Lause Väliarvolause

Jos $f_1(x,y)$ ja $f_2(x,y)$ ovat jatkuvia pisteen (a,b) ympäristössä, ja jos h ja k ovat itseisarvoltaan riittävän pieniä, niin on olemassa $\theta_1 \in [0,1]$ ja $\theta_2 \in [0,1]$ s.e.

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) =$$
$$= h f_1(a+\theta_1 h, b+k) + k f_2(a, b+\theta_2 k)$$

Todistus (IDEA)

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) =$$
$$= \big(f(a+h, b+k) - f(a, b+k)\big)^{(1)}$$
$$+ \big(f(a, b+k) - f(a,b)\big)^{(2)}$$

(1) V.A.L $f(x, b+k)$ välillä $x \in [a, a+h]$

(2) V.A.L $f(a, y)$ välillä $y \in [b, b+k]$

Lause (Differentioituvuus ja jatkuvat osittaisderivaatat)

Todistus $\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$, $\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$

$$\left|\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-hf_1(a,b)-kf_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|$$

$$\stackrel{\text{V.A.L}}{=} \left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big(f_1(a+\theta_1 h, b+k)-f_1(a,b)\Big) + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big(f_2(a, b+\theta_2 k)-f_2(a,b)\Big)\right|$$

$$\leq |f_1(a+\theta_1 h, b+k)-f_1(a,b)| + |f_2(a, b+\theta_2 k)-f_2(a,b)|$$

Molemmat termit $\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$ jatkuvuuden nojalla.

$\square$

Differentiaali

Differentioituvalle funktiolle differentiaali df approksimoi funktion arvon muutosta Δf:

$$\Delta f = f(x_1+dx_1, \dots, x_n+dx_n) - f(x_1,\dots,x_n)$$

Linearisoinnista: $z = f(x_1, \dots, x_n)$

$$dz = df = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

Pätee: $$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}} \to 0,$$ jos $dx_i \to 0$.