

Harjoitus 6: Symbolinen laskenta II (Mathematica)

SCI-C0200 Fysiikan ja matematiikan menetelmien studio 2023



Harjoituksen aiheita

- Differentiaaliyhtälöiden ja differentiaaliyhtälösystemien analysointi Mathematicalla
- Visualisointi liukusäätimiä käyttäen

Osaamistavoitteet

- Osaat integroida symbolisesti Mathematicalla
- Osaat ratkaista differentiaaliyhtälöitä symbolisesti Mathematicaa käyttäen
- Osaat perustella Mathematican hyötyjä suhteessa Matlabiin

Derivointi ja integrointi

- Symbolista derivointia varten ovat komennot **D** (osittaisderivaatta) ja **Dt** (kokonaisderivaatta).

```
In[1]:= D[Exp[x^2], x]
```

```
Out[1]= 2 e^(x^2) x
```

- Integrointia varten ovat komennot **Integrate** (symbolinen integrointi) ja **NIntegrate** (numeerinen integrointi).

```
In[3]:=Integrate[2 Exp[x^2] x, x]
```

```
Integrate[2 Exp[x^2] x, {x, 0, 1}]
```

```
Out[3]=e^(x^2)
```

```
Out[4]=-1 + e
```

```
In[5]:=Integrate[x*y*Max[x,y], {x,0,1}, {y,0,1}]
```

```
Out[5]=1/5
```

Huom! Kaikkia lausekkeitä ei voida integroida symbolisesti.

Differentiaaliyhtälöt

- Differentiaaliyhtälöt ratkaistaan `DSolve` -komennolla
- Muuttujat merkataan argumenttinsa kanssa, esim. `z[t]`
- Derivaatat merkitään pilkkua (`'`) käyttäen, esim. `z'[t]`
- Yhtäsuuruus merkitään vertailuoperaattorilla `==`.
 - **Huom!** Reunaehto asettaessa älä tee kirjoitusvirhettä `z[0]=0`; edes `Clear` ei välttämättä pelasta (vrt. aikaisemmin), ainoa pelastus lienee `Quit`.

`DSolve` ottaa argumentteinaan:

1. Differentiaaliyhtälö ja reunaehdot aaltosulkeiden sisällä, esim. `{z'[t]==2*z[t]}` tai `{z'[t]==2*z[t],z[2]==4}`
2. Tuntematon funktio, esim. `z[t]`, 3. Funktion argumentti, esim. `t`

Differentiaaliyhtälön ratkaisu - esimerkki 1/2

$$\frac{dz(t)}{dt} = 2 \cdot c \cdot t, \quad z(0) = 0, \quad z(2) = 16$$

- Ratkaistaan $z(t)$ ilman reunaehtoja

```
In[194] := DSolve[{z'[t]==2*c*t},z[t],t]
```

```
Out[194]= {{z[t] -> c t^2 + C[1]}}
```

- **DSolve**-komentoon voi diff. yhtälön perään laittaa yhtä monta reunaehto kuin diff. yhtälön asteluku. Tällöin vastauksessa ei ole integroimisvakioita.

```
In[195] := DSolve[{z'[t]==2*c*t,z[0]==0},z[t],t]
```

```
= yhtalo = %[[1,1,2]]
```

```
Out[195]= {{z[t] -> c t^2}}
```

```
Out[196]= c t^2
```

Vastaus tallennettiin jatkokäsittelyä varten.

Differentiaaliyhtälön ratkaisu - esimerkki 2/2

- Tuntematon parametri c voidaan ratkaistaan toisen reunaehdon avulla käyttäen `Solve`-komentoa:

```
In[202]:= Solve[{yhtalo == 16 /. {t -> 2}}, {c}]  
          = yhtalo /. %
```

```
Out[202]= {{c -> 4 }}
```

```
Out[203]= {4 t^2}
```

- Toisen asteen differentiaaliyhtälössä voi olla kaksi reunaehto.

```
In[203]:= DSolve[{z''[t] == t, z[0] == 0, z[2] == 4}, z[t], t]
```

```
Out[203]= {{z[t] -> 1/6 (8 t + t^3)}}
```

Desimaaliluvut differentiaaliyhtälöissä

- Jos lausekkeissa esiintyy desimaalilukuja, Mathematica antaa vastauksen numeerisessa muodossa (esim. $2.71828\dots$ eikä E).
 - Tällaisten tulosten jatkokäsittely saattaa olla Mathematicalle vaikeaa, jopa mahdotonta.

