DIFFERENTIAALI

Differentioituvalle funktiolle differentiaali df approksimoi funktion arvon muutosta Δf :

$$\Delta f = f(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

Linearisoinnista: $z = f(x_1, \dots, x_n)$

$$dz = df = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

Pätee :
$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}} \xrightarrow[dx_i \to 0]{} 0$$

<u>Vektoriarvoiset funktiot</u> : $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \quad ; \quad f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

↳ komponenttifunktioita

Funktiolle merkintä : $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$

Jacobin matriisi

$$d_{\underline{f}} = D\underline{f}(\underline{x}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Erityisesti : $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\longrightarrow$ $D\underline{f}(\underline{x})$ on neliömatriisi ja sen determinantti on määritelty

Ketjusääntö : $D(\underline{f} \circ \underline{g})(\underline{x}) =$

$$= D\underline{f}(\underline{g}(\underline{x}))D\underline{g}(\underline{x})$$

Differentiaali : $d\underline{f} = D\underline{f}(\underline{x})\Delta\underline{x}$

GRADIENTTI

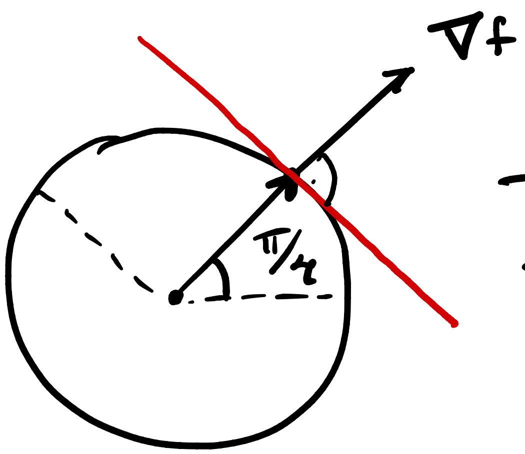
Olkoon $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, derivoituva pisteessä $\underline{x} \in D$.

<u>Määritelmä</u> Funktion f gradientti pisteessä $\underline{x}$ on vektori

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

$n = 3$: $\nabla = \underline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}$

Gradientti kertoo funktion nopeimman kasvun suunnan.



Tarvitaan ns. suunnatun derivaatan käsite.

$f(x,y) = x^2 + y^2$; yksikköympyrä $f(x,y) = 1$

$\nabla f = 2x\underline{i} + 2y\underline{j}$

<u>Formaalisti</u>: $I = [-1, 1]$; $\underline{r}(t) : I \to \mathbb{R}^2$

Tässä $\underline{r}(t)$ on parametrisoitu taso-arvokäyrä s.e. $\underline{r}(0) = (a, b)$.

$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j}$; lisäksi $\forall t \in I$
$f(x(t), y(t)) = f(a, b)$
vakio $\xrightarrow{\text{derivaatta}}$

Ketjusääntö:

$$f_1(x(t), y(t))\, x'(t) + f_2(x(t), y(t))\, y'(t) = 0$$

Valitaan erityisesti $t = 0$:

$$\nabla f(a, b) \cdot \underline{r}'(0) = 0$$

→ gradientti ja tangenttivektori ovat kohtisuorassa
→ lisäoletus: $\nabla f(a, b) \neq \underline{0}$

<u>Lause</u>

Seuraus: $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$ tarkoittaa, että $\underline{x}$ on mahdollinen ääriarvo.

Lause $\underline{u} = u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j}$; $\|\underline{u}\| = 1$

$= u_1^2 + u_2^2$

Tällöin funktion f suunnattu derivaatta

$$D_{\underline{u}} f(a,b) = \underline{u} \cdot \nabla f(a,b).$$

Esimerkki $f(x,y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$

$D_{\underline{u}} f(0,1)$: a) $\underline{u} = \underline{i} + 2\underline{j}$ b) $\underline{u} = \underline{i} + \underline{j}$

$\nabla f(0,1) = 2\underline{i} + 4\underline{j}$

(a) $\underline{u} = (\underline{i} + 2\underline{j})/\sqrt{5}$

$$D_{\underline{u}} \nabla f(0,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\underline{i} + 2\underline{j}) \cdot (2\underline{i} + 4\underline{j})$$

$$= 2\sqrt{5} \simeq 4.5$$

$\underline{u} \parallel \nabla f(0,1)$

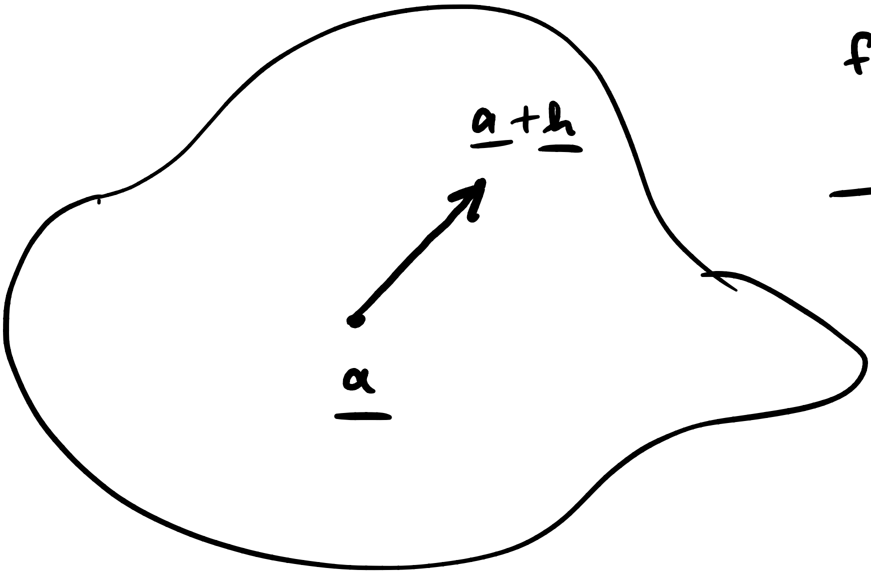
(b) $\underline{u} = (\underline{i} + \underline{j})/\sqrt{2}$

$$D_{\underline{u}} \nabla f(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{i} + \underline{j}) \cdot (2\underline{i} + 4\underline{j})$$

$$= 3\sqrt{2} \simeq 4.2$$

TAYLORIN KAAVA

Pisteapproksimaatio ; kehityskeskus $\underline{a}$; $\underline{h}$



$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ jatkuvat osittaisderivaatat koko janalla

<u>Taylor</u> :

$$f(\underline{a} + \underline{h}) \simeq \sum_{j=0}^{m} \frac{(\underline{h} \cdot \nabla)^j f(\underline{a})}{j!}$$

<u>Esimerkki</u> $f(x,y)$; $\underline{h} = (h,k)$; $T_2(f ; (a,b))$

$$T_2(f ; (a,b)) = \sum_{j=0}^{2} \frac{((h,k) \cdot \nabla)^j f(a,b)}{j!}$$

$$= f(a,b) + (hD_1 + kD_2) f(a,b)$$

$$+ \frac{1}{2} \underbrace{(hD_1 + kD_2)^2}_{hD_{11} + 2hkD_{12} + k^2 D_{22}} f(a,b)$$

$$= f(a,b) + hf_1(a,b) + kf_2(a,b)$$

$$+ \frac{1}{2}h^2 f_{11}(a,b) + hkf_{12}(a,b)$$

$$+ \frac{1}{2}k^2 f_{22}(a,b)$$