ELEKTRISKA FÄLT

- Elektriska fält
  - Fältet från en punktladdning
  - Superpositionsprincipen för elfält
  - Fältet från en samling punktladdningar
  - Fältet från en kontinuerlig laddningsfördelning
  - Fältlinjer
  - En laddning i ett elfält

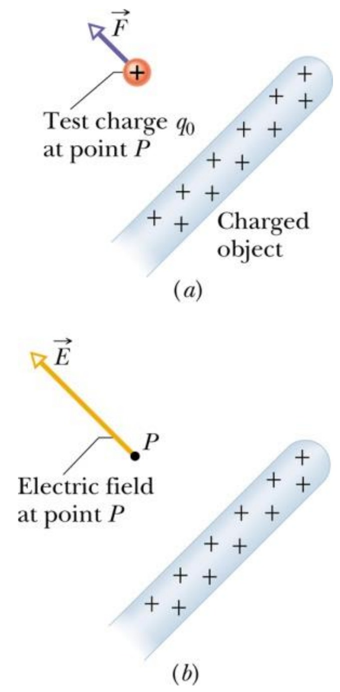
Elektriska fält och elektriska krafter

Ett fält är en storhet som associeras med läge, t.ex. temperaturen i varje punkt av ett rum $T(x,y,z)$ (skalärfält).

Elfältet i punkten P = Den elektriska kraften med vilken laddningsfördelningen påverkar testpartikeln, dividerat med testpartikelns laddning (positiv).

Elfältet = **vektorfält**
enhet = N/C

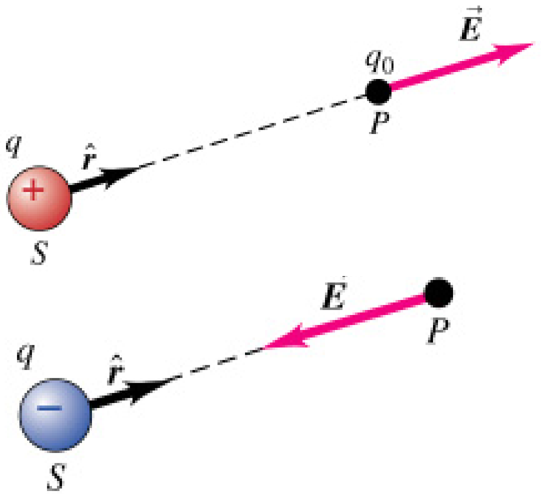
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$



Elfältet från en punktladdning

Coulomb kraften

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q_0}{r^2}\hat{r} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$



Elfältet pekar mot en negativ laddning
och från en positiv laddning

Superpositionprincipen gäller både
för diskreta

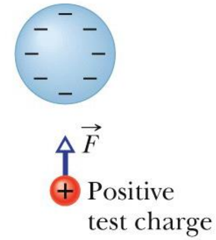
$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i}$$

och för kontinuerliga laddningsfördelningar

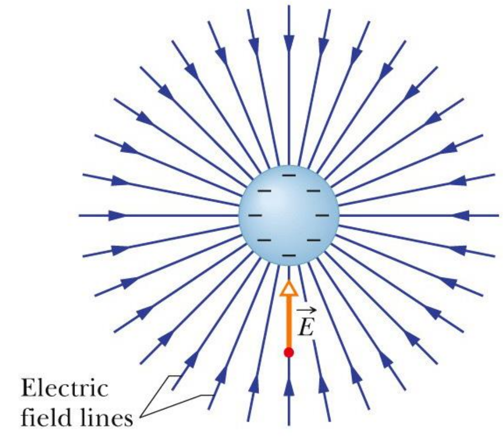
$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}}$$

Elektriska fältlinjer

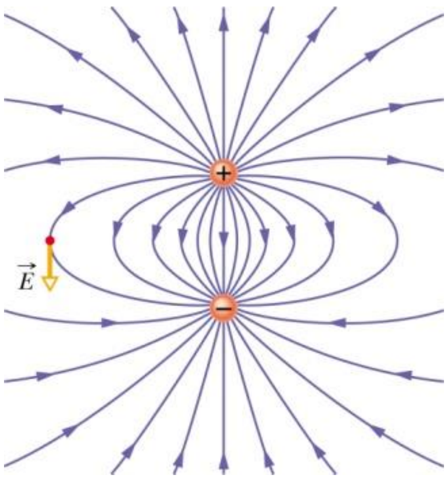
- Fältlinjer är ett sätt att visualisera elfältet
- Fältlinjens riktning ger elfältets riktning i en viss punkt
  - En positiv testladdning påverkas av en kraft i fältlinjernas riktning
- Fältlinjernas densitet är ett mått på elfältets styrka

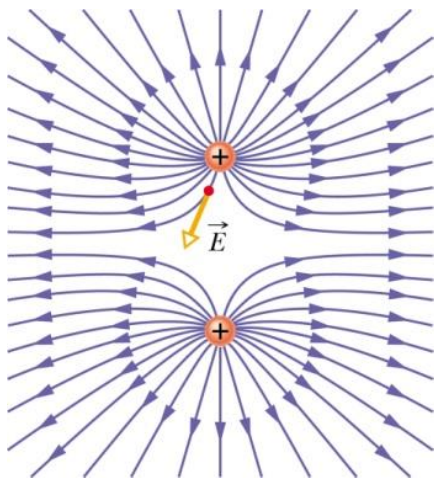


(a)



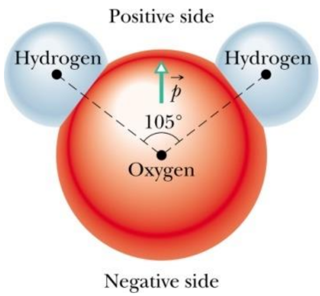
(b)





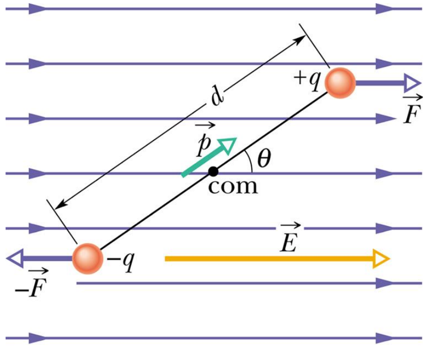
Exempel på laddningsfördelning: Elektrisk dipol

- Vanligt förekommande laddningsfördelning



t.ex. vattenmolekylen H_2O, dipolantennen

Den elektriska dipolen i ett (homogent) elfält



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \implies \tau = rF_\perp = rF\sin\theta = r_\perp F$$

$$\tau = (d\sin\theta)(qE)$$

Det elektriska dipolmomentet: $\boxed{p = qd}$

$$\tau = pE\sin\theta \implies$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

