MS-A0201 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM) Luento 1: Parametrisoidut käyrät ja kaarenpituus

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos[1]
Aalto-yliopisto

Kevät 2021

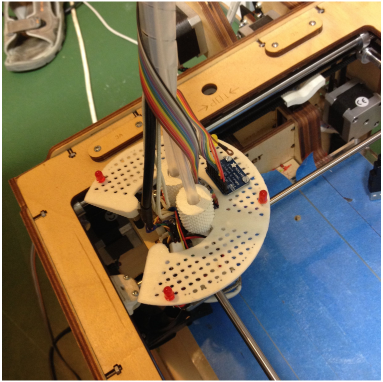
[1]Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

Motivaatio

- Tutustutaan taso- ja avaruuskäyriin sekä lasketaan kaarenpituuksia.
- Tyypillinen käyrä voi olla esimerkiksi kappaleen liikerata tasossa tai avaruudessa. Käyrä ei tee hyppyjä, mutta se voi villiintyä muutoin!
- Käyrä esitetään usein parametrisoidussa muodossa: kappaleen liikerata ajan funktiona.
- Käyrä voi olla differentiaaliyhtälön ratkaisu: planeettojen radat, Keplerin lait Newtonin mekaniikasta.

Esimerkki modernista sovellutuksesta

3D printterin (Ultimaker Original) printtauspää kulkee Newtonin mekaniikan mukaisesti erästä käyrää pitkin.



Tehtävänä estimoida tämä käyrä mahdollisimman tarkasti perustuen kiihtyvyysanturidataan (srate = 3 kHz) sekä LEDien paikan sisältävään synkronoituun kameradataan (srate = 400 Hz).

Peruskäsitteitä: käyrän parametrisointi

- Muodollisesti käyrällä tarkoitetaan (parametrisoitua) joukkoa $C \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, joka voidaan esittää muodossa

$$C = \{\mathbf{r}(t) : t \in I\} = \mathbf{r}(I) = \mathbf{r}\text{:n arvojoukko},$$

  missä $I \subset \mathbb{R}$ on väli, ja funktio $\mathbf{r} \colon I \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva.
- Vektoriarvoisen funktion $\mathbf{r} \colon I \to \mathbb{R}^n$ jatkuvuudella tarkoitetaan sen koordinaattifunktioiden jatkuvuutta (missä tahansa kantaesityksessä).
- Tässä $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ on käyrän C eräs *parametrisointi* ja I on parametrisointia vastaava *parametriväli*.
- Parametriväli I voi olla avoin (a, b), suljettu $[a, b]$, tai jopa puoliavoin $(a, b]$, $[a, b)$.
- Fysikaalisesti mielenkiintoisimpia ovat tapaukset $n = 2$ (tasoliike), $n = 3$ (Newtonin mekaniikka) ja $n = 4$ (suhteellisuusteoria), mutta yleiset periaatteet ovat pitkälti samoja kun $n \geq 5$.

Koordinaattifunktiot 1/2

- Avaruuskäyrän (eli $n = 3$) parametrisointi voidaan antaa muodossa

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \text{ kun } t \in I = [a, b].$$

- Parametrisointi voidaan kirjoittaa myös koordinaattimuodossa

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in I. \\ z = z(t), \end{cases}$$

- Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää jopa vektorimuotoa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \text{ kun } t \in I,$$

jossa $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, ja $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ ovat $\mathbb{R}^3$:n *luonnolliset kantavektorit*.

Koordinaattifunktiot 2/2

- Edellä x, y, z ovat *koordinaattifunktioita*, ja jatkuvuus tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että nämä ovat jatkuvia funktioita välillä I.
- Tapauksessa $n = 2$ kyseessä on tasokäyrä, joten z-koordinaatti jää pois:
  $$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$
  kun $t \in I$.
- **Huom.** Samalla käyrällä on useita eri parametrisointeja. Miksi? Kuinka pääset yhdestä parametrisoinnista toiseen?

Esimerkki 1 (suora tasossa)

- Olkoot $P_0 = (x_0, y_0)$ ja $P_1 = (x_1, y_1)$ kaksi annettua pistettä xy-tasossa $\mathbb{R}^2$.
- Pisteiden P_0 ja P_1 kautta kulkeva suora voidaan parametrisoida

  $$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = (1-t)x_0 + tx_1, \\ y(t) = (1-t)y_0 + ty_1, \end{cases}$$

  kun $t \in I = (-\infty, \infty)$.
- Hetkellä $t = 0$ saadaan $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) = (x_0, y_0)$ ja vastaavasti $\mathbf{r}(1) = (x_1, y_1)$.
- Asettamalla parametrisointiväliksi $I = [0, 1]$, saadaan pisteitä P_0 ja P_1 yhdistävä jana.

