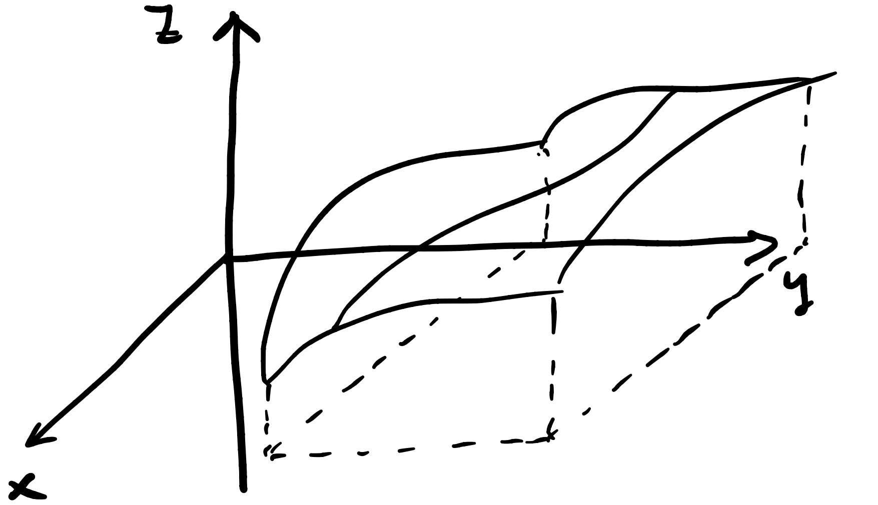
TASOINTEGRAALI

Tasoalue $D \subset \mathbb{R}^2$: $f : D \to \mathbb{R}$

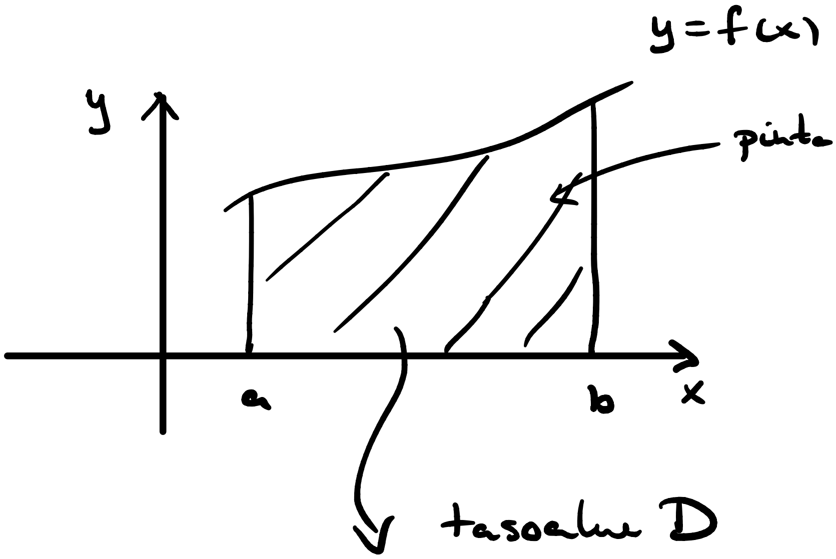
Tasointegraali : $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA$

Mikä on integraalin arvo? Pinta $z = f(x,y)$



Arvo on pinnan ja xy-tason väliin jäävän alueen tilavuus.

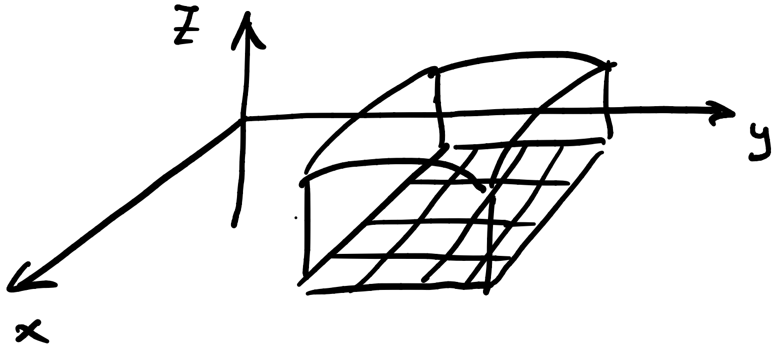
Huom!



pinta-ala $= \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Kysymys : Mikä on kaarenviivan pituus?

Rajoitutaan toistaiseksi alueisiin $D = [a, b] \times [c, d]$



Riemannin summa:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta x \Delta y$$

Δx ja Δy ~~määrää~~ jaon:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta y = \frac{d-c}{n}$$

Avaruusintegraali:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta x \Delta y \Delta z$$

ja vastaavasti korkeammissa dimensioissa.