Potentialenergi för en dipol i ett elfält

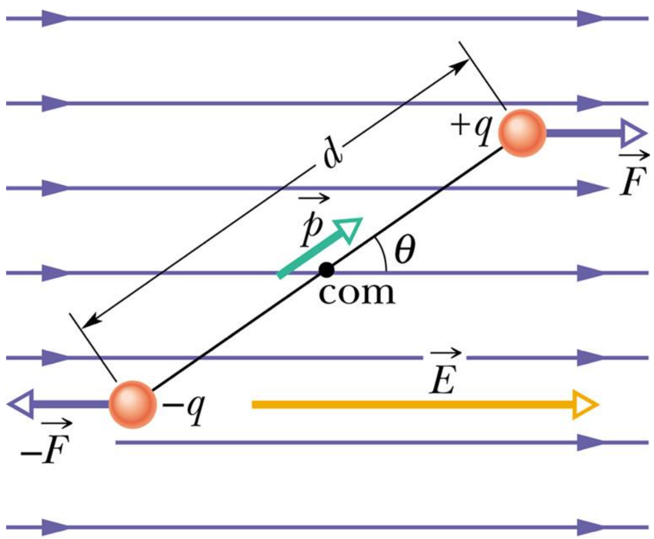
- Då en dipol roterar i ett elfält utför fältet arbetet

$$dW = \tau \, d\theta = -pE \sin\theta \, d\theta$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (-pE\sin\theta)\, d\theta = pE\cos\theta_2 - pE\cos\theta_1 \implies$$

$$U = -W = -pE\cos\theta \implies$$

$$\boxed{U = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$



GAUSS LAG

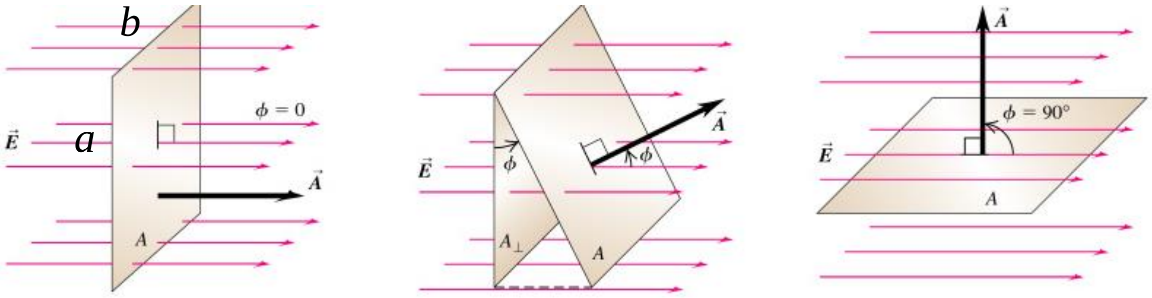
- Gauss lag
  - Flödet av ett elfält
  - Gauss-ytor
  - Elfältet från symmetriska laddningsfördelningar med hjälp av Gauss lag
  - Elektrostatiska egenskaper hos ledare

Elektriskt flöde och Gauss lag

Elfältet som produceras av ett stationärt laddat objekt kan beräknas på två ekvivalenta sätt:

- Coulombs lag
- Gauss lag

Flödet av ett likformigt elfält genom en plan yta



Ytvektorn

$$\boxed{\vec{A} = A\hat{j} = (ab)\hat{j}}$$

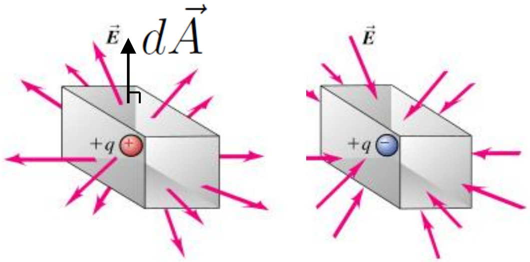
Flödet Φ_E av ett likformigt elektriskt fält E genom en plan yta

$$\boxed{\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\phi}$$

Allmän definition för Φ_E, godtycklig yta och varierande elfält (*både styrkan och riktningen kan variera*):

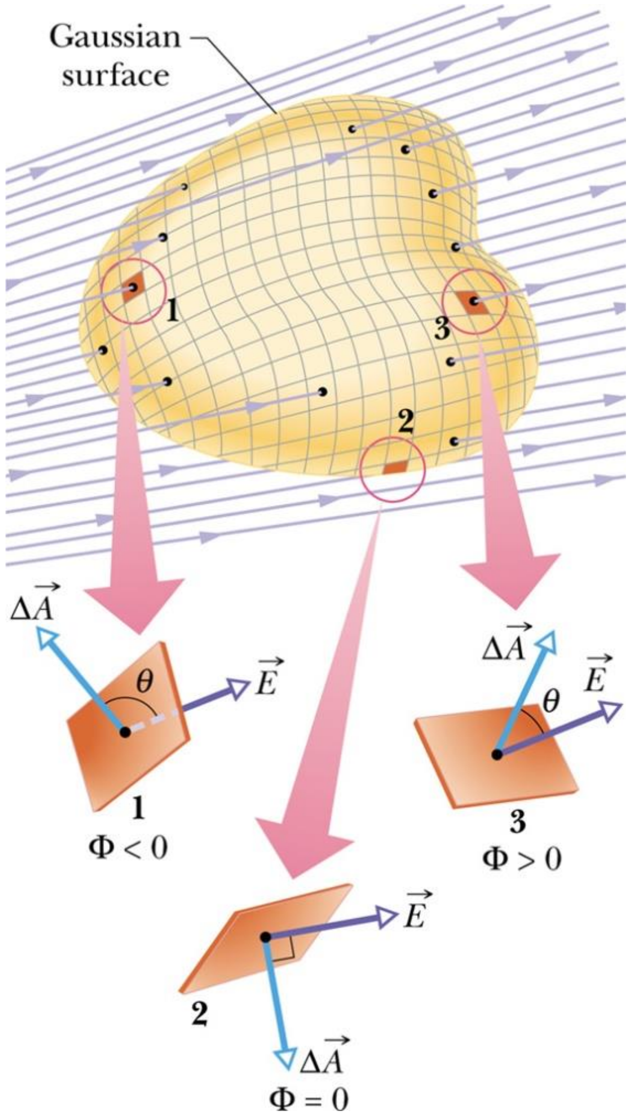
$$\boxed{\Phi_E = \int \vec{E} \cdot \, d\vec{A} = \int E \cos\theta \, dA}$$

Flödet genom en sluten yta (Gauss-yta):



$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \, d\vec{A}}$$

Ytvektorn riktad ut ur Gauss-ytan!



Gauss lag

Gauss lag:

Det elektriska flödet genom en sluten yta är lika med nettoladdningen som omsluts av ytan dividerat med ε_0.

I ekvationsform:

$$\Phi_E = \frac{\sum q}{\varepsilon_0} \quad \text{eller} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

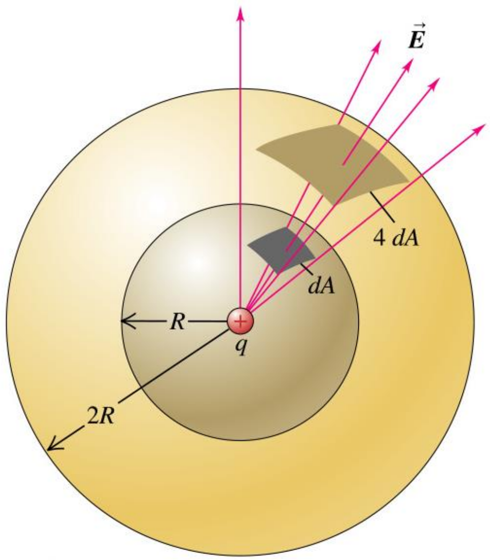
Gauss lag kan härledas från Coulombs lag, dvs. Gauss lag har också en empirisk bakgrund.

