$$= \int_0^1 y \, \frac{1}{2} (1 - y^2) \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y(1 - y^2) \, dy = \frac{1}{8}$$

EPÄOLEELLISET INTEGRAALIT

(A) Rajoitettu (positiivinen) funktio rajoittamattomassa alueessa.

(B) Rajoittamaton funktio rajoitetussa alueessa.

ESIMERKKI (A)

$f(x,y) = e^{-x^2}$

D on suorien $y = \pm x$, $x > 0$, rajoittama.

$$\iint_D e^{-x^2} \, dA = \int_0^\infty \int_{-x}^{x} e^{-x^2} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^\infty 2x e^{-x^2} \, dx$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R 2x e^{-x^2} \, dx =$$

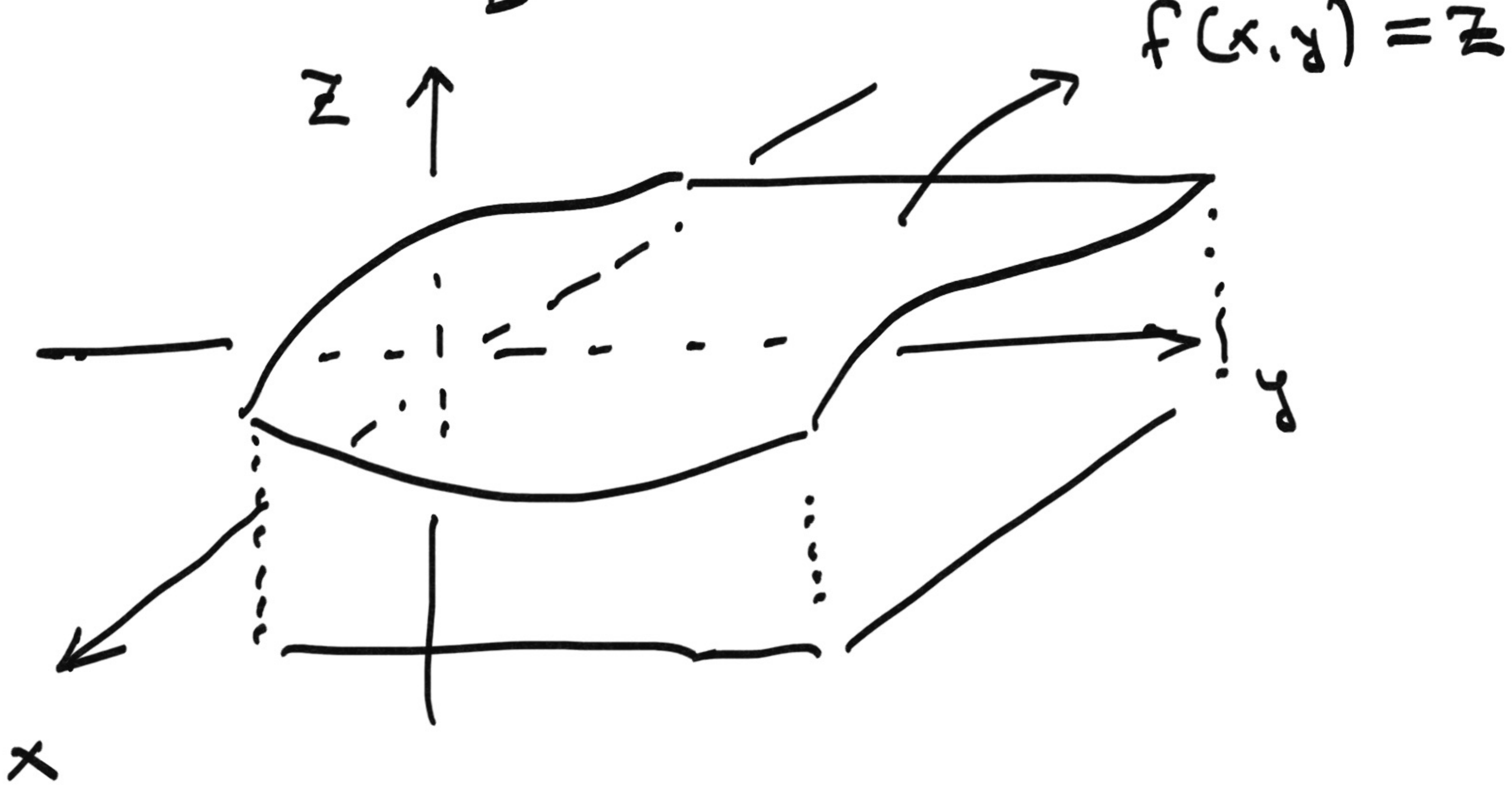
$$\lim_{R \to \infty} \Big/_0^R - e^{-x^2} = 1$$

