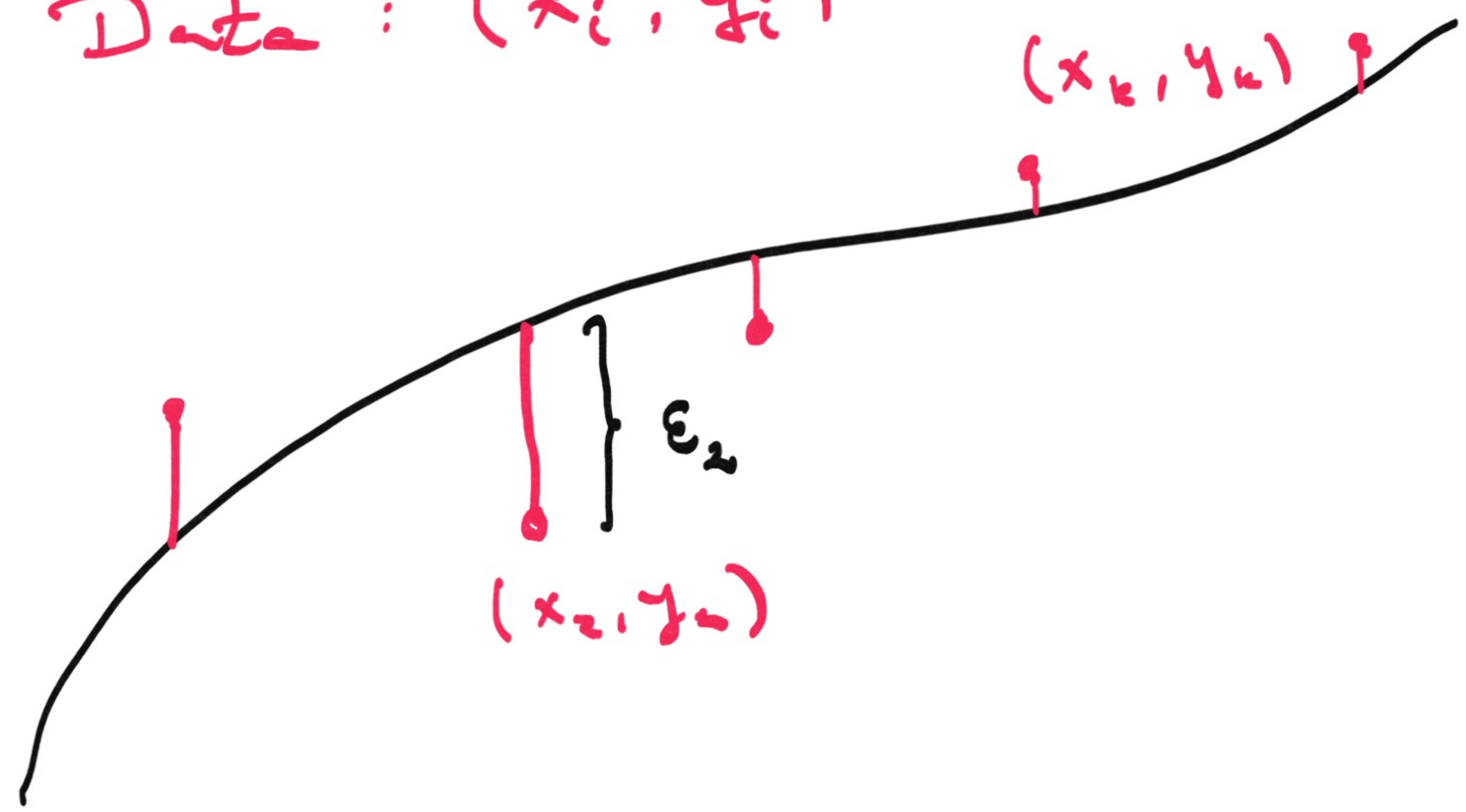
PIENIN NELIÖSUMMA

Data : (x_i, y_i)



$y = f(x)$; virhe ε_k

Kysymys : Miksi ei minimoida

$$T = |f(x_1) - y_1| + \dots + |f(x_k) - y_k| \ ?$$

Minimi ei ole yksikäsitteinen !

Lineaarinen regressio :

Sovitetaan suora :

$$y = ax + b .$$

Minimoidaan neliösumma :

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0$$

Yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + n \quad b = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Suora: Kantapolynomit $\{1, x\}$

$$\underset{n\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} ; \quad \underset{n\times 1}{c} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ratkaistaan:

$$A \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = c$$

tai paremminkin

$$A^T A \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = A^T c$$

$$(A^T A)_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

Saadaan siis täsmälleen samat yhtälöryhmät!

2. asteen sovitus:

Kantapolynomit: $\{1, x, x^2\}$

$$\underset{n\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$$

Jatkuva data:

$$I(p, q) = \int_0^1 (f(x) - px - q)^2 \, dx$$

Oletus: $f(x)$ on jatkuva.

