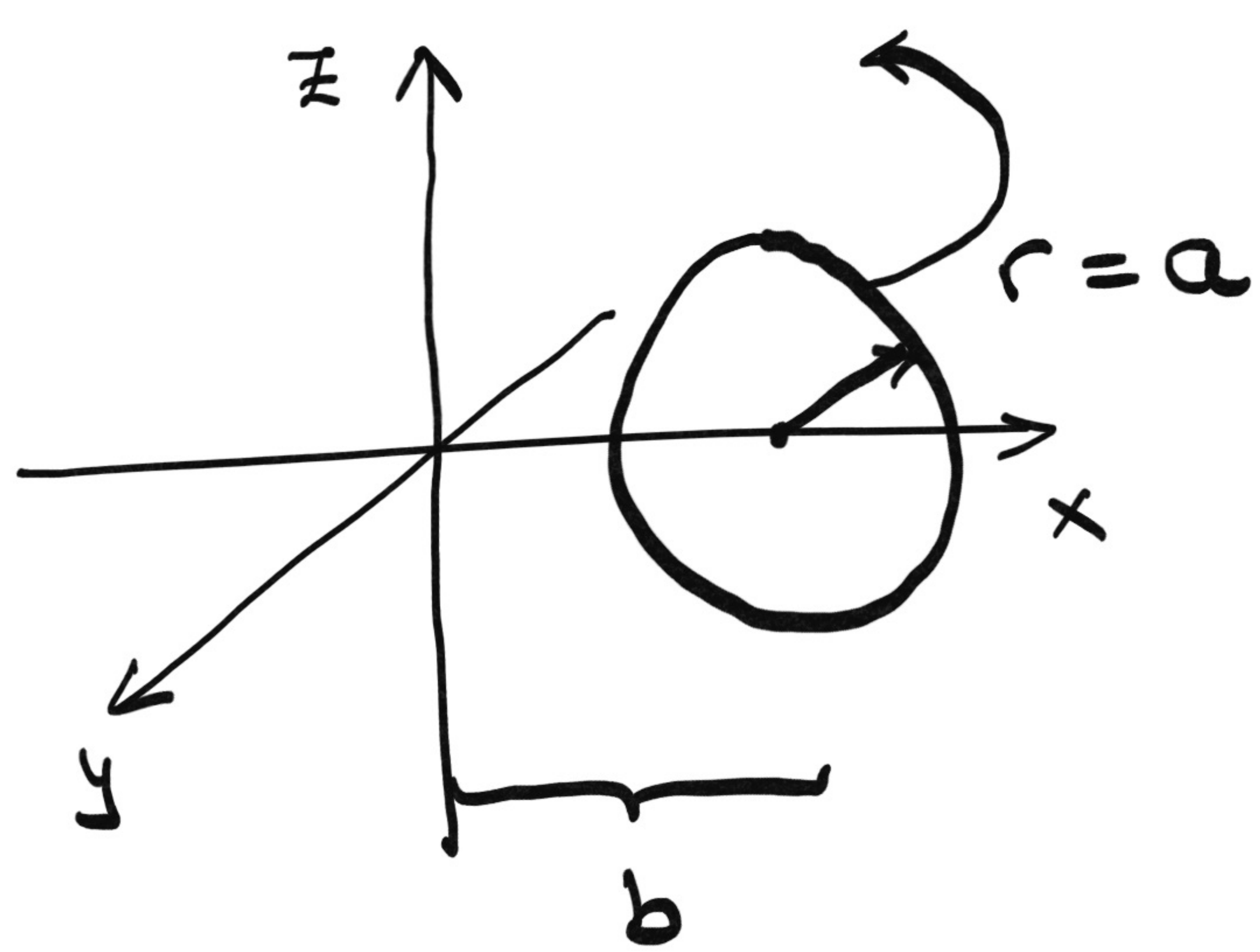
OSITTAISDERIVAATTA

Parametrisoidut pinnat: Torus

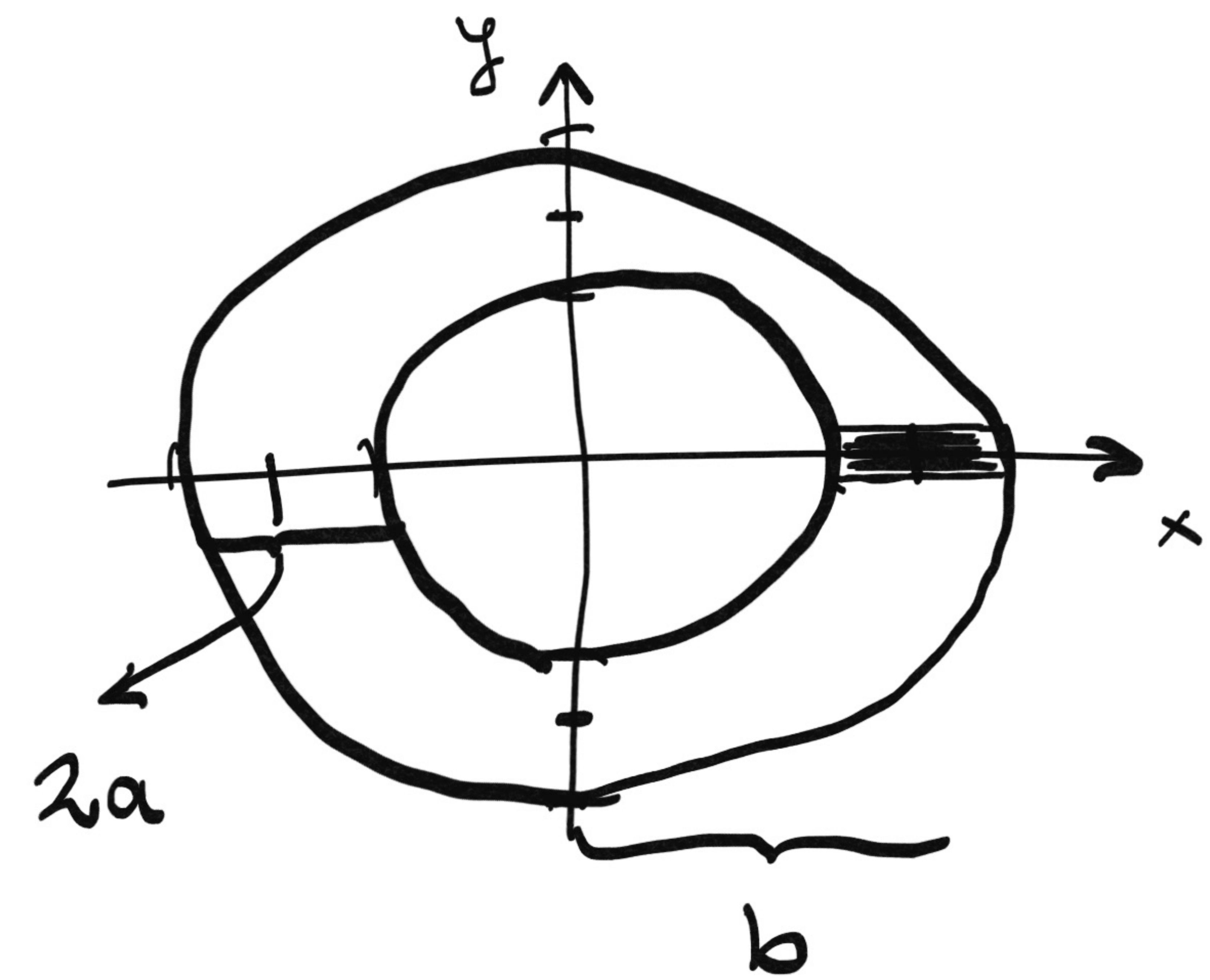
xz-tasen ympyrä: kp $(b, 0)$;
$r = a$



Parametrisointi:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta + b \\ z = a\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Kierto:



Kierretään xz-tasoa z-akselin ympäri.