TASOINTEGRAALI

Tasoalue $D \subset \mathbb{R}^2$; $f : D \to \mathbb{R}$

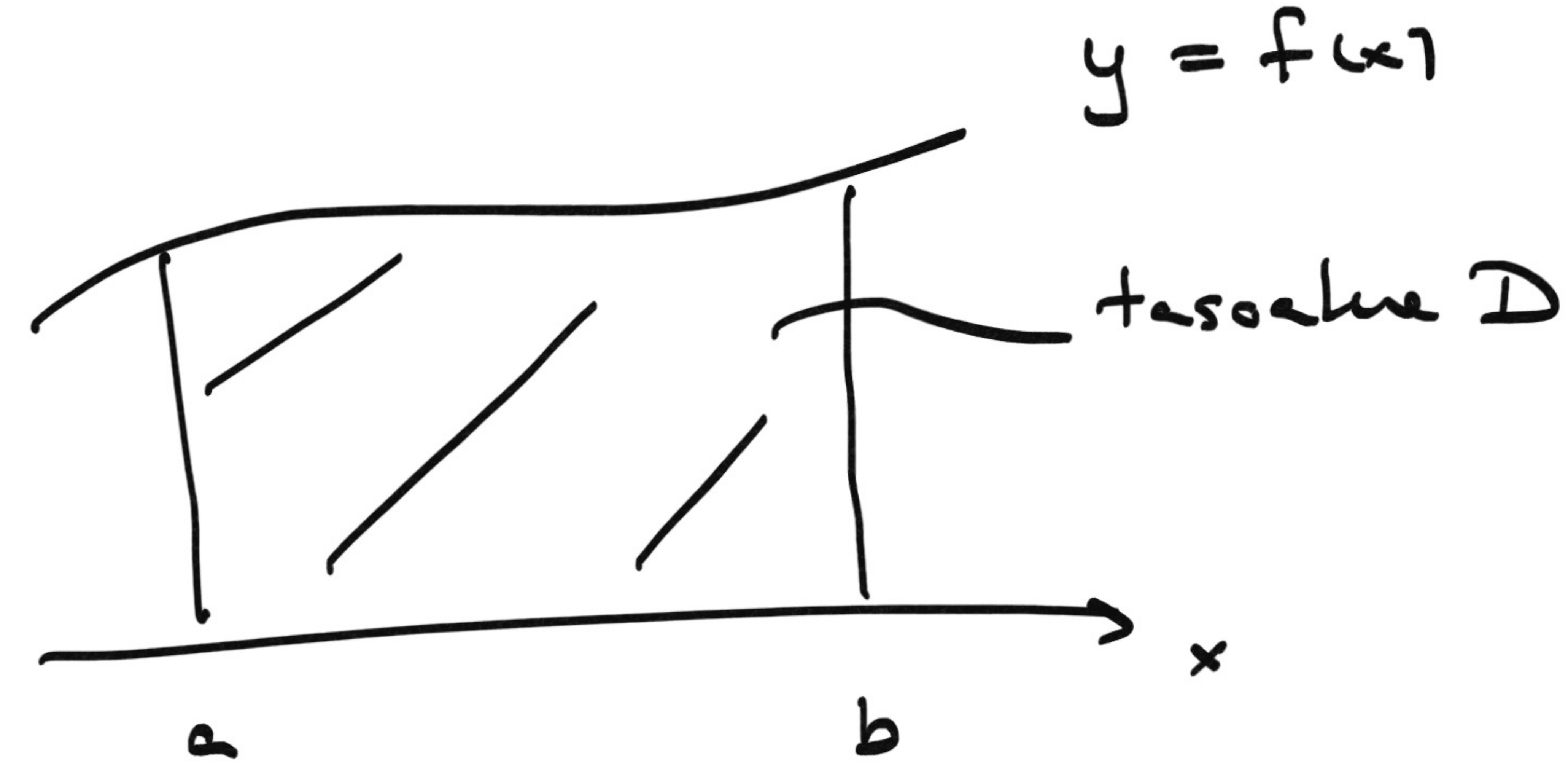
Tasointegraali:

$$\iint_D f(x,y)\, dA$$



Integraalin arvo on pinnan ja xy-tason välin jäävän alueen tilavuus.