Esimerkki 2 (reaalifunktion kuvaaja)

- Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kuvaajaa $y = f(x)$ voidaan ajatella xy-tason käyränä.
- Tämä käyrä voidaan parametrisoida

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = f(t), \end{cases}$$

  missä $t \in [a, b]$.
- Vektorimuodossa voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}.$$

Esimerkki 3 (Helix-käyrä eli kierrejousi)

- Helix-käyrä eli kierrejousi voidaan parametrisoida

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = a\cos(t), \\ y(t) = a\sin(t), \quad t \in I \\ z(t) = bt, \end{cases}$$

  missä $a, b > 0$ ovat parametreja.

- Vaihtoehtoisesti voidaan jälleen käyttää vektorimuotoa

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = a\cos(t)\mathbf{i} + a\sin(t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}.$$

- Parametri a on jousen säde. Voidaan ajatella, että parametri b kertoo kuinka paljon jousta on venytetty.

Peruskäsitteitä: suunnistus

- Usein parametriväli on suljettu väli $I = [a, b]$. On mahdollista, että $a < b$ tai $b < a$.
- Parametrisointi määrää käyrälle positiivisen suunnan, jolloin $\mathbf{r}(a)$ on käyrän *alkupiste* ja $\mathbf{r}(b)$ sen *päätepiste*. Käyrää, jonka alku- ja päätepiste ovat samoja, kutsutaan suljetuksi.
- Voidaan muodostaa myös vastakkainen parametrisointi, jossa käyrä pysyy samana, mutta sen kulkusuunta vaihtuu.
- Tällöin myös parametrisointiin liittyvät alku- ja päätepiste vaihtuvat toisikseen.
- Tapauksessa $\mathbf{r}\colon [0, 1] \to C$ vastakkainen parametrisointi $\mathbf{r}_-$ saadaan helposti kaavalla $\mathbf{r}_-(t) = \mathbf{r}(1 - t)$, $t \in [0, 1]$.

Esimerkki 4 (ympyrän kehä tasossa)

- Olkoon $P_0 = (x_0, y_0)$ ja $r_0 > 0$. Parametrisoidaan P_0-keskisen ja r_0-säteisen ympyrän kehä.
- Saadaan
$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = x_0 + r_0 \cos(t), \\ y(t) = y_0 + r_0 \sin(t). \end{cases}$$
- Parametrisointiväliksi voidaan valita esim. $[0, 2\pi]$ tai $[-\pi, \pi]$, jos halutaan parametrisoida koko kehä.
- Käyrä on suljettu, koska $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi) = (x_0 + r_0, 0)$ ja $\mathbf{r}(-\pi) = \mathbf{r}(\pi) = (x_0 - r_0, 0)$.
- Ympyrän kaari voidaan parametrisoida valitsemalla parametriväli sopivasti.
- Suunnistus voidaan vaihtaa päinvastaiseksi korvaamalla $t \mapsto -t$ parametrisoinnissa.

Peruskäsitteitä: implisiittinen muoto

- Tasokäyrän yhtälö voidaan usein ilmaista myös implisiittisessä muodossa $F(x, y) = 0$, missä F on jokin kahden muuttujan lauseke.
- Konkreettisia esimerkkejä ovat funktion kuvaaja $y = f(x)$, joka voidaan määritellä muodossa $F(x, y) = y - f(x) = 0$, ja R-säteinen ympyrä $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.
- Huomaa, että yhtälön $F(x, y) = 0$ määräämä tasojoukko ole läheskään aina tasokäyrä.
- **Esimerkki:** Jos $A \subset \mathbb{R}^2$ on mikä tahansa suljettu tasojoukko (reunapisteet kuuluvat joukkoon), niin funktio

$$F(x, y) = \text{ pisteen } (x, y) \text{ pienin etäisyys joukosta } A$$

on jatkuva, mutta yhtälö $F(x, y) = 0$ esittää koko alkuperäistä joukkoa A.

