SOVELLUKSIA

Koordinaatistoista vielä:

Kaksi erikoistapausta:

(A) Lieriö- eli sylinteri-koordinaatit

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

(B) Pallokoordinaatit

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

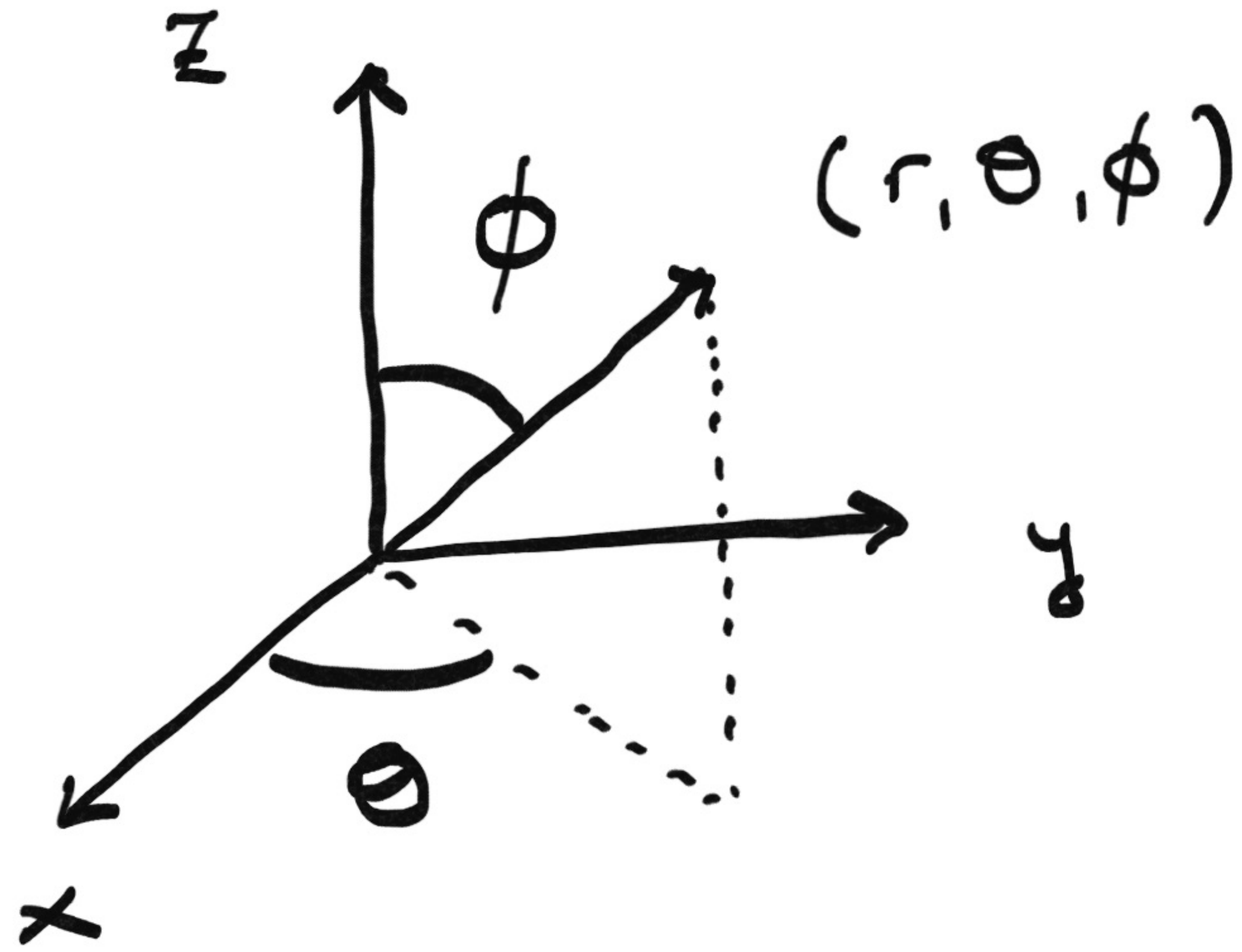
$$\Rightarrow \quad dx\,dy\,dz = r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Pallon tilavuus (R-säteinen)

Tehtävä:

$$\iiint_{B(R)} 1\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\phi \, d\phi\, d\theta\, dr$$



Piste: $(x, y, z) \,\hat{=}\, (r, \theta, \phi)$

$r \geq 0$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$\phi \in [0, \pi]$

Huomaa!

Maantieteellisissä koordinaatistoissa

$$\phi \to \pi/2 - \phi$$

Tilavuuden integraali:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} - r^2 \cos\phi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r^2 \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^R 4\pi r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

TÄRKEITÄ INTEGRAALEJA

<u>Mitat</u>: $D \subset \mathbb{R}^2$

Pinta-ala $a(D) = \iint_D 1 \, dx\,dy$

$D \subset \mathbb{R}^3$

Tilavuus $v(D) = \iiint_D 1 \, dx\,dy\,dz$

Massa:

$$m(D) = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

missä $\rho(x,y,z)$ on materiaalin tiheys.