Onhan jo tuttu:



Integraalin arvo

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

on tasoalueen D pinta-ala.

Kysymys:

Miten mitataan 1D mittoja?

Esimerkki

Katkoviivan pituus?

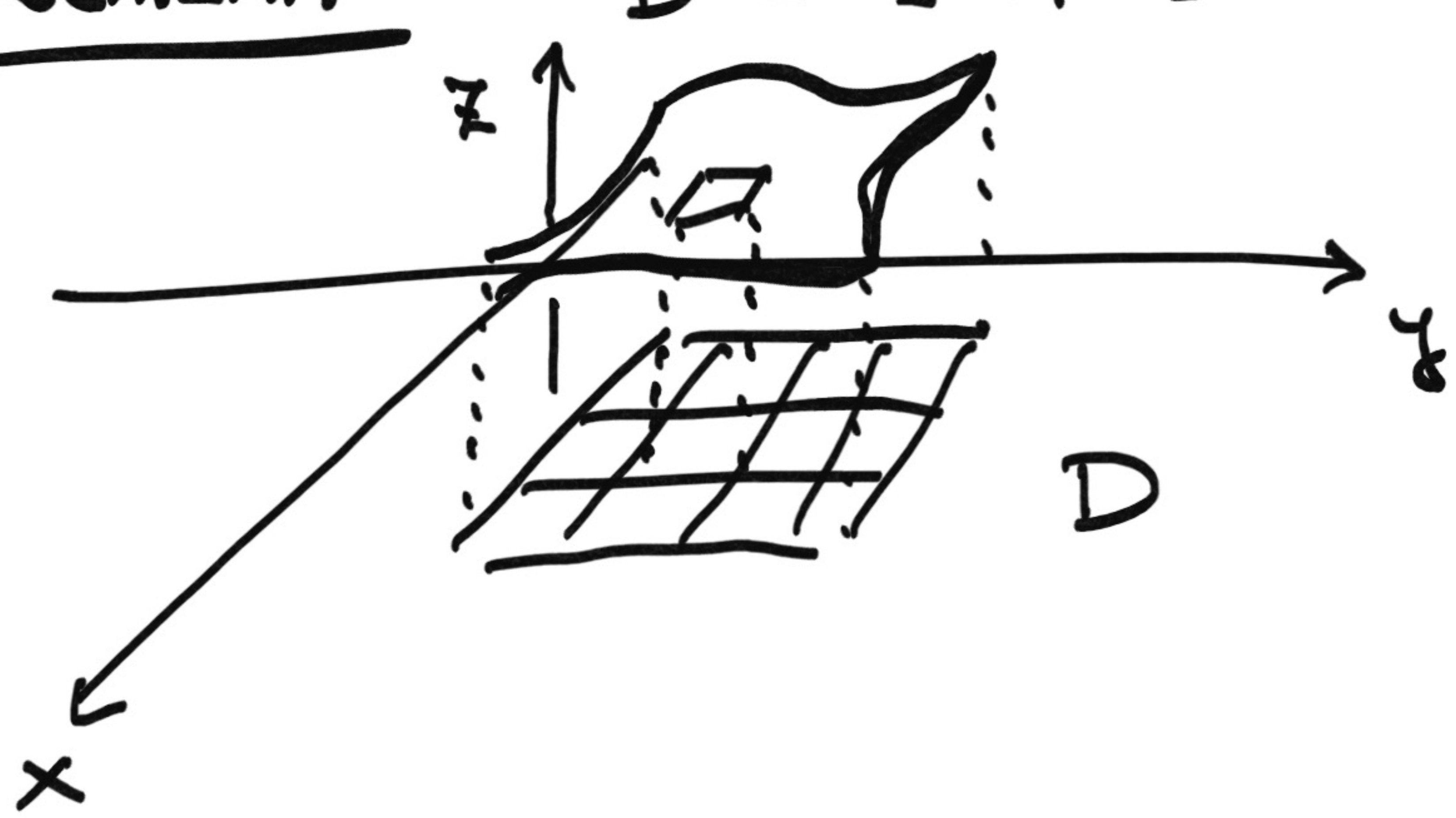
Mittaaminen:

$$\int_a^b 1\,dx = b-a \quad \text{(janan pituus!)}$$

$$\iint_D dA = D\text{:n pinta-ala}$$

jne.

Riemann: $D = [a,b] \times [c,d]$



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y$$

Tasoalueen jako määräytyy:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta y = \frac{d-c}{n}$$

Avaruusintegraali:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

ja vastaavasti korkeammissa dimensioissa.