Elfältet från en punktladdning

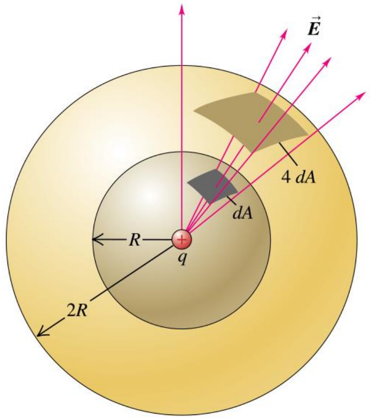
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E\, dA = E \oint dA = E(4\pi r^2)$$

=>

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{eller} \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

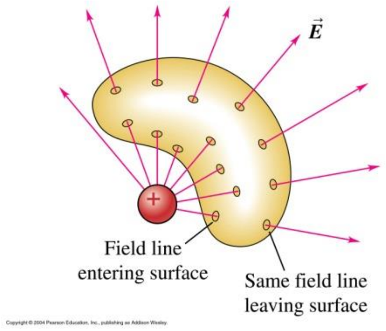


Mer om fältlinjer och Gauss lag:



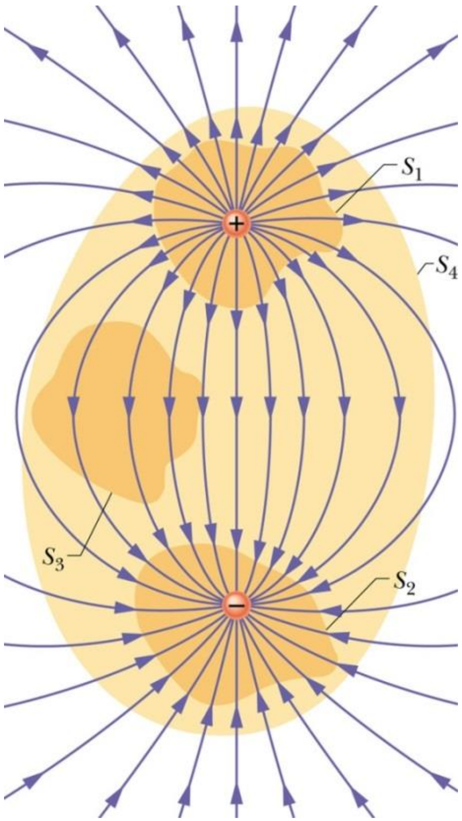
Flödet genom en yta $\propto$ antalet fältlinjer som går genom ytan

Densiteten av fältlinjer = mått på fältstyrkan



Ingen kontribution till flödet då laddningen är utanför Gauss-ytan

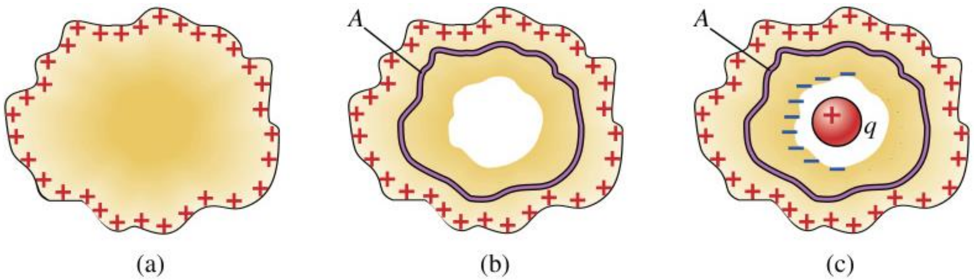
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$



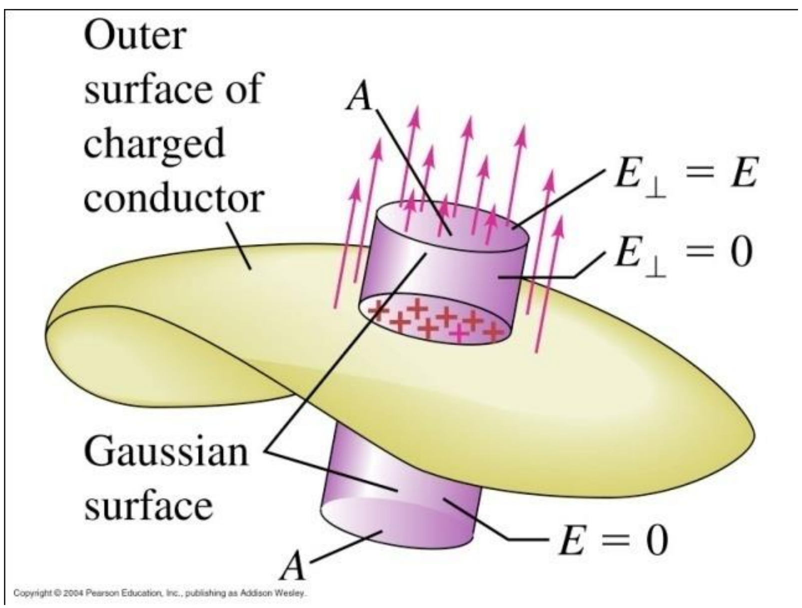
$\sum q$ = nettoladdningen!

Elektrostatiska egenskaper hos ledare

- Elfältet $\boxed{E = 0}$ inne i en elektrostatiskt laddad ledare →
- Laddningen koncentrerad på ledarens yta!



Elfältets komponenter utanför en laddad ledare



Flödet: $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Gauss lag => $E_\perp A = \dfrac{\sigma A}{\varepsilon_0}$ =>

$$E_\perp = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{och} \qquad E_t = 0$$

ELEKTRISK POTENTIAL

- Elektrisk potential
    - Arbete och elektrisk potentialenergi
    - Elektrisk potential
    - Sambandet mellan elfält och elektrisk potential
    - Elektriska potentialen kring punktladdningar och laddningsfördelningar
    - Ekvipotentialytor
    - Potentialen i och kring en laddad ledare

ELEKTRISK POTENTIAL

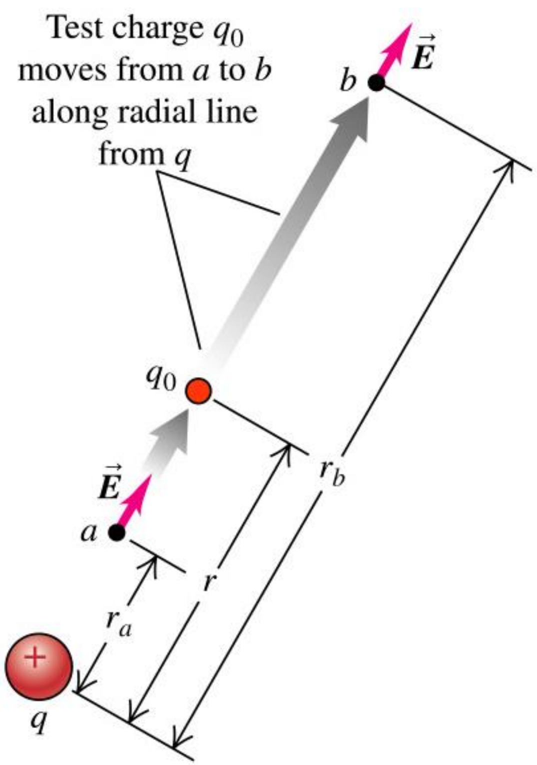
Elektrisk potentialenergi

Arbetet längs en cirkulär bana i fältet från en punktladdning

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

då $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E\, dl \cos 90^\circ = 0$

Gäller också en godtycklig bana på en sfärisk yta.



Arbetet längs en radiell bana i fältet från en punktladdning

$$\begin{aligned}
W &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \\
&= \int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \right) \cdot (dr\hat{r}) \\
&= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \Big/_{r_a}^{r_b} \left(-\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)
\end{aligned}$$

Arbetet längs en godtycklig bana i fältet från en punktladdning

$$\boxed{W = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)}$$

Elektriska kraften är konservativ, då arbetet inte beror av banan!

