KERTAUS

JÄRJESTELYT :

VIIMEISET KOTITEHTÄVÄT :

STACK → 4p

Huomattavaa :

DL ma 21.2 , 8.59

Mallivastaukset : su 20.2.
klo 12 +

Kokeesta :

Kaikki korjataan eli
tekstinkäsittely on OK .

SISÄLLÖISTÄ

(1) GRADIENTTI

– tulkinta

SUUNNATTU DERIVAATTA

– normalisointi (!)

(2) KETJUSÄÄNNÖT

– puurakenne

(3) PISTEAPPROKSIMAATIOT

– linearisointi

– Taylorin polynomi

(4) RAJOITEOPTIMOINTI

– Lagrangen kertoimet

→ epälineaarinen
yhtälöryhmä

(5) TASO- JA AVARUUSINTEGRAALI

- integroimisalueen määrittely
- muuttujanvaihto
- koordinaatistomuunnokset

(6) MASSAKESKIPISTE / HITAUSMOMENTTI

Huomaa!

Kurssitentin tehtävien ensimmäiset sanat julkaistaan jo su 20.2.

LAGRANGEN KERTOIMISTA

Synteesi ääriarvoista:

(i) Lagrangen funktion kriittinen piste

(ii) piste $\nabla g = \underline{0}$

(iii) piste, jossa joko ∇f tai ∇g ei ole määritelty

(iv) rajoitusehdon määrää-män pistejoukon reuna

__Esimerkki__

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = xy + 2z + \lambda(x+y+z) + \mu(x^2+y^2+z^2-24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda + 2\mu x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda + 2\mu y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 + \lambda + 2\mu z = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0 \qquad (5)$$

$(2) - (1)$: $(x - y)(1 - 2\mu) = 0$

(A) $\mu = \frac{1}{2}$; $(2) - (3)$,

$$x + y = 2 + z$$

(4) $x + y = -z \implies z = -1$

$$\left.\begin{aligned} &\implies x + y = 1 \\ (5)\ \ &x^2 + y^2 = 23 \end{aligned}\right\} \implies ?$$

Neliöiden erotuksia :

$$(x + y)^2 = \dots \qquad (i)$$

$$(x - y)^2 = \dots \qquad (ii)$$

$$(i) = 1 = x^2 + y^2 + 2xy$$
$$= 23 + 2xy$$

$$(ii) = x^2 + y^2 - 2xy$$
$$= 23 - 2xy$$

$(i) \implies xy = -11$

(ii) $(x - y)^2 = 45$

$$x - y = \pm 3\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = \pm 3\sqrt{5} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = xy + 2z = -13$$

(B) $x = y$

(4) $z = -2x$

(5) $6x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm 2$

Pisteet: $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}_{= x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{= x_2}$

$f(x_1) = -4$

$f(x_2) = 12$

Yhtälöryhmän ratkaisu iteratiivisesti

Terminologiaa: Gauss on ns. suora menetelmä

Gradienttimenetelmä

Tehtävä: $Ax = b$

A symmetrinen ja pos. def.

x_* tarkka ratkaisu

Minimoidaan!

$$\phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$$

Onhan

$$\nabla \phi(x) = Ax - b$$

Merkitään: x_c approksimaatio

Valitaan normi:

$$\|v\|_A = \sqrt{v^T A v}$$

$$\phi(x_c) = \frac{1}{2} x_c^T A x_c - x_c^T b$$

$$\begin{cases} b = A x_* \\ x_* = A^{-1} b \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}(x_c - x_*)^T A (x_c - x_*) - \frac{1}{2} b^T A^{-1} b$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\|x_c - x_*\|_A^2}_{\text{Jos iteraatio suppenee, niin } \to 0} + \phi(x_*)$$

Idea: Kuljetaan aina negatiivisen gradientin suuntaan!