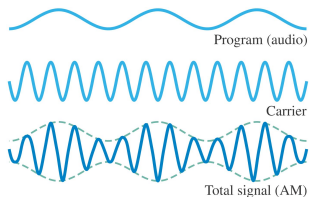
Yksiköt:  $[p_r] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$ .

Huom. Jos sm-aalto heijastuu kokonaan aaltoa vastaan kohtisuorasta tasosta, niin tasoon kohdistuva paine on  $2 \cdot p_r$ .

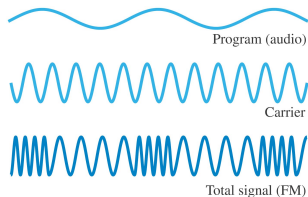
# 31 Sm-aallot

## Sm-aallon vastaanotto (G 31-10)

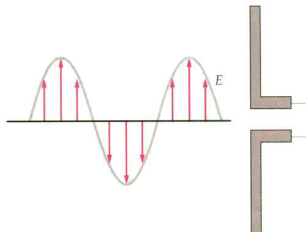
Amplitudimoduloitu (AM) aalto.



Taajuusmoduloitu (FM) aalto.



Sähkökentän vastaanotto.



Magneettikentän vastaanotto.