=> Elektrisk potentialenergi

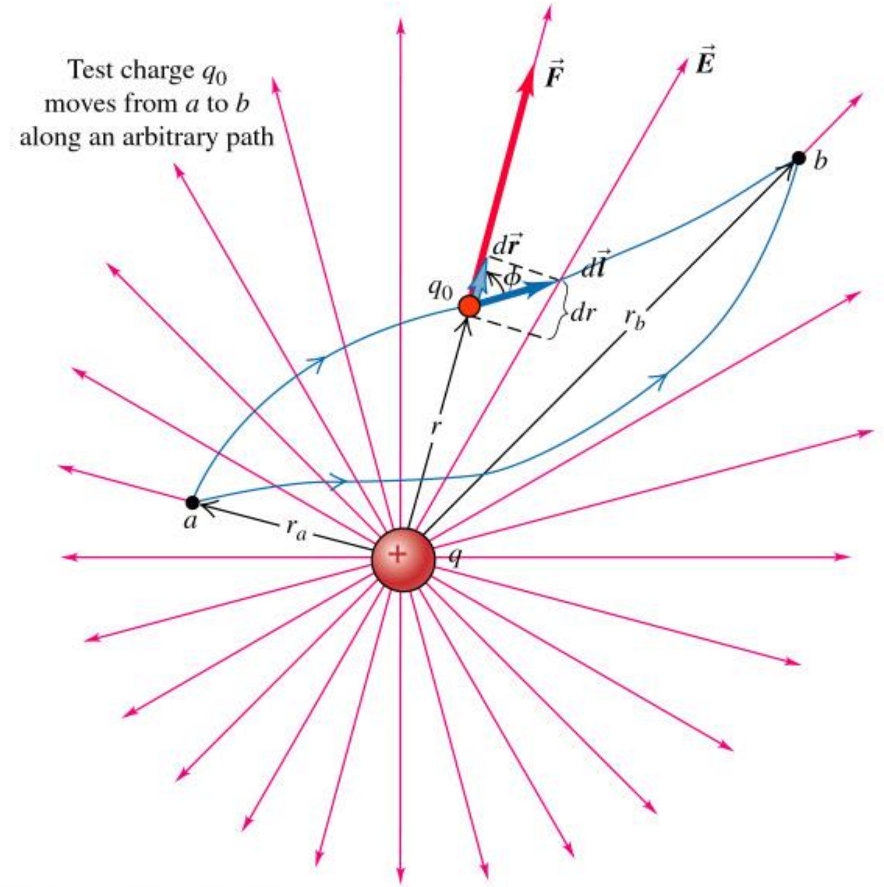
$$U_b - U_a = -W = -\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$U_b - U_a = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

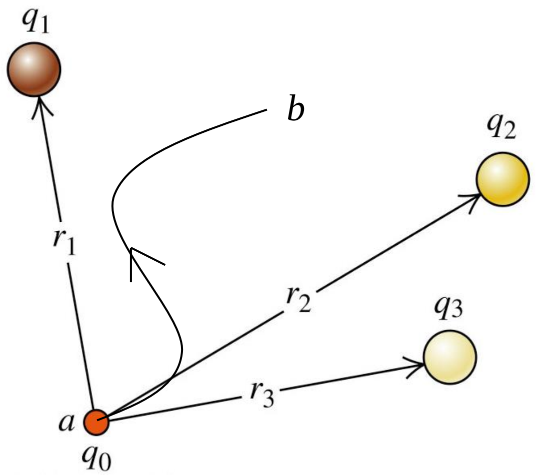
Sätter elektriska potentialen till noll oändligt långt borta från punktladdningen:

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{U(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$



Elektrisk potentialenergi i fältet från flera laddningar



$$\vec{F} = q_0\vec{E} = q_0(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3)$$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} \\ &= \int_a^b q_0(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3)\cdot d\vec{l} \\ &= q_0\left[\int_a^b \vec{E}_1\cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_3\cdot d\vec{l}\right] \end{aligned}$$

Kraften konservativ $\Longrightarrow$ $$U = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right)$$

Allmänt $$\boxed{U = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{q_i}{r_i}}$$

Elektrisk potential

Definition $\boxed{V = \dfrac{U}{q_0}}$ Enhet: J/C eller volt (V)

Potentialen från punktladdningar $\boxed{V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \dfrac{q_i}{r_i}}$

Potentialen från kontinuerliga laddningsfördelningar

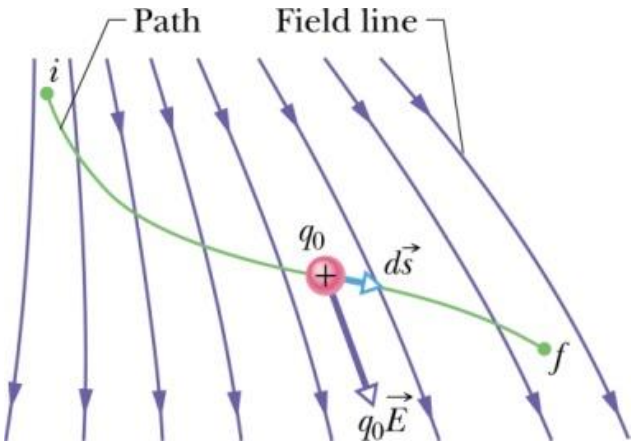
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{\substack{N \to \infty \\ q_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

Elektriska potentialen med hjälp av elfältet

$$U_f - U_i = -W = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}.$$

V minskar i elfältets riktning



Notera, från definitionen på elektrisk potential:

$[U]$=$[q][V]$ => energienheten eV

Beräkning av fältet från potentialen

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

väljer $a=(x,y,z)$ och $b=(x+\Delta x,y,z)$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}) \cdot (dx'\hat{i}) = E_x dx'$$

och

$$V(x+\Delta x, y, z) - V(x,y,z) = -\int_x^{x+\Delta x} E_x dx'$$

då Δx litet är $E_x \approx$ *konstant* inom integrationsintervallet

$$-E_x \int_x^{x+\Delta x} dx' = E_x\left[(x+\Delta x) - x\right] = -E_x \Delta x$$

dvs.

$$V(x+\Delta x, y, z) - V(x,y,z) \approx -E_x \Delta x \quad \Rightarrow$$

$$V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)\approx -E_x\Delta x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}\right]=-E_x$$

Definitionen för partialderivatan av V med avseende på x!

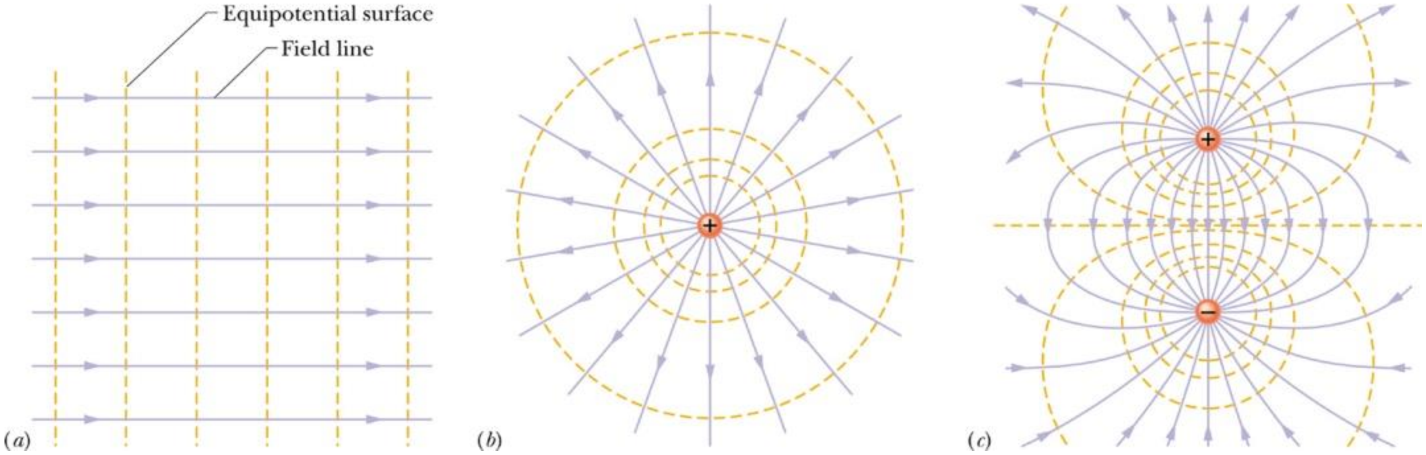
$$\Rightarrow$$

$$\boxed{E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}\qquad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\qquad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}}$$

