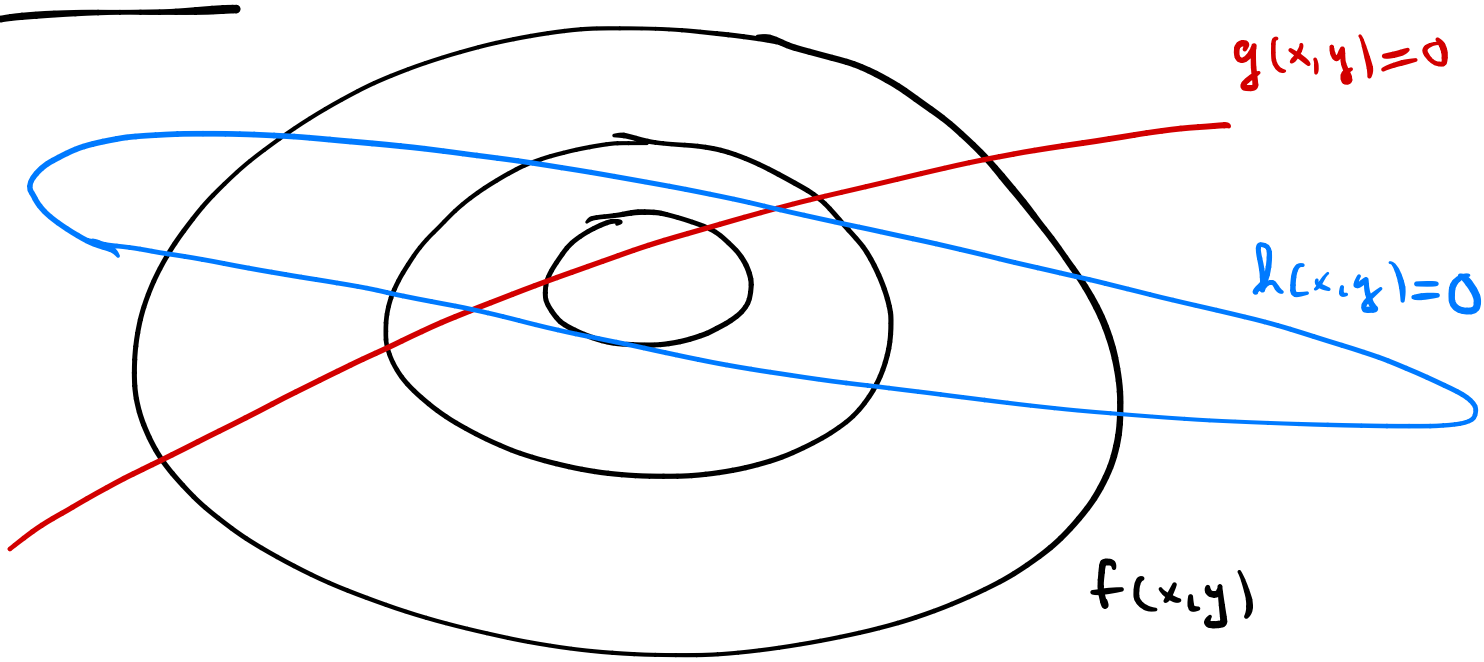
LAGRANGEN KERTOIMET

Rajoiteoptimointi tai sidosoptimointi

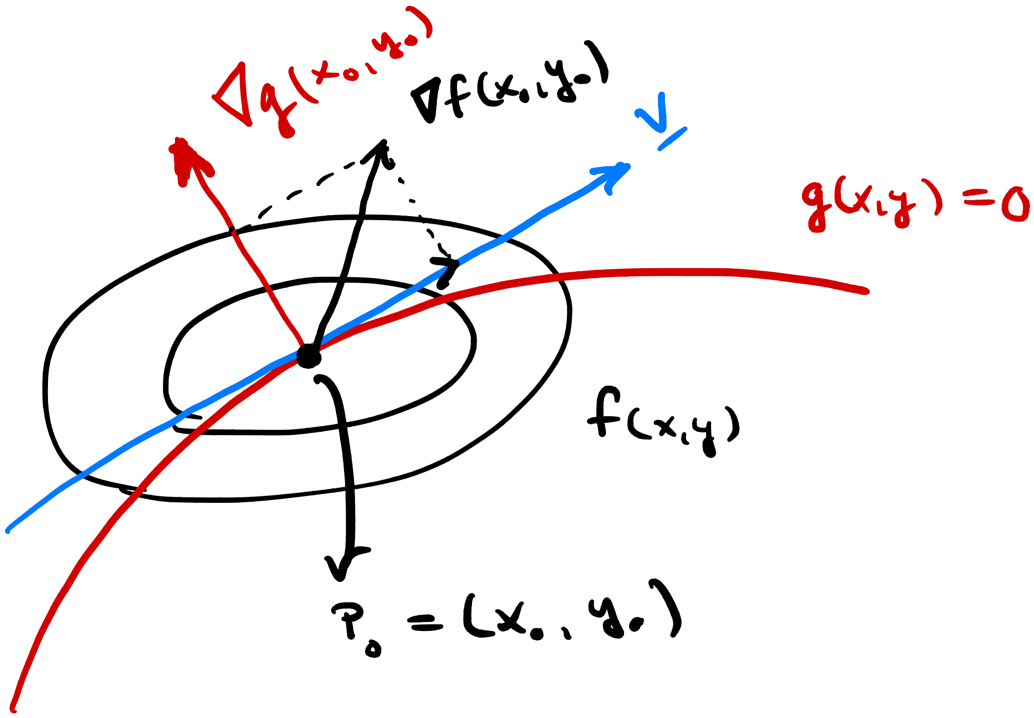
"Minimoi $f(x,y)$ ehdolla $g(x,y) = 0$"

Yleiskuva



Zoom

$\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$



Geometrinen havainto: $\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0)$

ts. on olemassa reaalinen λ_0 s.e.

$$\nabla f(x_0, y_0) = -\lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$$

