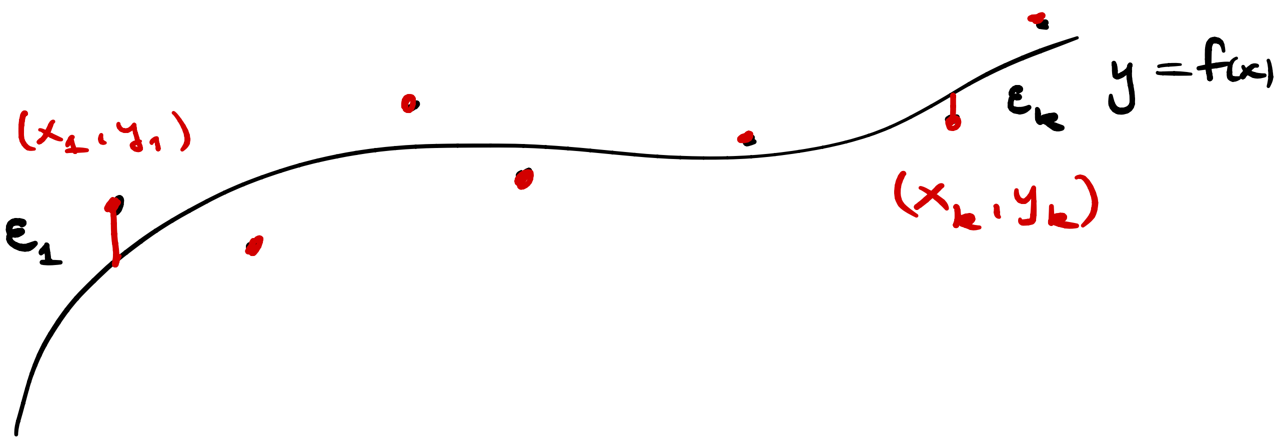
PIENIMMÄN NELIÖSUMMAN MENETTELY

Data: (x_i, y_i)



Huomaa! Miksi ei minimoida

$$T = |y - y_1| + \dots + |y - y_k|$$

Minimi ei tässä ole yksikäsitteinen!

Lineaarinen regressio: Sovitetaan suora

$$y = ax + b$$

Minimoidaan: $$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - a x_i - b) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b) = 0$$

Yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + n \, b = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \quad (*)$$

$$\underset{n\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} ; \quad \underset{n\times 1}{c} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = c \qquad \Big| \cdot \text{vasemmalta } A^T$$

$$\Rightarrow A^T A \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = A^T c \qquad (*)$$

Samat yhtälöryhmät (!)

2. asteen sovitus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2^2 \\ & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$$

ja toimitaan täsmälleen samalla tavalla!

