GRADIENTTI

Vektoriarvoinen funktio:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \; ; \; f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Huomaa notaatio: f_j on komponenttifunktio.

Merkintä: $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{y}$

<u>Jacobi matriisi</u>

$$J_{\underline{f}} = D\underline{f}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ketjusääntö:

$$D(\underline{f} \circ \underline{g})(\underline{x}) = D\underline{f}(\underline{g}(x))\, D\underline{g}(\underline{x})$$

Differentiaali:

$$d\underline{f} = D\underline{f}(\underline{x})\, \Delta\underline{x}$$

<u>Erityisesti</u>: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Tällöin $J_{\underline{f}}$ on neliömatriisi ja sillä on determinantti.

GRADIETTI

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $D \subset \mathbb{R}^n$

$n \geq 2$, derivoituva: $\underline{x} \in D$.

Määritelmä

Funktion f gradientti pisteessä $\underline{x}$ on vektori

$$\nabla f = \text{grad } f$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T \in \mathbb{R}^n$$

$n = 3$:

$$\nabla = \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

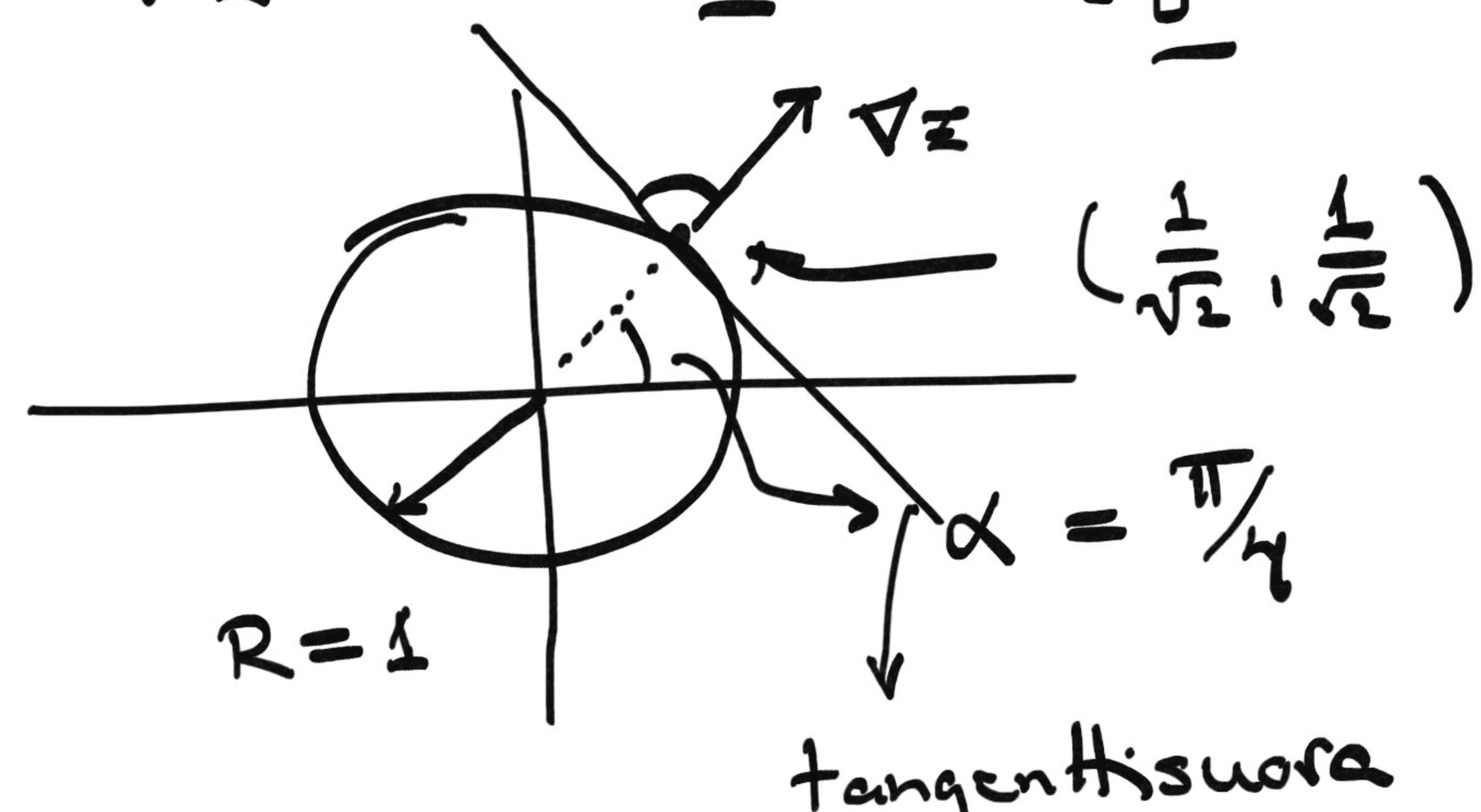
Gradientti kertoo funktion nopeimman kasvun suunnan.