Käyrän tangentti 1/3

- Tarkastellaan 3-ulotteista parametrisointia $\mathbf{r}$, joka on *jatkuvasti derivoituva*.
- Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisen koordinaattifunktion täytyy olla derivoituva ja derivaatan vielä lisäksi jatkuva.
- Parametriväliä $[t, t + \Delta t]$ vastaava käyrän sekantti on vektori

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

- Kun $\Delta t \to 0$, niin $\Delta \mathbf{r}$ kääntyy yhä enemmän käyrän tangentin suuntaiseksi, mutta samalla sen pituus pienenee kohti nollaa. Piirrä kuva!

Käyrän tangentti 2/3

- Skaalaamalla kertoimella Δt saadaan kuitenkin erotusosamäärää vastaava lauseke, josta nähdään, että raja-arvo

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

  on olemassa.

- Se voidaan käytännössä laskea kaavalla

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

- **Perustelu:** Vektorin $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ ensimmäinen koordinaatti

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \to x'(t),$$

  kun $\Delta t \to 0$, ja samoin käy muissa koordinaateissa.

Käyrän tangentti 3/3

Määritelmä

Jos käyrällä $C \subset \mathbb{R}^3$ on jatkuvasti derivoituva parametrisointi $\mathbf{r}$, niin pisteessä $\mathbf{r}(t)$,

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

on käyrän tangenttivektori ja funktiot x, y, z ovat parametrisoinnin koordinaattifunktiot. Tason tapauksessa z-koordinaatti jää pois. Voidaan ajatella, että $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ on käyrää C pitkin liikkuvan kappaleen nopeus ja $\|\mathbf{v}(t)\|$ vauhti (hetkellä t).

Huomautus: Tangenttivektorin määritelmästä saadaan hyödyllinen approksimaatio: Koska $\mathbf{r}'(t) \approx \Delta\mathbf{r}/\Delta t$, niin $\Delta\mathbf{r} \approx \mathbf{r}'(t)\Delta t$ kun $\Delta t \approx 0$.

Esimerkki 5

- Sykloidin parametrisointi (kulman t avulla) on muotoa

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Piirrä tai katso wikipediasta animaatio!

- Lasketaan tangenttivektori

$$\mathbf{r}'(t) = a(1 - \cos t)\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j},$$

ja kiihtyvyys $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = a \sin t\mathbf{i} + a \cos t\mathbf{j}$.

- Saadaan $\|\mathbf{a}(t)\| = |a| =$ tasaisen pyörimisliikkeen kiihtyvyys.
- Huomaa, että $\mathbf{r}'(2\pi n) = \overline{0}$ eli hetkellinen nopeus on nolla. Tällöin käyrän suunta voi muuttua jyrkästi, vaikka käyrän parametrisointi onkin jatkuvasti derivoituva.

Kaarenpituus

- Olkoon $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ käyrän C jatkuvasti derivoituva parametrisointi.
- Jos käyrää approksimoidaan sekanteista muodostetulla murtoviivalla ja annetaan approksimaation tihentyä, voidaan ajatella murtoviivan pituuden suppenevan kohti kaaren pituutta $\ell(C)$.
- Kaarenpituus voidaan laskea integraalina

$$\ell(C) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$

- Jos käyrän parametrisointi on ainostaan paloittain jatkuvasti derivoituva, saadaan koko käyrän kaarenpituus laskemalla osien kaarenpituudet yhteen.
- Vaikka käyrällä on aina äärettömän monta eri parametrisointia, voidaan kuitenkin osoittaa, ettei kaarenpituus riipu parametrisoinnin valinnasta eikä suunnasta.

Esimerkki 6

- Lasketaan Helix-käyrän $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ kaarenpituus parametrivälillä $t \in [0, 2\pi]$.
- Koska $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, niin

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

- Kaarenpituudeksi saadaan

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

Esimerkki 7

- Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituudelle on välillä $[a, b]$ olemassa jo ennestään tuttu kaava. Tämä voidaan johtaa myös asettamalla $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$, kun $t \in [a, b]$.
- Tällöin $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}$ ja $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$, joten kaarenpituudeksi saadaan

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$

- **Huom.** Kaarenpituutta voidaan tutkia myös sellaisille käyrille, joiden parametrisointi on muodostettu rajoittamattomalla välillä tai käyrä on "rajoittamaton" tai "itsensä päälle laskostuva" avoimen parametrivälinsä päätepisteen läheisyydessä. Anna esimerkkejä!

  Kaarenpituusintegraalista tulee tällöin epäoleellinen. Jos tämä integraali on suppeneva, niin käyrää sanotaan *suoristuvaksi*.