Då elfältet är radiellt riktat reduceras detta till:

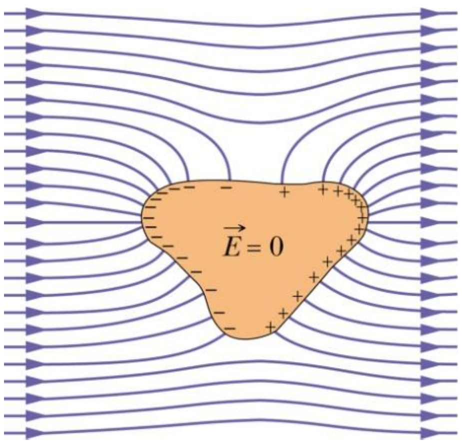
$$\boxed{E_r=-\frac{dV}{dr}}$$

Ekvipotentialytor



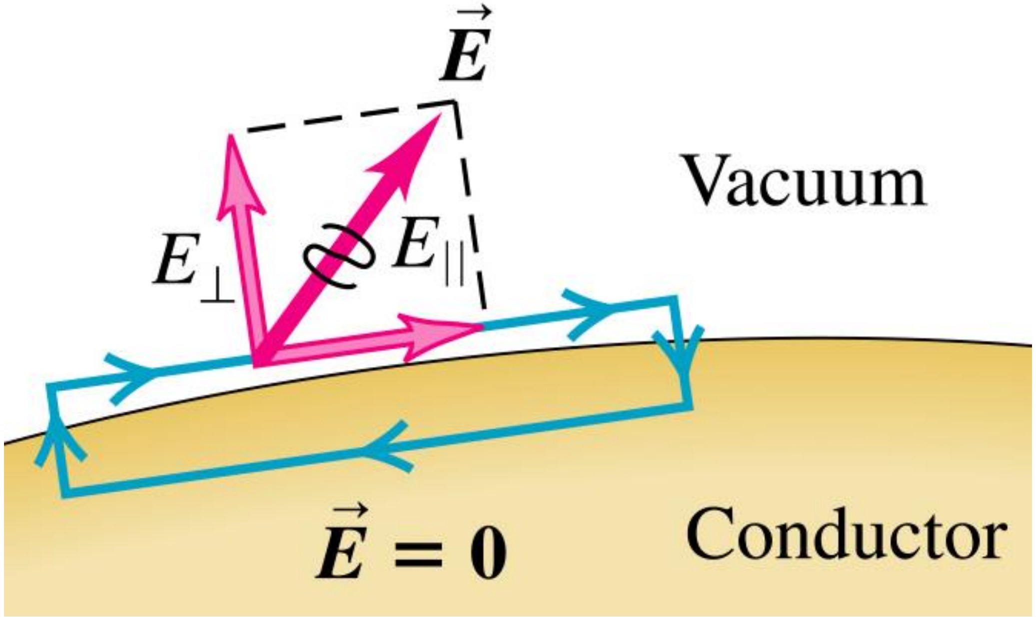
- En ekvipotentialyta är en yta på vilken potentialen är konstant.
- Inget arbete utförs av en elektrisk kraft då en laddad partikel förskjuts över en ekvipotentialyta

$\boxed{\text{Ekvipotentialyta} \perp \text{fältlinje}}$ $\Longrightarrow$



- Vid statiska förhållanden är en ledares yta en ekvipotentialyta.

Elfältet precis utanför en ledare har endast en normalkomponent!



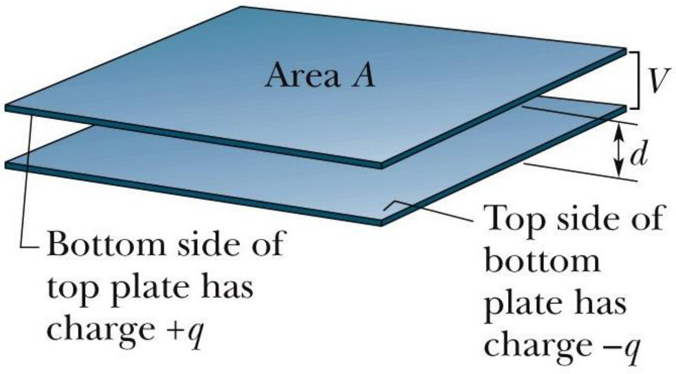
KAPACITANS

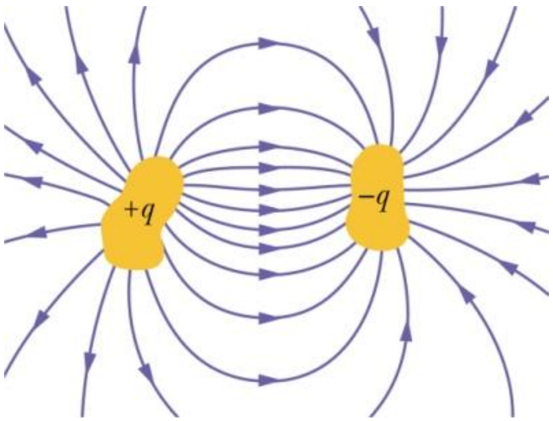
- Kapacitans
  - Kapacitansen för en skivkondensator
  - Serie och parallellkoppling av kondensatorer
  - Energin och energidensiteten i ett elektriskt fält
  - Elektrostatiska egenskaper hos isolatorer
  - Gauss lag i en isolator

KAPACITANS

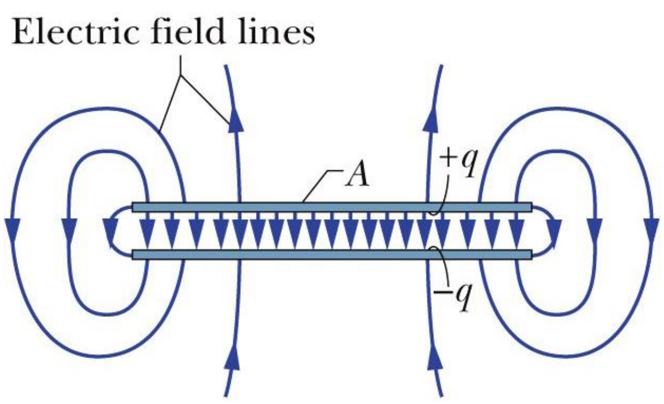
Kondensatorer och kapacitans

En kondensator är en komponent som består av två ledare som befinner sig nära varandra, men som är isolerade från varandra.