Esimerkki

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

Taso-arvokäyrät ovat ympyröitä.

$$\nabla z = 2x\,\underline{i} + 2y\,\underline{j}$$



Perustelu: Lause:

Taso-arvokäyrä: $\underline{r}(t) : I \to \mathbb{R}^2$

$I = [-1, 1]$

Kiinnitetään piste: $\underline{r}(0) = (a, b)$

$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j}$$

Huomaa: $\underline{r}(0) = (a, b)$

Tasa-arvokäyrän muoto:

$$f(x(t), y(t)) = f(a, b)$$

kaikilla $t \in I$. $\quad \overset{\shortparallel}{\text{vakio}}$

Ketjusääntö:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t) = 0$$

Valitaan $t = 0$:

$$\nabla f(a, b) \cdot \underline{r}'(0) = 0$$

Kohtisuoruus!

Lisäoletus: $\nabla f(a, b) \neq \underline{0}$

Gradientti ja tangenttivektori ovat kohtisuorassa.

Lisäksi:

Entä, jos $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$?

$\to$ Tällöin piste $\underline{x}$ on mahdollinen ääriarvo.

Lause (Suunnattu derivaatta)

$\underline{u} = u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j}$; $\|\underline{u}\| = 1$

Tällöin funktion f suunnattu derivaatta:

$$D_{\underline{u}} f(a, b) = \underline{u} \cdot \nabla f(a, b).$$

Esimerkki

$$f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$$

$D_{\underline{u}} f(0, 1)$: $\nabla f(0, 1) = 2\underline{i} + 4\underline{j}$

(a) $\underline{u} = \underline{i} + 2\underline{j}$ (b) $\underline{u} = \underline{i} + \underline{j}$

(a)

$$\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underline{i} + 2\underline{j}\right)$$

$$D_{\underline{u}} \nabla f(0,1) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underline{i} + 2\underline{j}\right) \cdot \left(2\underline{i} + 4\underline{j}\right)$$

$$= 2\sqrt{5} \simeq 4.5 \quad \left(\underline{u} \parallel \nabla f\right)$$

(b)

$$\underline{u} = \left(\underline{i} + \underline{j}\right) / \sqrt{2}$$

$$D_{\underline{u}} \nabla f(0,1) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{i} + \underline{j}\right) \cdot \left(2\underline{i} + 4\underline{j}\right)$$