- Älä siis mielellään tee näin:

```
In[207] := DSolve[{x'[t]==x[t],x[0]==0.14},x[t],t]
```

```
Out[207]= {{x[t] -> 0.1400000000000000 2.71828182845905^t }}
```

- Tee näin:

```
In[208] := DSolve[{x'[t]==x[t],x[0]==x0},x[t],t] /. {x0->0.14}
```

```
Out[208]= {{x[t] -> 0.14 E^t }}
```

- Tai: In[209] := DSolve[{x'[t]==x[t],x[0]==14/100},x[t],t]

```
Out[209]= {{x[t] -> (7 E^t)/50}}
```

Differentiaaliyhtälösystemin numeerinen ratkaiseminen ja vaihetason kuvaajan piirtäminen

- Differentiaaliyhtälösystemejä voidaan ratkaista numeerisesti komennolla `NDSolve`.
- Vaihetason kuvaajan piirtäminen onnistuu komennolla `ParametricPlot`.
- Komentojen syntaksit löytyvät komennoilla:

?ParametricPlot

?NDSolve

- Kokeile:

```
In[1]:= s = NDSolve[{x'[t] == -y[t] - x[t]^2, y'[t] == 2 x[t] - y[t]^3,
  x[0] == 1, y[0] == 1}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 20}]
=ParametricPlot[{x[t], y[t]}/.s, {t, 0, 20}]
```


Liukusäätimien lisääminen kuvaajiin

Mathematica on kätevä pienten interaktiivisten visualisointien tekemiseen. `Manipulate` funktiolla voit tehdä liukusäätimellä päivitettäviä kuvaajia.

Kokeile `In[1]:= Manipulate[Plot[{Sin[a*x], Cos[b*x]}, {x, -5, 5}],
{a, 1, 2}, {b, 1, 2}]`

Tehtävä A: Solow kasvumalli

Solow mallissa kansantalouden kokonaistuotantoa Y voidaan kuvata yhtälöllä

$$Y(k) = A\sqrt{k}, \quad (1)$$

jossa k kuvaa kerääntynyttä pääomaa ja A on mallin vakiotermi.

Vuosittain tuotannosta $s\%$ investoidaan pääoman kartuttamiseen ja pääomasta $p\%$ kuluu pois. Investointeja ja poistoja kuvaavat yhtälöt

$$I(s, k) = s \cdot Y(k) \quad (2)$$

$$D(k) = p \cdot k \quad (3)$$

1. Olkoon $A = 1.2$ ja $p = 0.03$. Luo kuvaaja, jossa näkyy tuotanto, investoinnit sekä poistot, kun $k \in [0, 1000]$, ja s :n arvoa voi muuttaa liukusäätimellä välillä $[0.1, 1]$. Nimeä akselit ja anna käyrille selitteet.



🔗 Mitä vakiotermi A voisi kuvata?

2. Ratkaise s :n funktiona tasapainotila $k = k^*$, jossa $I(s, k) = D(k)$. Tallenna saamasi k^* :n lauseke funktioon `ksol`.

Lisää kuvaajaasi liukusäätimen mukana siirtyvä pystyviiva merkkamaan tasapainotilan kohtaa. (Esim. pystyviivan saa kohtaan $k = s^2$ lisäämällä plottiin `GridLines -> {{s^2}, {}}`.)

3. Käyttövarallisuus saadaan tuotannon ja poistojen erotuksena. Millä s :n arvolla kansantalouden tasapainotilan käyttövarallisuus maksimoituu? Ratkaise siis millä s :n arvolla löytyy tasapainotilan käyttövarallisuuden derivaatan nollakohta.

$$\frac{d}{ds} [Y(k^*(s)) - pk^*(s)] = 0 \quad (4)$$

 Aseta s käyttövarallisuuden maksimoivalle tasolle. Lisää kuvaaja palautukseen.  Tulkitse tilanne sanallisesti.

Tehtävä B: Munuaisen kaliumpitoisuus

Munuaisen kaliumpitoisuus hetkellä t on $k(t)$. Alkuhetkellä se on $k(0) = 0.0025$ mg/cm³. Munuainen asetetaan suureen astiaan, jonka kaliumpitoisuus on 0.0040 mg/cm³. Tunnin kuluttua munuaisen kaliumpitoisuus on kohonnut arvoon $k(1) = 0.0027$ mg/cm³. Tutki kaliumpitoisuuden muuttumista ajan funktiona.

- ✎ Mikä differentiaaliyhtälö kuvaa munuaisen kaliumpitoisuuden muuttumista? Vinkki: munuaisen kaliumpitoisuuden muutos, $\frac{d}{dt}k(t)$, on suoraan verrannollinen astian kaliumpitoisuuden ja munuaisen kaliumpitoisuuden erotukseen.
- ✎ Milloin munuaisen kaliumpitoisuus saavuttaa arvon 0.0035 mg/cm³? Vinkki: Ratkaistessasi tehtävää anna `Solve` -komennolle viimeiseksi argumentiksi `Reals`. Tämä kertoo Mathematicalle, että haluat vain reaalisia ratkaisuja.
- ✎ Kuinka suureksi munuaisen kaliumpitoisuus lopulta kohoaa? Laske raja-arvo käyttäen `Limit`-komentoa.