Hitausmomentti: (z-akselin ympäri)

$$I_z(D) = \frac{1}{m(D)} \iiint_D \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

Keskiö ja massakeskipiste:

$$\bar{x} = \frac{1}{V(D)} \iiint_D x\,dx\,dy\,dz$$

$$\bar{y} = \dots$$

$$\bar{z} = \dots$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

ESIMERKKI

D = Yksikkökuutio $= [0,1]^3$

$\rho(x,y,z) = z$

Massakp = ?

$$m(D) = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 z\,dz\,dy\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}$$

$\bar{y} = \bar{x}$ (symmetrian nojalla)

$$\bar{z} = \frac{1}{m(D)} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \underbrace{z \cdot z}_{z^2}\,dz\,dy\,dx = \frac{2}{3}$$

massakp: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

Huomaa, että valinnalla

$$\rho(x,y,z) = 2z,$$

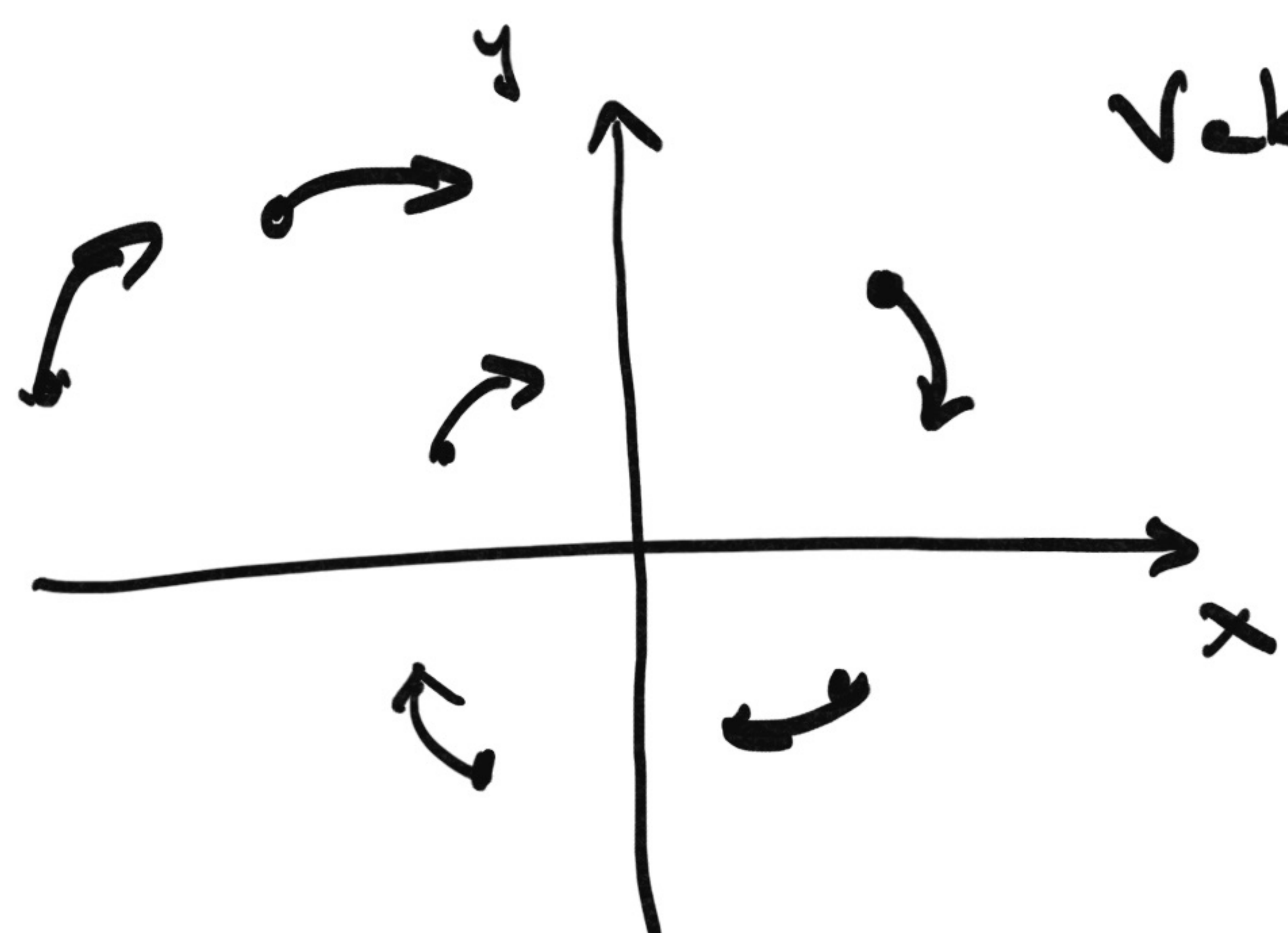
$$m(D) = 1.$$

Kuitenkin massakp olisi täsmälleen sama!

(Mikä tahansa $\rho(x,y,z) = kz$ antaa saman vastauksen.)
(k vakio)

HITAUSMOMENTTI (z-akseli)

→ Idea: Muunnetaan diskreetti malli jatkuvaksi.



Vakiokulmanopeus: ω

N kpl

Partikkelijoukon energia

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2)\right)}_{\text{hitausmomentti}}\omega^2$$

Jatkuva formulaatio:

z-akselin ympäri kiertyvä kappale:

$$E = \frac{1}{2}\left(\iiint_D (x^2+y^2)\underbrace{\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{dm}\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_z(D)\,\omega^2$$

ESIMERKKI

Jääkiekon hitausmomentti

$$D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le a^2, \; 0 \le z \le 1\}, \quad a>0.$$

Vakiotiheys : $\rho = \rho_0$

Massa: $m(D) = \iiint_D \rho_0 \, dx\,dy\,dz$

$$= \rho_0 \pi a^2$$

$$I_z(D) = \frac{1}{m(D)} \iiint_D (x^2+y^2)\rho \, dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{\cancel{\rho_0}}{\cancel{\rho_0}\pi a^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \cdot r \, dr\, d\theta\, dz$$

$\hookrightarrow$ muunnoksesta!

$$= \frac{2}{a^2} \int_0^a r^3 \, dr = \frac{1}{2} m a^2$$