MONINKERTAINEN TAI ITEROITU INTEGRAALI

$D = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

kun $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

<u>Esimerkki</u> $f(x,y) = xy^2$

$$\iint_D f(x,y)\,dA, \quad D = \left\{ (x,y) \mid \begin{array}{l} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1 \end{array} \right\}$$

$$\iint_D xy^2\,dA = \int_0^1 \int_0^1 xy^2\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \Big/_0^1 \frac{1}{2}x^2y^2\,dy$$

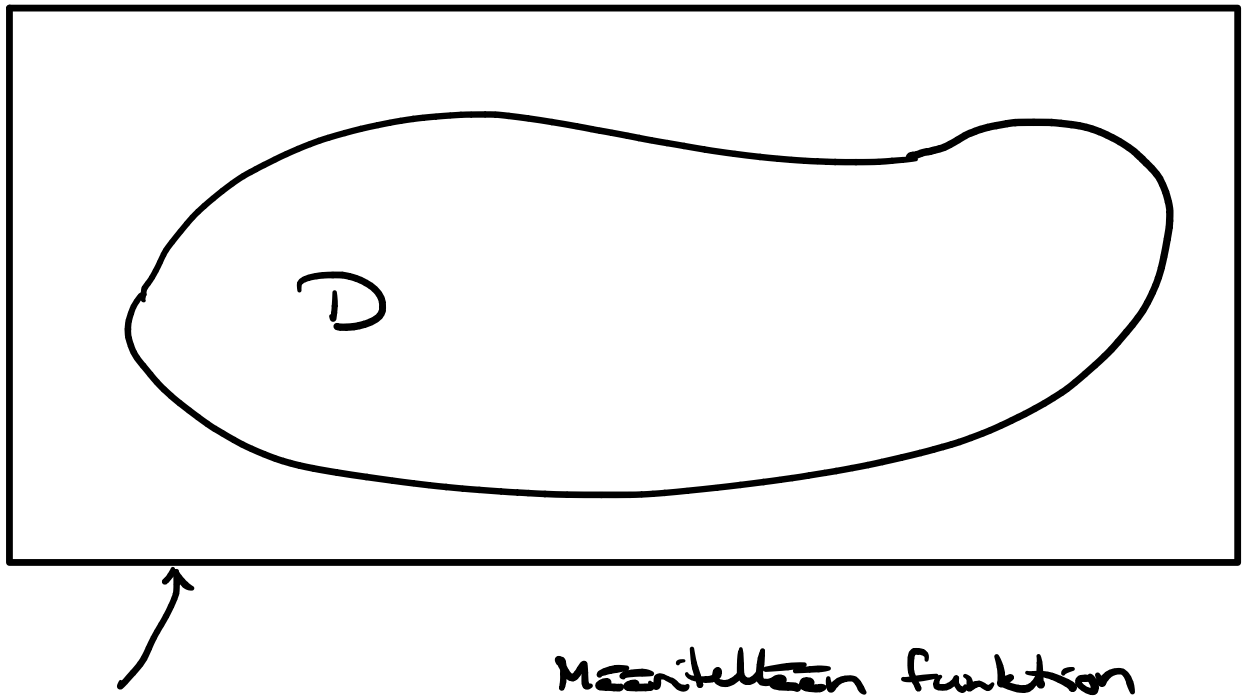
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}y^2\,dy = \Big/_0^1 \frac{1}{6}y^3 = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1\int_0^1 xy^2\,dy\,dx = \int_0^1 x\cdot\frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\Big/_0^1 \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{6}$$

Lisäksi, käytetään tulomuotoisuutta hyväksi:

$$\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

INTEGROINTI YLEISEMMÄSSÄ ALUEESSA



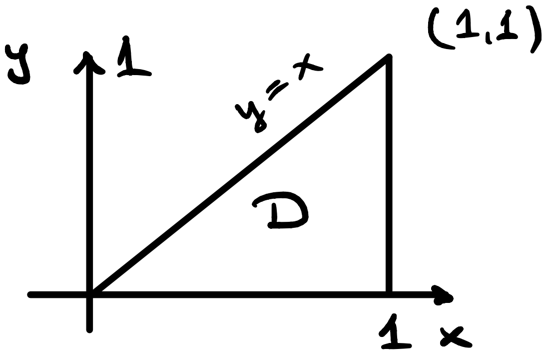
$\hat{D}$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{\hat{D}} \hat{f}(x,y)\,dA$$

Määritellään funktion f ns. nolla-jatko $\hat{f}$:

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\in \hat{D}\setminus D \end{cases}$$