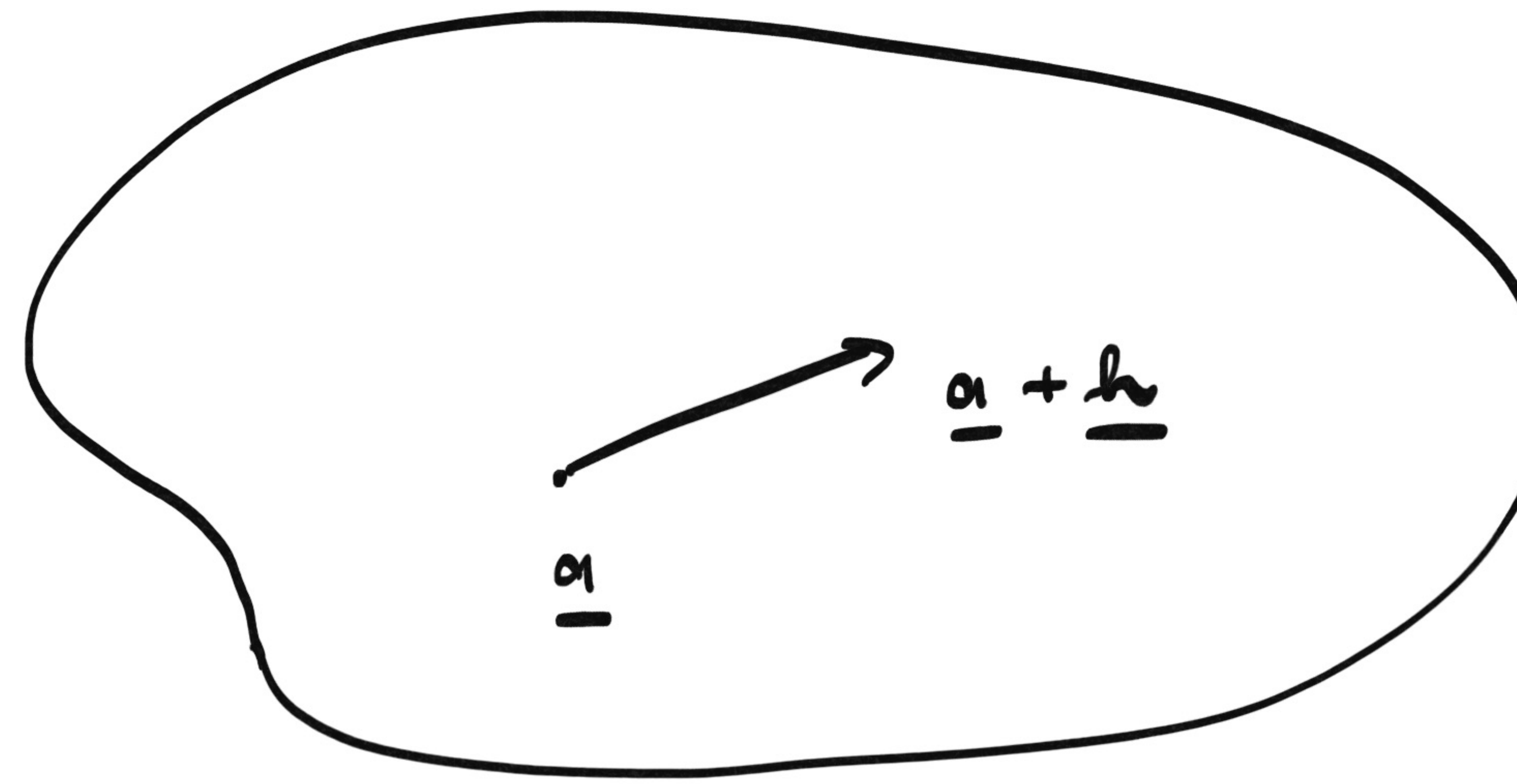
$$= 3\sqrt{2} \simeq 4.2$$

TAYLORIN KAAVA

Pisteapproksimaatio ;

Kehityskeskus $\underline{a}$;

Poikkeama $\underline{h}$



$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Oletus: f:llä on jatkuvat osittaisderivaatat koko janalla $(\underline{a}, \underline{a} + \underline{h})$

Taylor:

$$f(\underline{a}+\underline{h}) \simeq \sum_{j=0}^{m} \frac{(\underline{h}\cdot\nabla)^j f(\underline{a})}{j!}$$

Esimerkki

$f(x,y)$; $\underline{h}=(h,k)$;

Taylor astetta 2: $T_2(f;(a,b))$

Siis:

$$T_2(f;(a,b)) = \sum_{j=0}^{2} \frac{((h,k)\cdot\nabla)^j f(a,b)}{j!}$$

$$= f(a,b) + (hD_1 + kD_2) f(a,b) + \frac{1}{2}\underbrace{(hD_1+kD_2)^2}_{h^2 D_{11} + 2hk D_{12} + k^2 D_{22}} f(a,b)$$

$$= f(a,b) + hf_1(a,b) + kf_2(a,b) + \frac{1}{2}h^2 f_{11}(a,b) + hk f_{12}(a,b) + \frac{1}{2}k^2 f_{22}(a,b)$$