MS-A0201
Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
Luento 11: Taso- ja tilavuusintegraalien sovellutuksia

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos[1]
Aalto-yliopisto

Kevät 2020

[1]Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

Moninkertaisten integraalien sovelluksia 1/3

Tähän mennessä moninkertaisten integraalien sovelluksina on esiintynyt:

- Alueen $D \subset \mathbb{R}^2$ pinta-ala

$$\mathrm{A}(D) = \iint_D 1 \, dA.$$

- Kappaleen $D \subset \mathbb{R}^3$ tilavuus

$$\mathrm{V}(D) = \iiint_D 1 \, dV.$$

Moninkertaisten integraalien sovelluksia 2/3

Mekaniikassa tulevat vastaan nämä:

- Kappaleen massa

$$m(D) = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV.$$

- Hitausmomentti kappaleen pyöriessä z-akselin ympäri:

$$I_z(D) = \iiint_D \rho(x, y, z)(x^2 + y^2)\, dV.$$

Tässä $\rho(x, y, z)$ on materiaalin tiheys pisteessä (x, y, z).

Moninkertaisten integraalien sovelluksia 3/3

- Kaksiulotteisen tasolevyn painopisteen eli massakeskipisteen $(\bar{x}, \bar{y})$ laskeminen

$$\bar{x} = \frac{1}{A(D)} \iint_D x \, dA, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A(D)} \iint_D y \, dA,$$

jossa pinta-ala $A(D)$ on laskettu tasointegraalilla jo aiemmin.

- Jos levyn massa ei ole tasaisesti jakautunut, integraalia korjataan paikasta riippuvalla tiheydellä $\rho(x, y)$

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \iint_D x\rho(x, y) \, dA, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m(D)} \iint_D y\rho(x, y) \, dA.$$

jossa massa $m(D) = \iint_D \rho(x, y) \, dA$ lasketaan tasointegraalilla.

Massakeskipiste 1/2

Kolmiulotteisen kappaleen D massakeskipiste $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \iiint_D x\rho(x,y,z)\, dV,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m(D)} \iiint_D y\rho(x,y,z)\, dV,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m(D)} \iiint_D z\rho(x,y,z)\, dV,$$

missä $\rho = \rho(x,y,z)$ on kappaleen tiheys pisteessä (x,y,z) ja $m(D)$ on kappaleen massa (tilavuusintegraalilla).

Massakeskipiste 2/2

Kaava voidaan kirjoittaa myös vektorimuodossa

$$\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k} = \frac{\iiint_D \mathbf{r}\rho \, dV}{\iiint_D \rho \, dV},$$

missä $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Esimerkki

- Lasketaan epäyhtälöiden $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ja $0 \leq z \leq 1$ määräämän yksikkökuution D massakeskipiste, kun tiheys $\rho(x, y, z) = z$.
- **Huom.** Yksikkökuutio D voidaan myös määritellä käyttäen nk. karteesista tuloa:

$$D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^3.$$

Tämä merkintätapa tarkoittaa samaa kuin ylläoleva määritelmä epäyhtälöiden avulla.

Ratkaisu 1/2

- Lasketaan ensin massa

$$\iiint_D \rho\, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 z\, dz = \Big|_{z=0}^{1} \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2}.$$

- Saadaan

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xz\, dx\, dy\, dz}{1/2} = \frac{\left(\Big|_{x=0}^{1} \frac{1}{2} x^2\right)\left(\Big|_{z=0}^{1} \frac{1}{2} z^2\right)}{1/2}$$

$$= \frac{(1/2)^2}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu 2/2

- Vastaavasti

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 yz\, dx\, dy\, dz}{1/2} = \frac{(1/2)^2}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

- Edelleen voidaan laskea

$$\bar{z} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z^2\, dx\, dy\, dz}{1/2} = \frac{\Big|_{z=0}^{1} \frac{1}{3} z^3}{1/2}$$

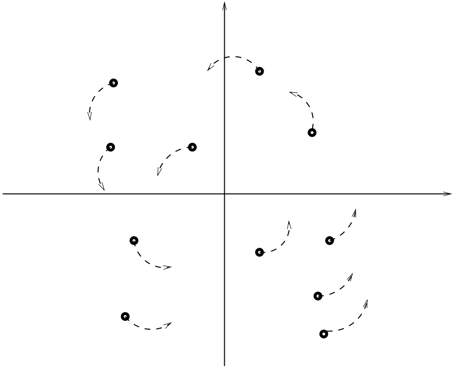
$$= \frac{(1/3)}{(1/2)} = \frac{2}{3}.$$

- Massakeskipisteeksi saadaan

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1/2, 1/2, 2/3).$$

Hitausmomentti 1/3

Tarkastellaan tilannetta, jossa pistemäiset kappaleet kiertävät origoa xy-tasossa ympyrän muotoista rataa pitkin samalla kulmanopeudella.



Hitausmomentti 2/3

- Voidaan laskea kappaleiden yhteenlaskettu liike-energia saadaan laskemalla summa

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Big[\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \Big] \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \Big] \omega^2,$$

  missä ω on kulmanopeus ja m_i, x_i sekä y_i ovat i:nnen kappaleen massa ja paikka.

- Summaa

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

  kutsutaan hitausmomentiksi.

Hitausmomentti 3/3

- Ajattelemalla z-akselin ympäri pyörivä kappale joukoksi "infinitesimaalisen pieniä" pisteitä, voidaan edelläolevasta summasta päätellä kappaleen liike-energia:

$$E = \frac{1}{2}\Big[\iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV\Big]\omega^2$$

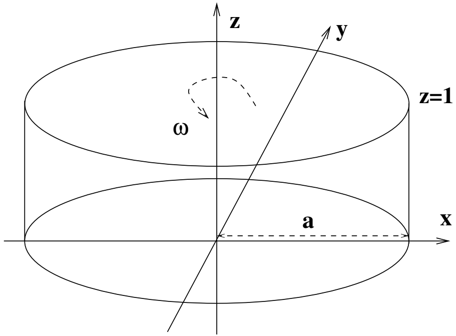
$$= \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

missä

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV = \iiint_D dm \cdot r_z^2$$

on kappaleen hitausmomentti z-akselin suhteen ($r_z^2 = x^2 + y^2$ ja $dm = \rho(x, y, z)\, dV$).

Esimerkki



- Lasketaan sylinterin

$$D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ ja } 0 \leq z \leq 1\}, \qquad a > 0$$

hitausmomentti z-akselin suhteen, kun tiheys on vakio $\rho = \rho_0$.

Ratkaisu 1/2

- Lasketaan

$$
\begin{aligned}
I_z &= \iiint_D (x^2 + y^2)\rho_0 \, dV \\
&= \rho_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r \, dr \, d\theta \, dz \\
&= 2\pi\rho_0 \int_0^a r^3 \, dr = \frac{1}{2}\pi\rho_0 a^4.
\end{aligned}
$$

Ratkaisu 2/2

- Toisaalta sylinterin massa on

$$m = \iiint_D \rho_0 \, dV = \rho_0 \mathrm{V}(D) = \rho_0 \pi a^2.$$

- Siten hitausmomentti voidaan kirjoittaa

$$I_z = \frac{1}{2}(\pi \rho_0 a^2) a^2 = \frac{1}{2} m a^2.$$