MS-A0201
Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
Luento 8: Newtonin iteraatio.

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos[1]
Aalto-yliopisto

Kevät 2022

[1]Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmällä voidaan löytää (vähintäänkin derivoituvan) funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nollakohta eli yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisu. Silloin kun menetelmä toimii, se suppenee hyvin nopeasti. Silloin kun ei, niin...

- Lähdetään liikkeelle jostakin pisteestä x_0, joka on alkuarvaus yhtälön ratkaisulle.
- Arvioidaan funktiota f sen tangenttisuoralla pisteessä, eli funktiolla $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Ratkaistaan yhtälö $l(x_1) = 0$. Toistetaan edellinen käyttäen alkuarvauksena lukua x_1 luvun $x : 0$ sijasta j.n.e.
- Tämä menettely johtaa algoritmiin, jossa iteraatioaskeleet saadaan kaavasta
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$
- Suppeneminen ja löytyvä nollakohta riippuvat alkuarvauksesta x_0.

Piirrä kuva iteraation etenemisestä!

Esimerkki 1

Etsitään likiarvo luvulle $\sqrt{5}$.

- Koska $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$, niin valitaan $x_0 = 2$ läheltä ratkaisua.
- Tässä $f(x) = x^2 - 5$, joten $f'(x) = 2x$. Saadaan

$$x_1 = x_0 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{4-5}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(9/4)}{f'(9/4)} = \frac{9}{4} - \frac{27/16 - 5}{2 \cdot 9/4} = \frac{161}{72} \approx 2.2361.$$

- Huomaa, että $\sqrt{5} \approx 2.236068$, eli jo kahdella iteraatiolla saatiin varsin hyvä likiarvo.

Esimerkki 2

Etsitään funktion $f(x) = x^3 - x + 1$ nollakohdat.

- Piirtämällä kuvaaja nähdään, että funktiolla on vain yksi nollakohta jossain pisteiden -2 ja -1 välissä. Asetetaan $x_0 = -1$.
- Koska $f'(x) = 3x^2 - 1$ iteratioksi saadaan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1}.$$

- Saadaan

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1.5, \quad x_2 = -1.347826, \quad x_3 = -1.325200.$$

$$x_4 = -1.324718, \quad x_5 = -1.324717, \quad \ldots$$

Newtonin menetelmä monen muuttujan tapauksessa

Newtonin menetelmä toimii myös funktion $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tapauksessa. Tällöin iteraatiokaavassa oleva derivaatta pitää korvata Jacobin matriisilla

$$
D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.
$$

Iteraatioaskeleeksi saadaan

$$
\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,
$$

missä $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)^{-1}$ on $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$:n käänteismatriisi.

Esimerkki 3

Etsitään $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, kun $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 1)$ ja

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 3)\mathbf{i} + (x^2 + y^2 - z - 1)\mathbf{j} + (x + y + z - 3)\mathbf{k}.$$

Hahmottele kuvaa!

- Saadaan
$$D\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
- Voidaan laskea
$$\mathbf{x}_1 = (3/2, 1/2, 1), \quad \mathbf{x}_2 = (5/4, 3/4, 1) \text{ ja } \mathbf{x}_2 = (9/8, 7/8, 1)$$
mikä on terveellisintä tehdä tietokoneella.
- Nähdään, että iteraatiot konvergoivat kohti pistettä $(1, 1, 1)$, joka on tehtävän tarkka (ja kaikesta päätellen ainoa) ratkaisu.