Saadaan siis ehto $\nabla (f + \lambda_0 g)(P_0) = \underline{0}$ kriittiselle pisteelle P_0.

On saatu ns. Lagrangen funktio

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

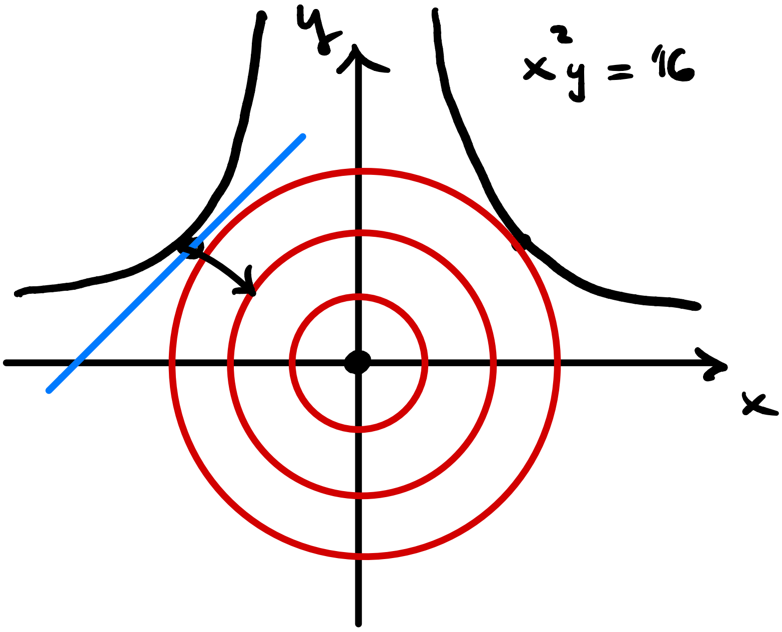
Jos piste on Lagrangen funktion kriittinen piste, niin

$$\frac{\partial L}{\partial x} = f_1(x, y) + \lambda g_1(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = f_2(x, y) + \lambda g_2(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0$$

Esimerkki Määritä lyhin etäisyys origosta käyrälle $x^2 y = 16$.