Esimerkki



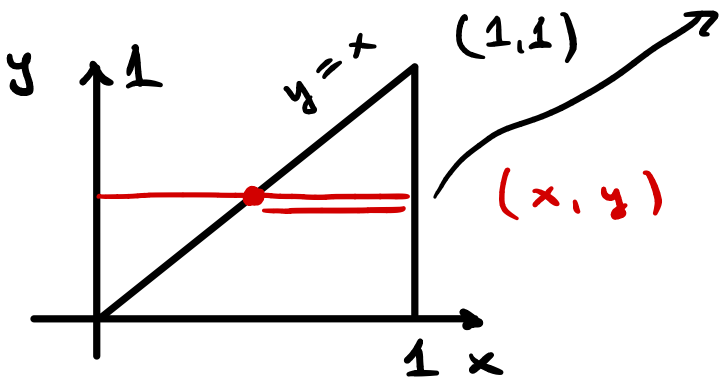
$$f(x,y) = xy$$

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$$

$$\iint_D xy \, dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2} \, dx = \frac{1}{8}$$

Toisaalta: $D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1\}$



$$\iint_D f(x,y) \, dA =$$

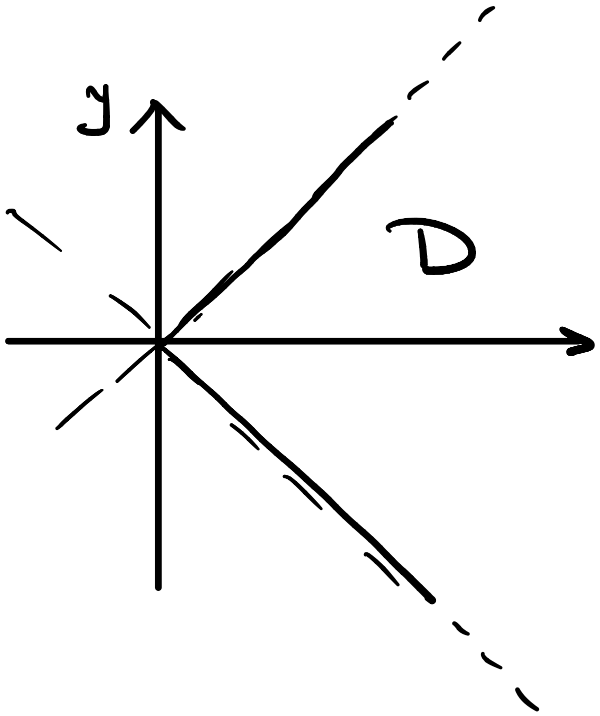
$$\int_0^1 \left(\int_y^1 xy \, dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y(1-y^2) \, dy = \frac{1}{8}$$

EPÄOLEELLISET INTEGRAALIT

Erikoistapauksia:

(A) rajoitettu (positiivinen) funktio rajoittamattomassa alueessa

$f(x,y) = e^{-x^2}$; D on suorien $y = \pm x$ rajoittama, $x > 0$



$$\iint_D e^{-x^2}\,dA = \int_0^{\infty}\int_{-x}^{x} e^{-x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} 2x e^{-x^2}\,dx$$

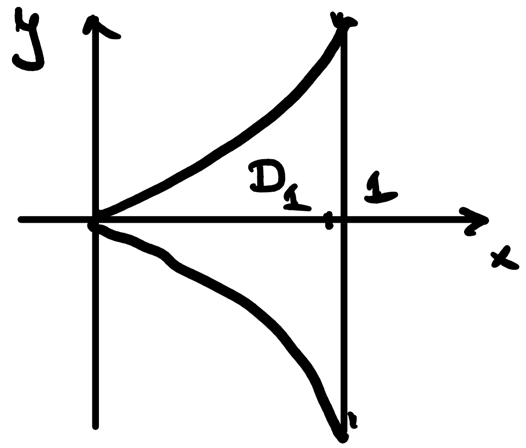
$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R 2x e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \Big/_{\!0}^{R} -e^{-x^2} = 1$$

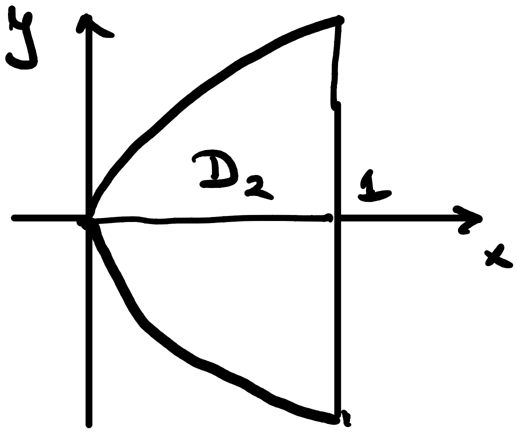
(B) Rajoittamaton funktio rajoitetussa alueessa

$$f(x,y) = 1/x^2$$

$$D_1 = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ |y| \le x^2 \}$$

$$D_2 = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ |y| \le \sqrt{x} \}$$





$$\iint_{D_1} \frac{1}{x^2}\,dA = \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} \frac{1}{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 2\,dx = 2$$

$$\iint_{D_2} \frac{1}{x^2}\,dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 2x^{-3/2}\,dx$$

$$= \infty$$