symbol i elektriska kretsar



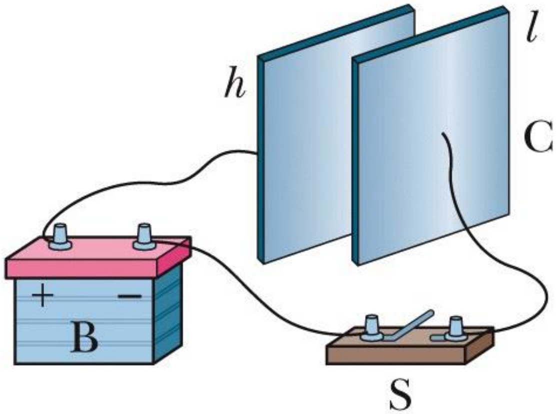
Förhållandet mellan kondensatorskivornas laddning och deras potentialskillnad kommer att vara konstant

Definitionen på kapacitans

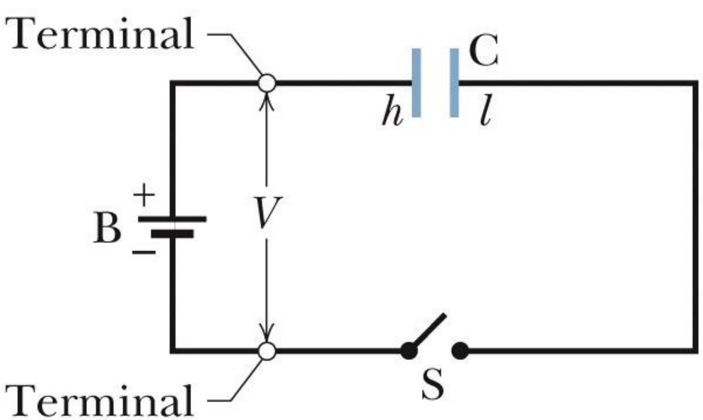
Enhet $[C] = 1$ C/V $= 1$ F (farad)

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

Uppladdning av en kondensator



(a)



(b)

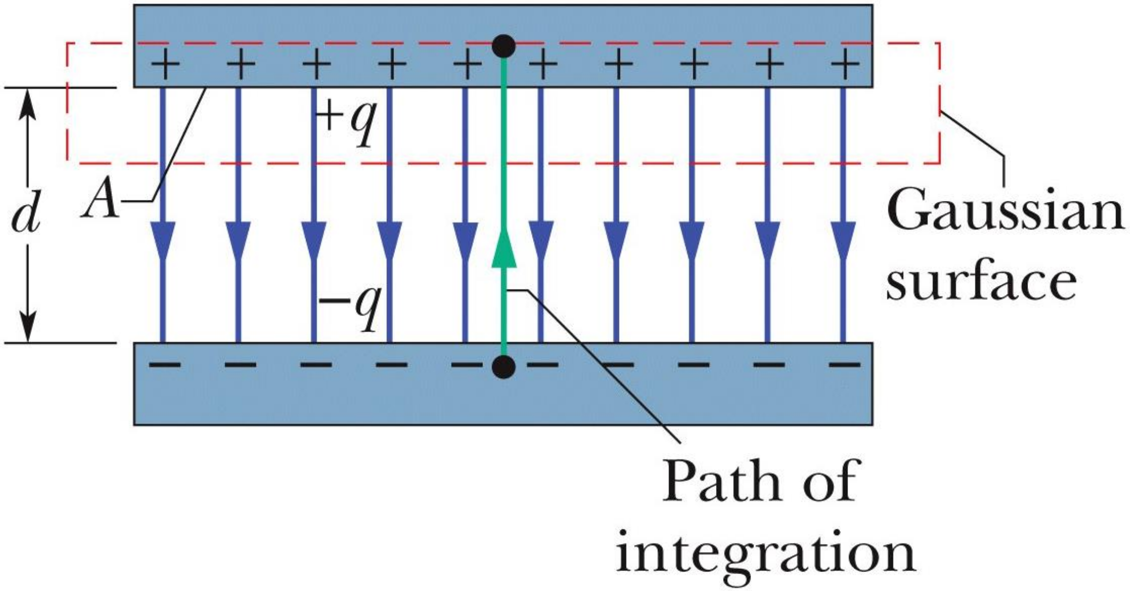
- Då brytaren S sluts börjar batteriet transportera laddning från kondensatorns ena skiva till den andra.
- Potentialskillnaden mellan skivorna ökar ända tills den är lika stor som batteriets polspänning.
- Energi lagras i den uppladdade kondensatorn.
  - Laddningsbärarnas potentialenergi ökar.

Kapacitansen för en skivkondensator

Elfältet mellan skivorna $$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

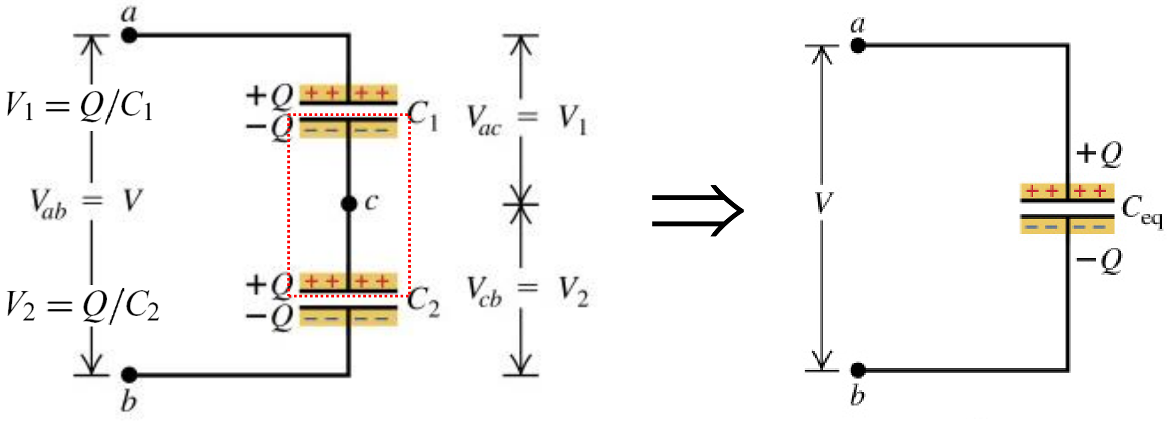
Potentialskillnaden (elfältet homogent) $$V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad \Longrightarrow \quad V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

Kapacitansen $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Qd/\varepsilon_0 A} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$



Seriekoppling av kondensatorer

Kondensatorer i serie   Varje kondensator har samma laddning!



Allmän princip:

Potentialskillnaden över ett antal elektriska komponenter i serie är lika med summan av potentialskillnaderna över de enskilda komponenterna.

För att **en** kondensator skall ge samma effekt

$$C_{12} = \frac{Q}{V} \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{Q}{C_{12}}$$

då $V = V_1 + V_2$ är

$$\frac{Q}{C_{12}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Longrightarrow$$

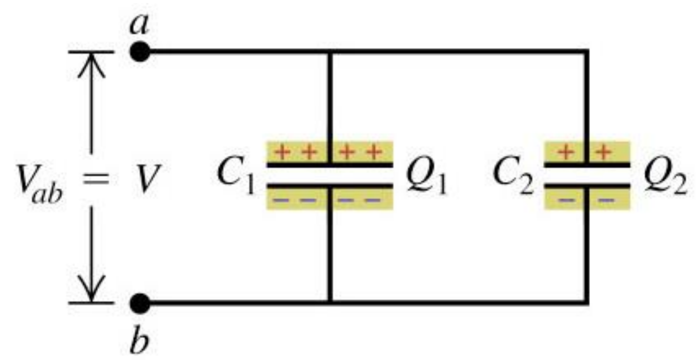
$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Allmänt: $$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}}$$ (kondensatorer i serie)

Parallellkoppling av kondensatorer

Allmän princip:

Potentialskillnaden över komponenter kopplade parallellt är den samma.