Tehtävä: Minimoi $f(x,y) = x^2 + y^2$

ehdolla $g(x,y) = x^2 y - 16 = 0$

Lagrange: $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 y - 16)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x y = 0 = 2x(1 + \lambda y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda x^2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 y - 16 = 0 \quad (3)$$

(1): $\underbrace{x = 0}_{\text{RR (3):n kanssa}}$ tai $\underline{\lambda y = -1}$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda xy = 0 = 2x(1+\lambda y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda x^2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 y - 16 = 0 \quad (3)$$

Siis: $\lambda y = -1$

(2): $0 = 2y + \lambda x^2 \quad \Big| \cdot y$

$$\Rightarrow 0 = 2y^2 + \underbrace{\lambda y}_{=-1} x^2 = 2y^2 - x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}\, y$$

(3) $2y^3 = 16 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

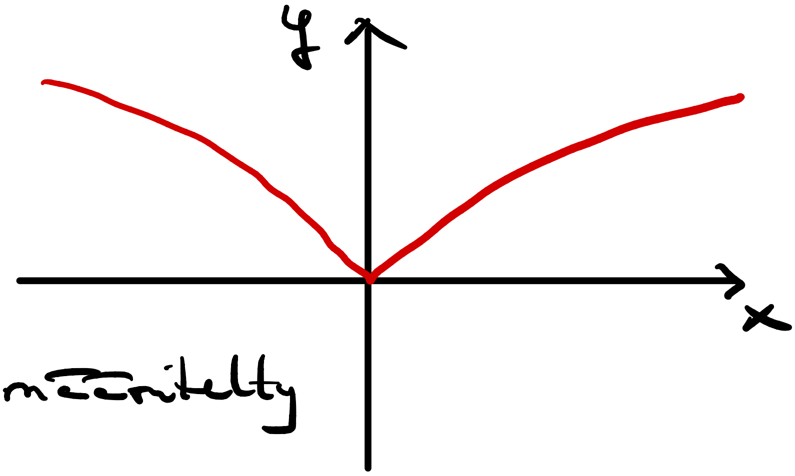
Kaksi vaihtoehtoa: $(\pm\sqrt{2}\,2, 2)$

Etäisyys molemmista on sama $= 2\sqrt{3}$

Esimerkki

Minimoi $f(x,y) = y$
ehdolla $g(x,y) = y^3 - x^2 = 0$

$y^3 = x^2$:



Origossa ei ole määritelty tangenttia!

Funktiolla f on siis minimi origossa.

Lagrange: $L(x, y, \lambda) = y + \lambda(y^3 - x^2)$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 3\lambda y^2 = 0 \longrightarrow y = 0 \text{ ei toteudu!}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y^3 - x^2 = 0$$

$\longrightarrow$ Lagrangella ei saada ratkaisua!

Synteesi: Ääriarvo voi olla

(i) Lagrangen funktion kriittinen piste

(ii) piste $\nabla g = \underline{0}$

(iii) piste jossa joko ∇f tai ∇g ei ole määritelty

(iv) rajoitusehdon määräämän pistejoukon reunalla

Mitä jos rajoitusehtoja on useampia?

Esim. Minimoi $f(x,y,z)$
ehdoilla $g(x,y,z) = 0$
ja $h(x,y,z) = 0$

Lagrange:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) =$$

$$f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

Esimerkki

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = xy + 2z + \lambda(x+y+z) + \mu(x^2+y^2+z^2-24)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + \lambda + 2\mu x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + \lambda + 2\mu y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 + \lambda + 2\mu z = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0 \qquad (5)$$

$(2) - (1)$: $(x-y)(1-2\mu) = 0$

Joko $\underbrace{x = y}_{\text{II}}$ tai $\underbrace{\mu = 1/2}_{\text{I}}$.

I : (2) & (3) : $x + y = 2 + z$

(4) : $\Rightarrow z = -1$

$\Rightarrow x + y = 1$

(5) : $x^2 + y^2 = 23$

Helpot keinot on käytetty loppuun:

Miten yhdistää $x+y=1$ ja $x^2+y^2=23$?

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 23+2xy = 1$$

$$\Rightarrow xy = -11$$

$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = 45$$

$$\Rightarrow x-y = \pm 3\sqrt{5}$$

Yhtälöpari: $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\pm 3\sqrt{5} \end{cases}$

ja $z=-1$

$$f(x,y,z) = xy+2z = -11-2 = \underline{\underline{-13}}$$

II $x=y$: (4) : $z=-2x$
(5) : $6x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm 2$

Pisteet: $(2,2,-4)$, $(-2,-2,4)$

$$f(2,2,-4) = 4-8 = -4$$
$$f(-2,-2,4) = 4+8 = \underline{12}$$

Siis: Minimi $= -13$
Maksimi $= 12$