Lagrangen kertoimista

Miko Karjalainen

Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) esitti nykyään nimeään kantavan Lagrangen menetelmän ensimmäisen kerran teoksessa *Leçons sur le calcul des fonctions* vuonna 1804.

Kertoimien fysikaalisesta merkityksestä

Tehtävä

(i) Maksimoi ilmanvastuksettoman heittokappaleen kantama $R(\mathbf{v})$ käyttäen Lagrangen menetelmää, kun kappaleen kineettinen energia heittohetkellä on $K = m\|\mathbf{v}\|^2/2 = E$. Tässä $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ tarkoittaa kappaleen alkunopeutta.

(ii) Osoita, että tällöin Lagrangen kertoimelle pätee $\lambda = dR(\mathbf{v}^*)/dE$, missä $\mathbf{v}^*$ on optimointitehtävän ratkaisu. Mikä on kertoimen λ fysikaalinen merkitys?

Ratkaisu

(i) Tehtävänä on löytää maksimi kantamalle $R(\mathbf{v})$ sidosehdolla $K(\mathbf{v}) = E$. Ensiksi täytyy tietysti määritellä funktio R. Oletetaan, että heittokappale lähtee korkeudelta y_0 ja $v_x, v_y > 0$. Tällöin sen korkeus ajan funktiona on

$$y = y_0 + v_y t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Matka-aika Δt saadaan tästä asettamalla $y = y_0$, jolloin

$$v_y - \frac{1}{2} g \Delta t = 0 \Leftrightarrow \Delta t = \frac{2v_y}{g}$$

ja siten kantama voidaan esittää lähtönopeuden avulla muodossa

$$R(v_x, v_y) = v_x \Delta t = \frac{2v_x v_y}{g}.$$

Tässä kohtaa voidaan itseasiassa havaita, että

$$R(v_x, v_y) = R(v_y, v_x) \text{ ja } K(v_x, v_y) = K(v_y, v_x),$$

mikä jo implikoi, että optimointitehtävän ratkaisussa $|v_x^*| = v_y^*$.

Lagrangen funktioksi saadaan nyt

$$\mathcal{L}(v_x, v_y, \lambda) = R(v_x, v_y) - \lambda\big(K(v_x, v_y) - E\big) = \frac{2v_x v_y}{g} - \lambda \left(\frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} - E \right)$$

ja tästä edelleen gradientti

$$\nabla\mathcal{L}(v_x, v_y, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_x} & = \dfrac{2v_y}{g} - \lambda m v_x \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_y} & = \dfrac{2v_x}{g} - \lambda m v_y \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} & = E - \dfrac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2}. \end{cases}$$

Oletuksesta $v_x > 0$ seuraa, että gradientin ainoaksi nollakohdaksi saadaan

$$v_x = v_y = \sqrt{\frac{E}{m}} \text{ ja } \lambda = \frac{2}{mg}.$$

Koska gradientin $\nabla K(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ nollakohta $\mathbf{v} = (0,0)$ ei toteuta ehtoja $v_x, v_y > 0$, saavutetaan kantaman maksimi alkunopeudella

$$\mathbf{v}^* = (v_x^*, v_y^*) = (\sqrt{E/m}, \sqrt{E/m}),$$

jolloin

$$R(\mathbf{v}^*) = \frac{2v_x^* v_y^*}{g} = \frac{2E}{mg}.$$

(ii) Selvästi

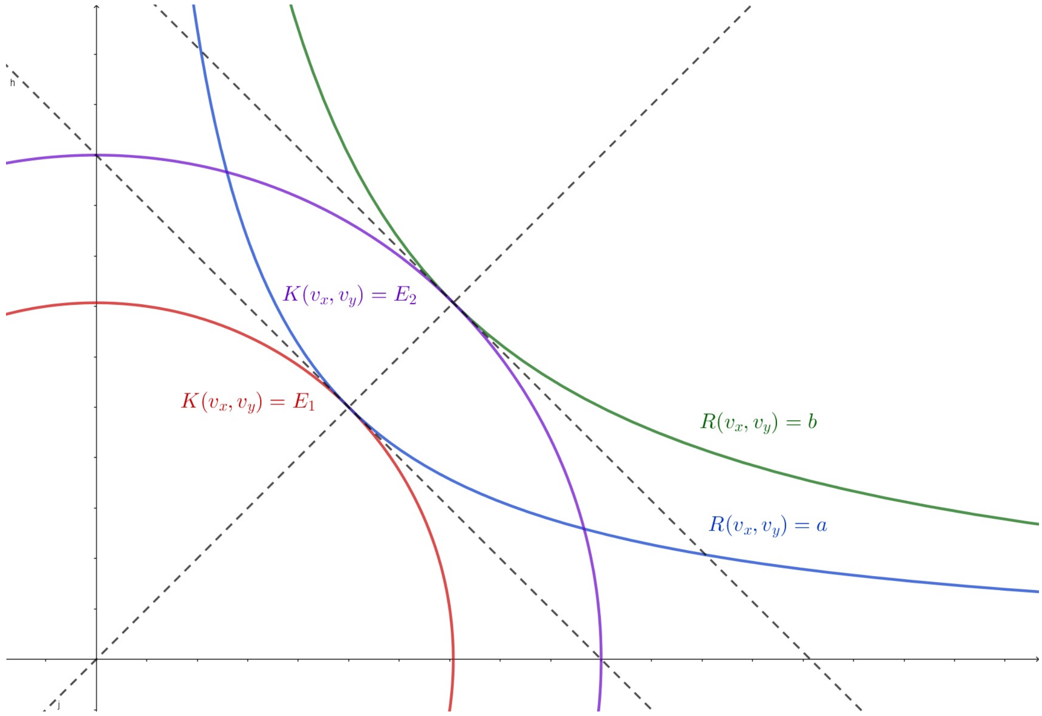
$$\frac{dR(\mathbf{v}^*)}{dE} = \frac{d}{dE}\left(\frac{2E}{mg}\right) = \frac{2}{mg} = \lambda.$$

Tässä tapauksessa Lagrangen kerroin λ kuvaa kantaman maksimin muutosnopeutta liike-energian suhteen. Kyseessä on niin kutsuttu *herkkyystulkinta*, jonka voidaan osoittaa pätevän myös yleisemmässä tapauksessa. Yksikkötarkastelulla voidaan vielä havaita, että

$$[\lambda^{-1}] = [mg] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}.$$

Näin täytyy tietysti olla, jotta Lagrangen funktion termeille pätee

$$[\lambda(K - E)] = [\lambda][K - E] = 1/\text{N} \cdot \text{Nm} = \text{m} = [R].$$


$K(v_x, v_y) = E_2$
$K(v_x, v_y) = E_1$
$R(v_x, v_y) = b$
$R(v_x, v_y) = a$
h
j