Formaalisti:

$$\begin{cases} x \leftarrow x\cos\varphi & ; \quad \varphi \in [0, 2\pi] \\ y \leftarrow x\sin\varphi \end{cases}$$

Pinnan parametrisointi:

$$\begin{cases} x = (a\cos\theta + b)\cos\varphi \\ y = (a\cos\theta + b)\sin\varphi \\ z = a\sin\theta \end{cases},$$

$$\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$$

Huom!

$$z = f(x, y)$$

Parametrisointi:

$$\underline{r} = \underline{r}(u,v) = u\,\underline{i} + v\,\underline{j} + f(u,v)\,\underline{k}$$

AVARUUDEN SUORA

Määritelmä

$$\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s} = \frac{z - z_0}{t}$$

Suorakulmaisessa ja oikeakätisessä koordinaatistossa.

Suuntavektori:

$$s(r\,\underline{i} + s\,\underline{j} + t\,\underline{k}).$$

Miksi?

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{r} = \dfrac{y - y_0}{s} \\ \dfrac{y - y_0}{s} = \dfrac{z - z_0}{t} \end{cases} \quad \text{eli}$$

$$\begin{cases} sx - sx_0 = ry - ry_0 \\ ty - ty_0 = sz - sz_0 \end{cases}$$

(kaksi tasoa!)

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ s & -r & 0 \\ 0 & t & -s \end{vmatrix}$$

$$= s(r\,\underline{i} + s\,\underline{j} + t\,\underline{k})$$

OSITTAISDERIVAATTA

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$;

$f : D \to \mathbb{R}$

Muuttujia n kpl : x_j

$$f_j(\underline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x} + h\underline{e}_j) - f(\underline{x})}{h}$$

$\longrightarrow$ vain yksi suunta on aktiivinen, muut vakioita

Esimerkki $\quad f(x,y) = x^2 y$

$$f_1(x,y) = 2xy$$
$$f_2(x,y) = x^2$$

Merkintöjä:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$= f_j(x_1, \ldots, x_n) = D_j f(x_1, \ldots, x_n)$$

$n = 2$: $\quad z = f(x,y)$

$$f_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$f_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Pinnan tangentit ja normaalit

$z = f(x,y)$; (a, b)

Tangenttivektorit :

$$\underline{T}_1 = \underline{i} + f_1(a,b)\,\underline{k}$$

$$\underline{T}_2 = \underline{j} + f_2(a,b)\,\underline{k}$$

Normaalivektori : $\underline{n} = \underline{n}(a,b)$

$$\underline{n} = \underline{T}_2 \times \underline{T}_1$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & f_2(a,b) \\ 1 & 0 & f_1(a,b) \end{vmatrix}$$

$$= f_1(a,b)\,\underline{i} + f_2(a,b)\,\underline{j} - \underline{k}$$

Tangenttitaso :

$$\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$$

$$\underline{r}_0 = (a, b, f(a,b))$$

Saadaan :

$$z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$$

Normaalisuora : $(f_1(a,b) \neq 0,\ f_2(a,b) \neq 0)$

$$\frac{x-a}{f_1(a,b)} = \frac{y-b}{f_2(a,b)} = \frac{z - f(a,b)}{-1}$$

Esimerkki

$$z = f(x,y) = \frac{a^3}{xy} \quad (a > 0)$$

(a) kiinnitä piste

(b) aseta tangenttitaso

(c) etsi pisteen määräämän tangenttitason ja koordinaattitason määrittämän tetraedrin tilavuus

Piste: $(r, s, f(r,s))$

Tangenttitaso:

$$z = f(r,s)\left(3 - \frac{x}{r} - \frac{y}{s}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{z}{f(r,s)} = 3$$

Leikkaus:

(a) x-akseli: $y = 0 = z$

$$x = 3r$$

(b) y-akseli:

$$y = 3s$$

(c) z-akseli:

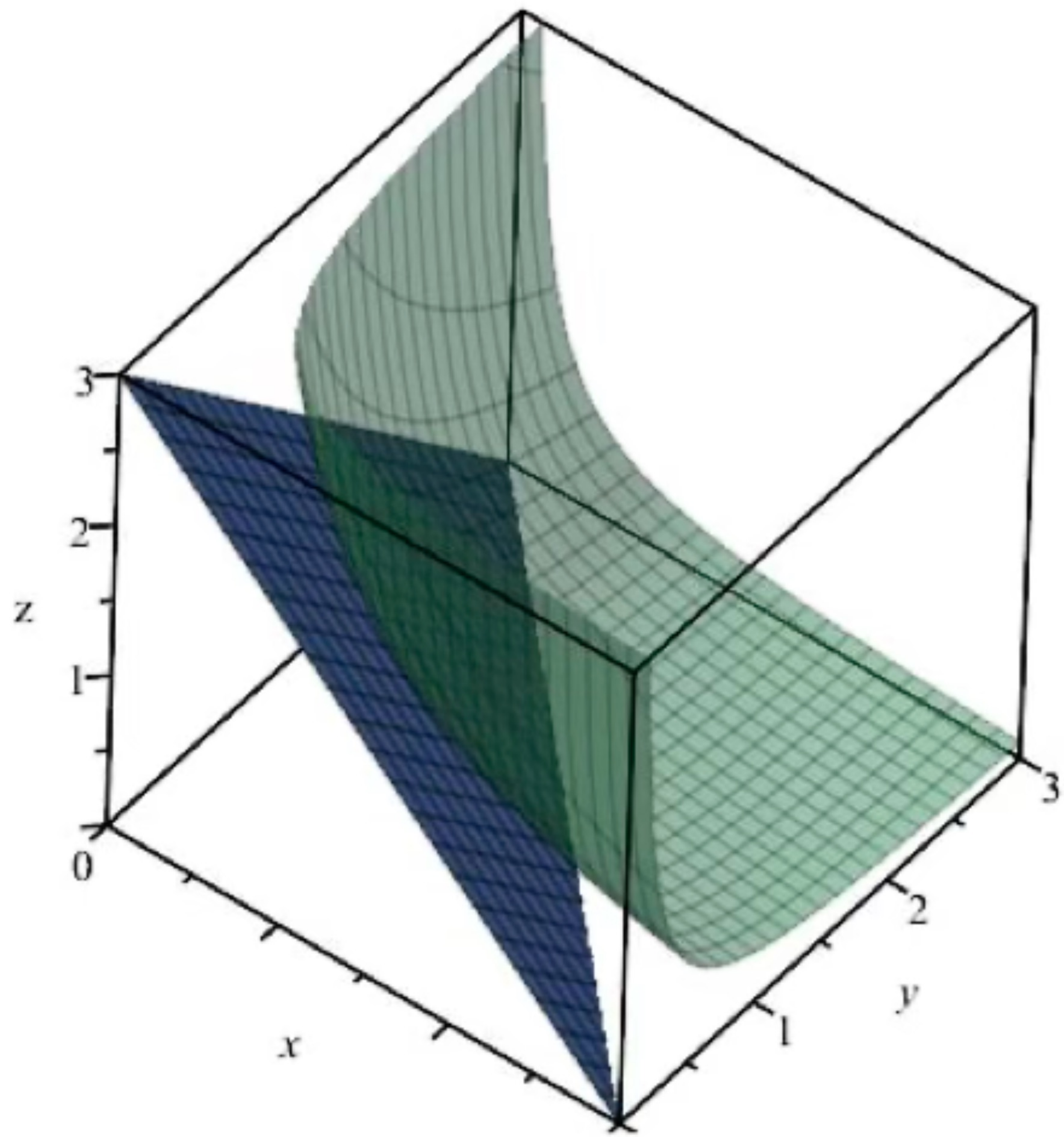
$$z = \frac{3a^3}{rs}$$

Tetraedrin tilavuus:

$$V = \frac{1}{3}(\text{pohjan ala}) \cdot \text{korkeus}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3r\,3s}{2}\right)\left(\frac{3a^3}{rs}\right)$$

$$= \frac{9a^3}{2}$$



3
2
z
1
0
x
y
1
2
3