Minimointi sovittaa suoran yli välin $[0, 1]$.

$$\frac{\partial I}{\partial p} = -2\int_0^1 x\,(f(x) - px - q)\,dx$$

$$= 0$$

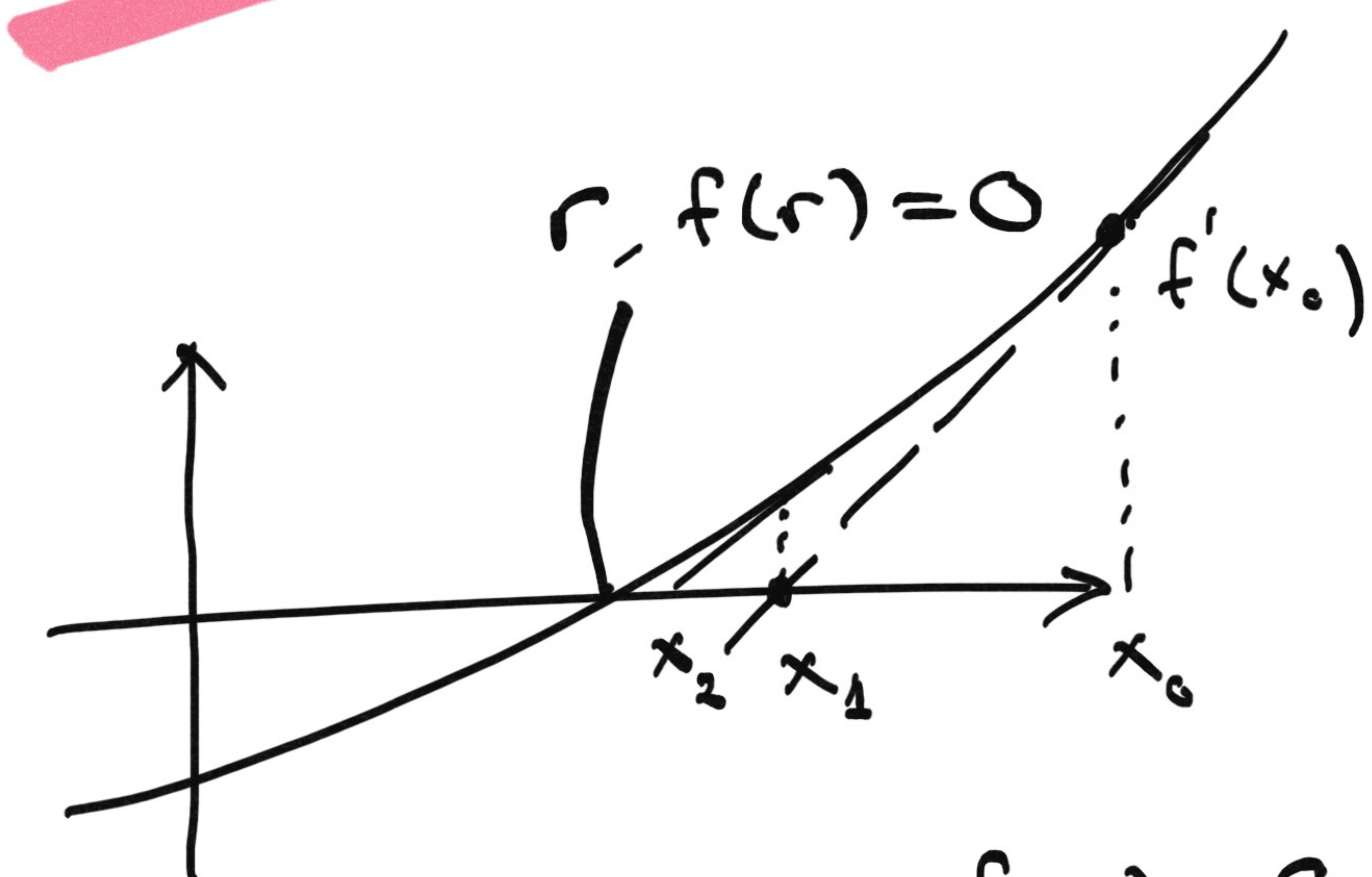
$$\frac{\partial I}{\partial q} = -2\int_0^1 (f(x) - px - q)\,dx$$

$$= 0$$

Yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q = \int_0^1 x f(x)\,dx \\ \frac{1}{2}p + q = \int_0^1 f(x)\,dx \end{cases}$$

NEWTONIN MENETELMÄ



$y = f(x)$; Etsi r s.e. $f(r) = 0$.

Suoran yhtälö: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad \text{kun } y = 0.$$

$\Rightarrow$ iteraatio

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Nollakohta r on iteraation kiintopiste.

Tasotapaus:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Alkuarvaus: (x_0, y_0)

Idea: Linearisoidaan pinnat pisteen (x_0, y_0) ympäristössä!

)

Tangenttitasot:

$$z_1 = f(x_0,y_0) + f_1(x_0,y_0)(x-x_0) + f_2(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z_2 = g(x_0,y_0) + g_1(x_0,y_0)(x-x_0) + g_2(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Kuten 1D-tapauksessa:

$$\begin{cases} f_1(x_0,y_0)(x_1-x_0) + f_2(x_0,y_0)(y_1-y_0) + f(x_0,y_0) = 0 \\ g_1(x_0,y_0)(x_1-x_0) + g_2(x_0,y_0)(y_1-y_0) + g(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Ratkaistaan $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$:

Merkitään $\underline{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - D_{\underline{f}(\underline{x})}^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}$ on siis Jacobin matriisi!

Varsinainen iteraatio muodostetaan kuten edellä.