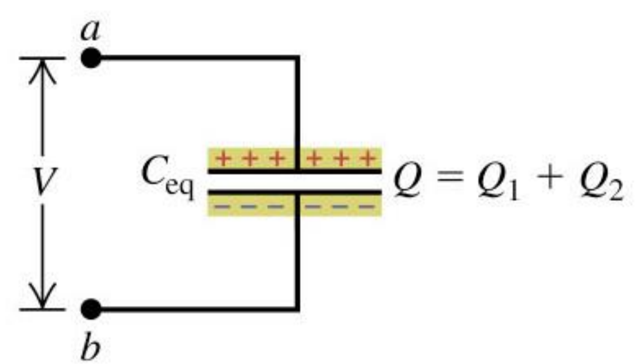
(a)

För att **en** kondensator skall ge samma effekt

$Q = Q_1 + Q_2$ och $V = V_{ab}$ $\Rightarrow$

$$C_{12} = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} \Rightarrow$$

$$C_{12} = C_1 + C_2$$

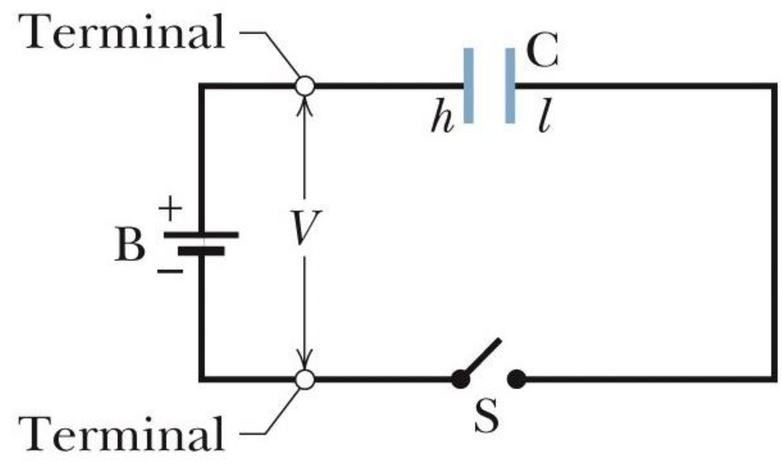


(b)

Allmänt: $\boxed{C_{eq} = \sum_i C_i}$ (kondensatorer parallellt)

Elektrisk energidensitet och den lagrade energin i en kondensator

Energin i en laddad kondensator



Ett batteri laddar upp en kondensator:

- Arbete utförs då laddningsbärare förflyttas från en av kondensatorns skivor till den andra. $\Longrightarrow$

Laddningsbärarna erhåller potentialenergi $\Longrightarrow$

Potentialenergin lagras i kondensatorn.

U = kondensatorns energi då den uppladdats till en slutlig laddning Q och slutlig potentialskillnad V.

U', Q' och V' = motsvarande storheter under uppladdningsprocessen.

Enligt definitionen för elektrisk potential: $V = \dfrac{U}{q_0}$

$$dU' = V'\, dQ'$$

Kondensatorn laddas upp $\Longrightarrow U = \int_0^Q V'\, dQ' \Longrightarrow U = \int_0^Q \frac{Q'}{C}\, dQ' = \frac{1}{C}\int_0^Q Q'\, dQ' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

$$C = \frac{Q}{V} \quad \boxed{U = \frac{Q^2}{2C} \qquad U = \frac{CV^2}{2} \qquad U = \frac{QV}{2}}$$

Energidensiteten i ett elektriskt fält

För skivkondensatorer gäller: $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Ad)$$

Volymen mellan
kondensatorskivorna

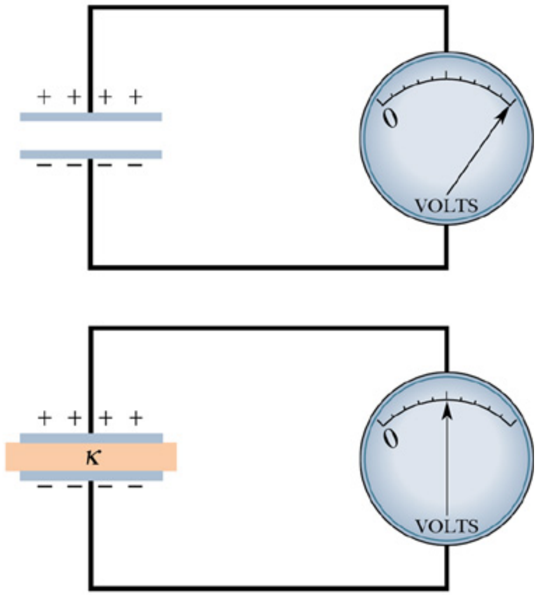
Definierar energidensiteten u i ett
elektriskt fält:

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Ad)}{Ad} \Rightarrow \boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Elektrostatiska egenskaper hos isolatorer

Experimentellt:

Potentialskillnaden mellan kondensatorskivorna minskar då ett isolerande material placeras mellan skivorna.



Q konstant

Dielektriska konstanten:

$$\boxed{\kappa = \frac{V_0}{V}} \qquad \kappa > 1$$

$$\Longrightarrow$$

$$\kappa = \frac{V_0}{V} = \frac{E_0 d}{E d} = \frac{E_0}{E} \quad \text{eller} \quad E = \frac{E_0}{\kappa}$$

E minskar

$$\kappa = \frac{V_0}{V} = \frac{Q/C_0}{Q/C} = \frac{C}{C_0} \quad \text{eller} \quad C = \kappa C_0$$

C ökar

$$\kappa = \frac{V_0}{V} = \frac{2U_0/Q}{2U/Q} = \frac{U_0}{U} \quad \text{eller} \quad U = \frac{U_0}{\kappa}$$

U minskar!
=> kraft

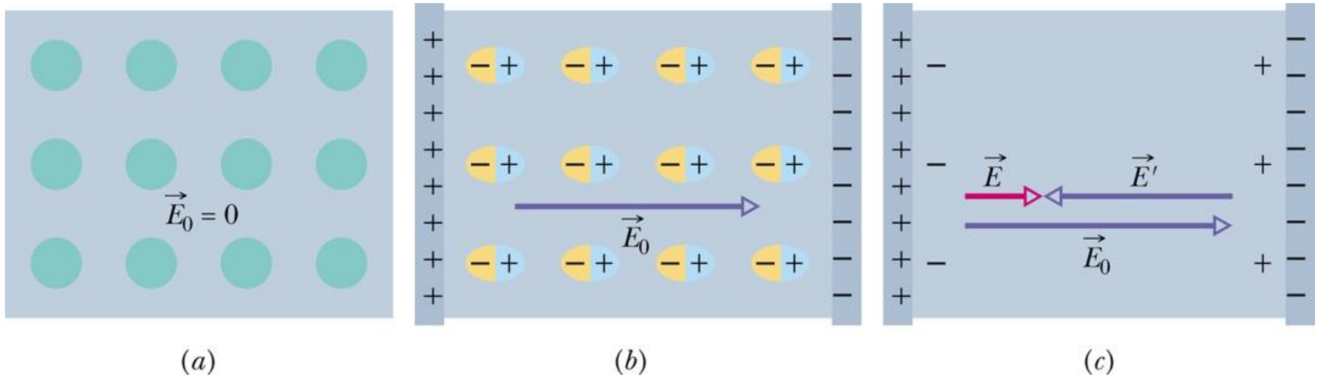
Följande bör beaktas vid val av isolator till en kondensator:

1. Eftersom C är proportionell mot κ är det önskvärt att κ är stor, så att C kan göras stor utan att behöva öka arean på kondensatorskivorna.
2. En stor elektrisk genomslagskraft E_{max} gör det möjligt för kondensatorn att operera i ett stort fält utan dielektrisk kollaps.
3. En isolator i fast form ger stöd åt kondensatorn och hindrar skivorna från att röra vid varandra.