<u>Lisäys</u>: Jatkuva data

$$I(p,q) = \int_0^1 (f(x) - px - q)^2 \, dx$$

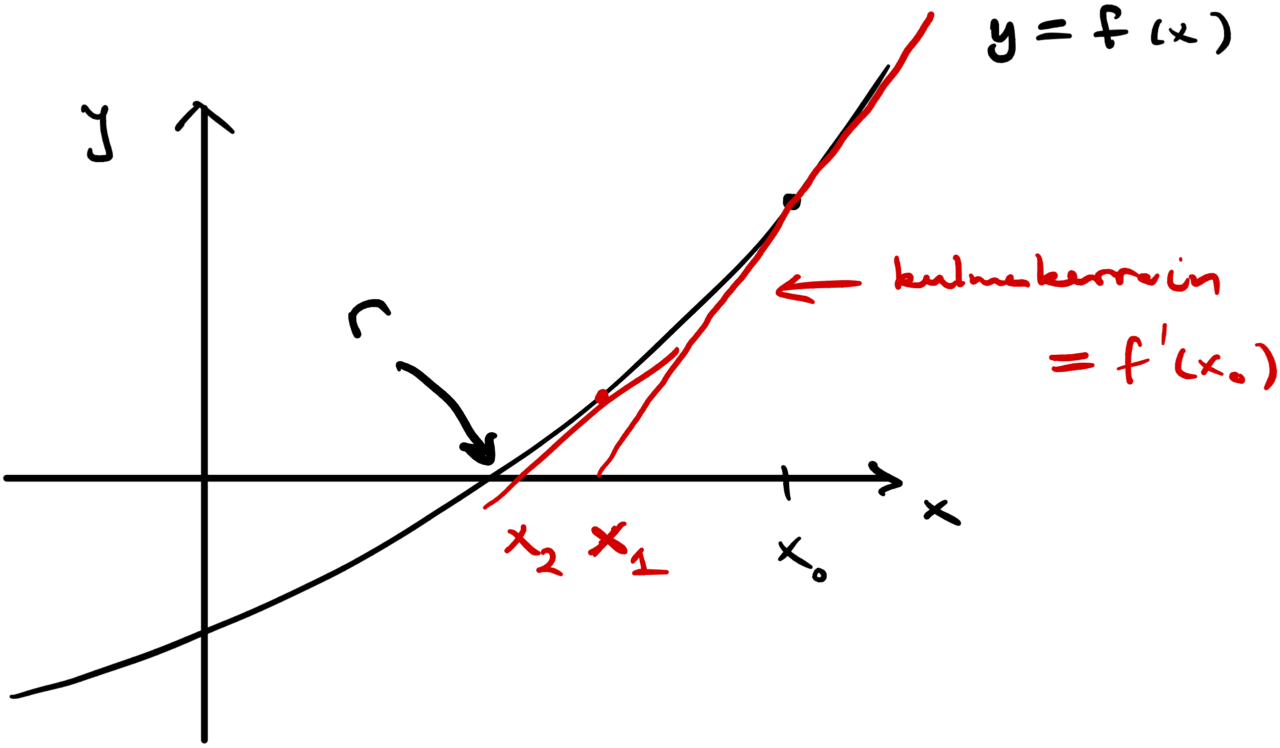
Sovitetaan suora yli välin $[0,1]$.
Oletetaan, että $f(x)$ on jatkuva.

$$\frac{\partial I}{\partial p} = -2 \int_0^1 x\,(f(x) - px - q)\,dx = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial q} = -2 \int_0^1 (f(x) - px - q)\,dx = 0$$

Yhtälöryhmä:
$$\begin{cases} \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q = \int_0^1 x f(x)\,dx \\ \frac{1}{2}p + q = \int_0^1 f(x)\,dx \end{cases}$$

Newtonin menetelmä



Haetaan nollakohta : $f(r) = 0$

Suoran yhtälö $\quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad \text{kun } y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{iteraatio} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$\Rightarrow$ nollakohta r on iteraation kiintopiste

Tasossa

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Alkuarvaus: (x_0, y_0)

Idea: Linearisoidaan pinnat pisteen (x_0, y_0) ympäristössä.

Tangenttitasot:

$$z = f(x_0, y_0) + f_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$z = g(x_0, y_0) + g_1(x_0, y_0)(x - x_0) + g_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Leikkauspiste (x_1, y_1)

Siis:

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f_2(x_0, y_0)(y_1 - y_0) \\ \qquad + f(x_0, y_0) = 0 \\ g_1(x_0, y_0)(y_1 - y_0) + g_2(x_0, y_0)(y_1 - y_0) \\ \qquad + g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
f_1(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f_2(x_0, y_0)(y_1 - y_0) \\
\qquad\qquad + f(x_0, y_0) = 0 \\
g_1(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + g_2(x_0, y_0)(y_1 - y_0) \\
\qquad\qquad + g(x_0, y_0) = 0
\end{cases}
$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Jacobin} \\ \text{matriisi}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}
$$

Ratkaistaan $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$: Merkitään $\underline{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - D_{\underline{f}(\underline{x})}^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}
$$

Iteraatio muodostetaan vastaavaan tapaan!

Huom! Cramerin ratkaisualgoritmin voisi korvata.