Huom! Integrointi korkeissa dimensioissa $\gg 4$ on motivoitua ja arkipäivää.

Katso: "Curse of dimensionality"

MONINKERTAINEN INTEGRAALI

(ITEROITU INTEGRAALI)

$$D = [a,b] \times [c,d]$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \underbrace{\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy}$$

$$V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Esimerkki $f(x,y) = xy^2$

$$D = \{ (x,y) \mid x \in [0,1],\ y \in [0,1] \}$$

$$\iint_D xy^2\,dA = \int_0^1 \int_0^1 xy^2\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \Big/_0^1 \frac{1}{2}x^2y^2\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}y^2\,dy$$

$$= \frac{1}{6}$$

Mutta,

$$\iint_D xy^2\,dA = \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 y^2\,dy\right)$$

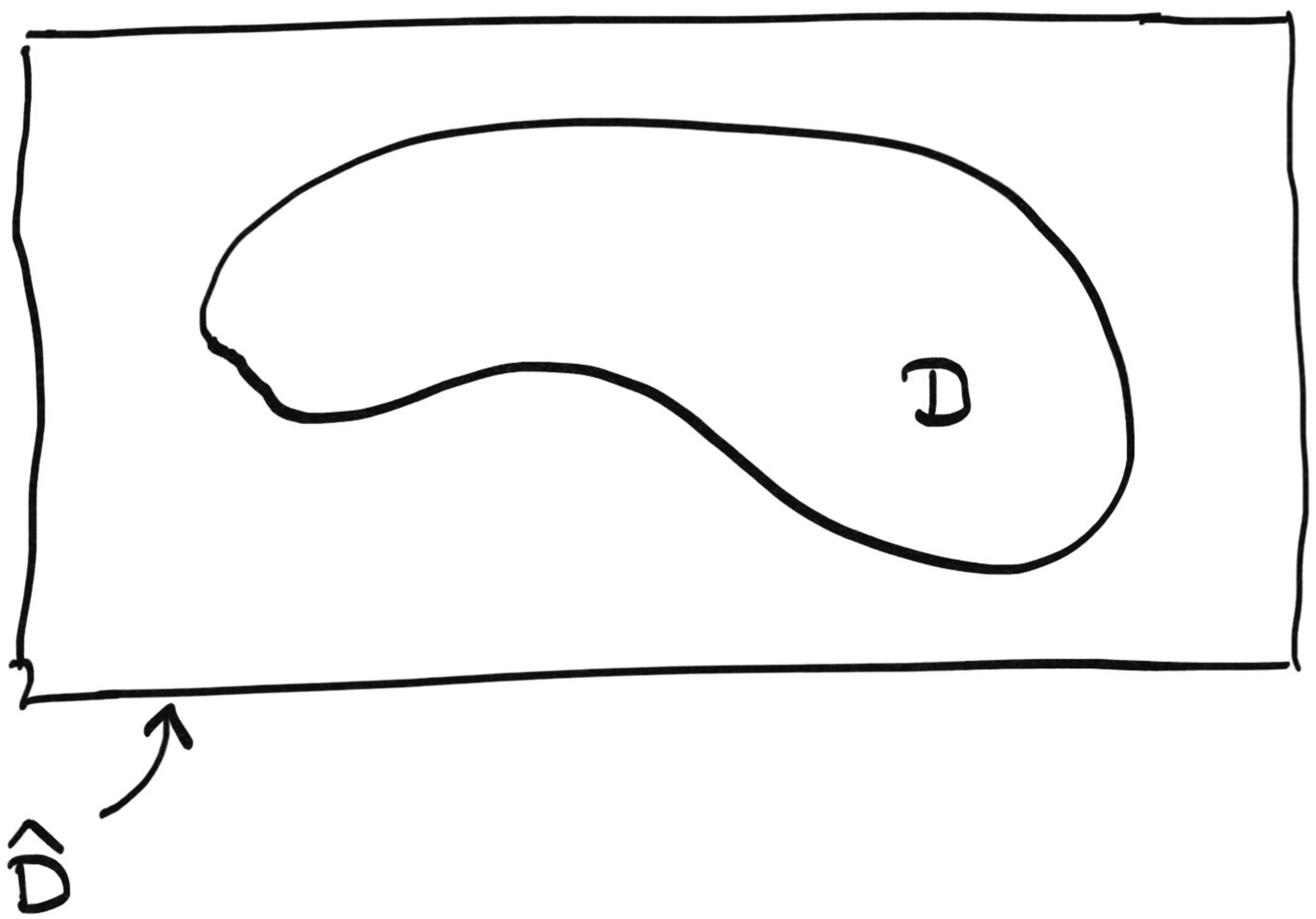
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Riemann:

$$\lim_{n\to\infty} \sum\sum f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y = (\text{tässä})$$

$$\left(\lim_n \sum x\,\Delta x\right)\left(\lim_n \sum y^2\,\Delta y\right)$$

INTEGROINTI YLEISESSÄ ALUEESSA



Tehtävä: $\iint_D f(x,y)\,dA = ?$

Määritellään funktion f nollajatko alueessa $\hat{D}$:

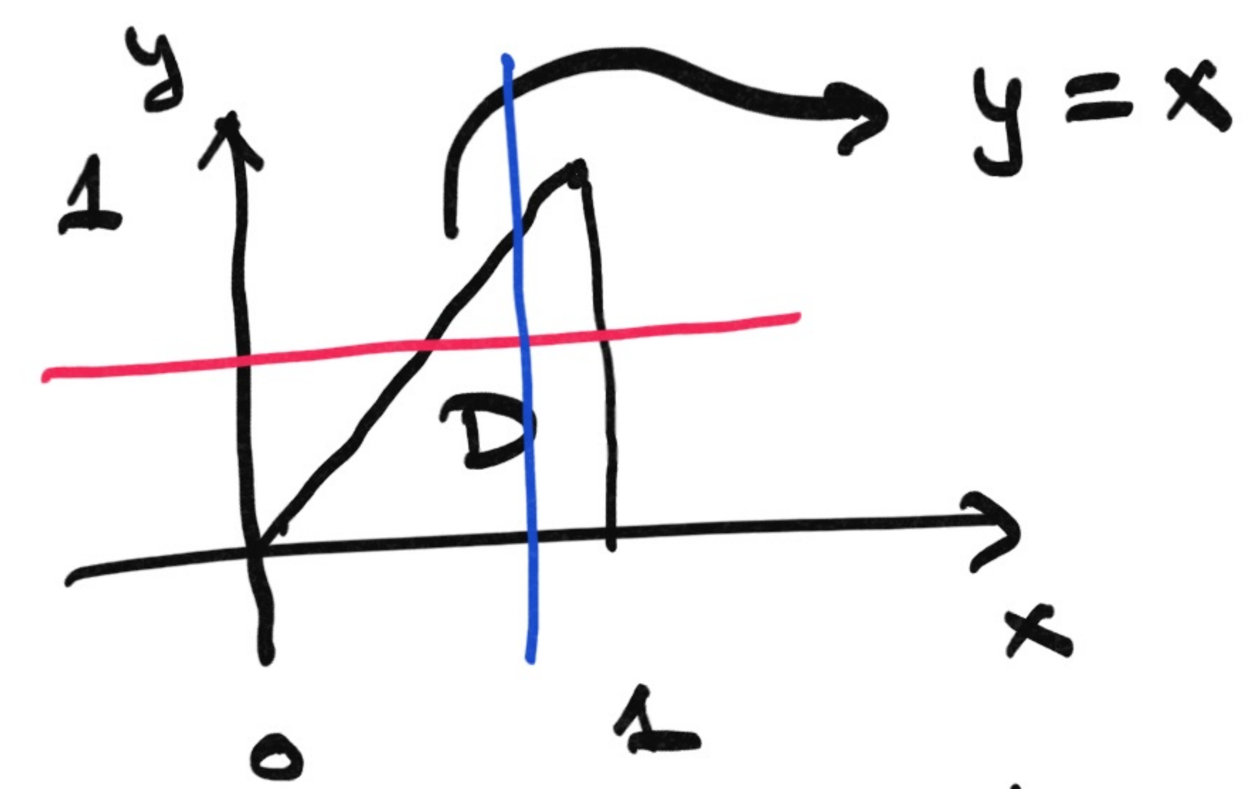
$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\in \hat{D}\setminus D \end{cases}$$

Tällöin

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{\hat{D}} \hat{f}(x,y)\,dA$$

Esimerkki $f(x,y) = xy$

$$D = \{(x,y) \mid x\in[0,1],\ 0\le y\le x\}$$



• $$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{1}{8}$$

Toisaalta,

$$D = \{(x,y) \mid y\in[0,1],\ y\le x\le 1\}$$

• $$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy\,dx \right) dy$$