Tehtävä C: Peto-saalis-malli

Peto-saalis-mallissa kuvataan kahden lajin populaatioiden koon vaihtelua seuraavalla differentiaaliyhtälösystemillä:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) &= -py(t) + qx(t)y(t)\end{aligned}$$

jossa muuttujat $x(t)$ ja $y(t)$ kuvaavat saalis- ja petokantojen kokoja kullakin ajanhetkellä t , ja a, b, p ja q ovat parametreja. Alussa saaliita on 5 ja petoja 2.

Parametrien arvot ovat $a = 2$; $b = 0.2$; $p = 3$; $q = 0.1$.

1. Ratkaise differentiaaliyhtälösystemi numeerisesti käyttäen komentoa `NDSolve`. Piirrä ratkaisu vaihetasoon komennolla `ParametricPlot`. Kirjoita kaikki komennot yhden solun sisään, jotta parametrejä voi myöhemmin helposti muokata.



Liitä vastauksiisi kuva, joka kuvaa petojen saalisten määrän kehitystä vaihetasossa. Anna kuvalle otsikko.

2. Laske systeemille tasapainopiste, jossa $ax(t) - bx(t)y(t) = 0$ ja $-py(t) + qx(t)y(t) = 0$.

✎ Mikä on systeemin tasapainopiste? Anna sille tulkinta.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälösystemi käyttäen alkutilanteena tasapainopisteettä ja piirrä kuvaaja. Kokeile sitten hieman tasapainotilanteesta poikkeavia alkuarvoja.

✎ Mitä näet kuvaajassa, kun käytät lähtötilanteena tasapainopistettä? Entä, kun muutat alkuarvoja tästä hieman?

Kotitehtävä: Newsvendor-malli

- Tässä harjoituksessa ratkaisemme klassisen Newsvendor-tilausmallin optimitilausmäärän analyttisesti.
- Vesan yritys tilaa myyntiin vekottimia. Tilausmäärä on q . Tehtaan toimitusmäärä on epävarma. Se toimittaa osuuden Z (satunnaismuuttuja) tilausmäärästä. Vesa myy vekottimet hintaan p euroa per kappale. Tehtaalle Vesa maksaa c per toimitettu kappalemäärä. Vekottimien kysyntää ei tiedetä tarkalleen vaan se on satunnaismuuttuja D .
- Yrityksen saama tuotto $\pi(q)$ on siis satunnaismuuttuja:

$$\pi(q) = \underbrace{p \min(D, Zq)}_{\text{myyntitulot}} - \underbrace{cZq}_{\text{kustannukset}} \quad (5)$$

- Tehtävänäsi on löytää q jolla tuoton odotusarvo maksimoituu.

Kotitehtävä: Newsvendor-malli


1. Satunnaismuuttuja $Z \sim \text{Tas}[0,1]$ ja $D \sim \text{Tas}[0,300]$. Ratkaise Mathematicalla tuoton odotusarvon analyyttinen lauseke. Odotusarvon saat integroimalla

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[\pi(q)] \\
 &= \mathbb{E}[p \min(D, qZ) - cqZ] \\
 &= \int_0^{300} \int_0^1 f_D(d) f_Z(z) (p \min(qz, d) - cqz) dz dd,
 \end{aligned} \tag{6}$$

missä f_D ja f_Z ovat D :n ja Z :n tiheysfunktiot.

 Mikä on tuoton odotusarvon analyyttinen lauseke.

Vinkki: Ennen integrointia on keksittävä f_D ja f_Z . Mitä ne ovat tasajakautuneille satunnaismuuttujille?

 Liitä vastauksiisi kuva tuoton odotusarvosta tilausmäärän q funktiona. $q \in [0, 500]$, $p = 120$ ja $c = 30$.

Kotitehtävä: Newsvendor-malli

2. Välttämätön ehto optimaaliselle tilausmäärälle q^* on

$$\frac{d\mathbb{E}[\pi(q^*)]}{dq} = 0 \quad (7)$$

Derivoi odotusarvon lauseke ja ratkaise nollakohta **Solve**-komennolla.

✎ Mikä on optimaalisen tilausmäärän lauseke?

✎ Sijoita lausekkeeseen $p = 120$ ja $c = 30$. Mikä on tällöin optimaalinen tilausmäärä?