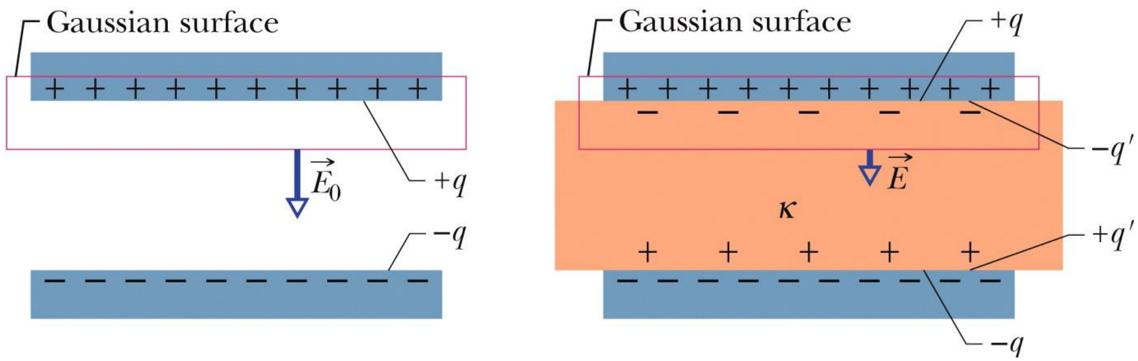
Inducerad laddning och polarisation

- Då ett dielektriskt material (dvs. en isolator) placeras i ett elektriskt fält kommer dess positiva laddningar att sträva i fältets riktning och de negativa i motsatt riktning. => materialet polariseras

- Polarisationen ger upphov till ett fält E' som är motsatt riktat mot det yttre fältet. =>



Gauss lag i dielektriska material



Gauss lag utan ett dielektrikum:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Ett isolerande material mellan skivorna: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \dfrac{q - q'}{\varepsilon_0} \implies E = \dfrac{q - q'}{\varepsilon_0 A}$

Experimentellt: $E = \dfrac{E_0}{\kappa} = \dfrac{q}{\kappa \varepsilon_0 A} \implies q - q' = \dfrac{q}{\kappa}$

Genom att definiera ett ämnes permittivitet $\boxed{\varepsilon = \kappa \varepsilon_0}$ fås

Gauss lag i ett dielektriskt material

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum q}{\varepsilon}}$$

ELEKTRISK STRÖM OCH RC KRETSAR

- Elektrisk ström
- Resistans och resistivitet
- Koppling av motstånd
- Kirchhoffs lagar
- RC kretsar

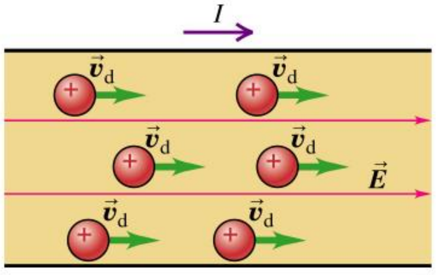
ELEKTRISK STRÖM OCH STRÖMTÄTHET

Elektrisk ström I definieras som laddningen, som passerar genom en yta A per tidsenhet.

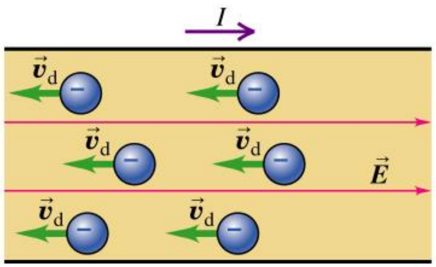
$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

Strömmen är en skalär, men har riktning

Enhet: $[I] = [Q]/[t]$ = C/s = A (Ampere)

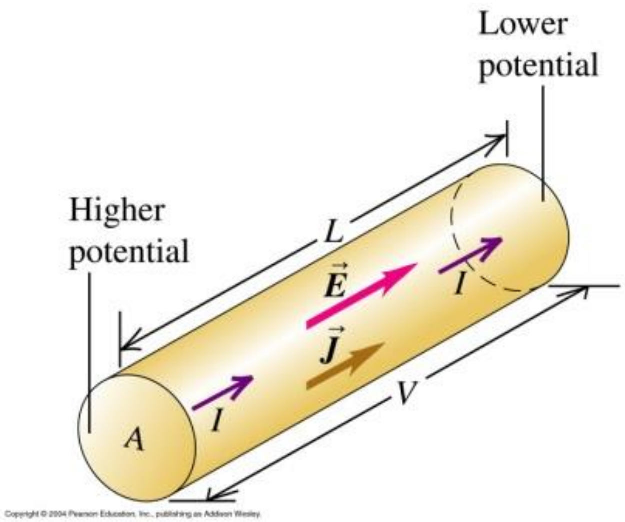


(a)



Resistans och resistivitet

Om en potentialskillnad existerar över en ledare kommer en ström att gå genom ledaren.



$$R = \rho \frac{L}{A}$$

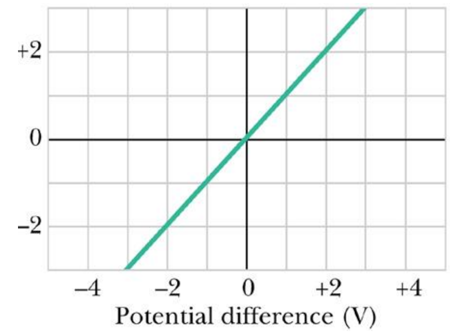
Potentialskillnaden som krävs för att producera en viss ström beror på ledarens resistans R.

Definition: $\boxed{R = \frac{V}{I}}$

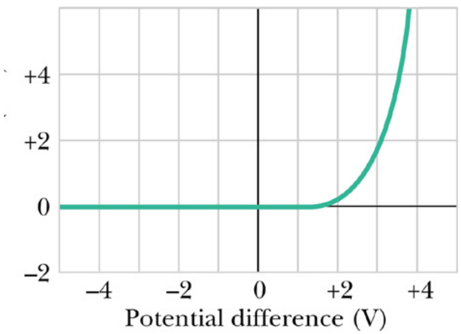
$$\boxed{V = IR}$$

Ohms lag

Enhet: $[R] = [V]/[I] = \mathrm{V/A} = \Omega$ (Ohm)



Ohmisk



icke - Ohmisk

Resistivitet ρ

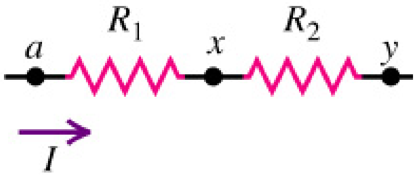
Resistansen beror av en ledares storlek, form och material. Den storhet som beaktar materialet kallas resistivitet.

Resistivitetens temperaturberoende

$$\boxed{\rho \approx \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]}$$ metaller

Motstånd i serie och parallellt

Seriekopplade motstånd



Ekvivalent resistans: En motståndskombination ersätts med ett motstånd genom vilken samma ström går med samma potentialskillnad som för motståndskombinationen.

Potentialen över kombinationen av motstånd i serie är lika med summan av potentialerna över varje enskilt motstånd.

eller

$$V = V_1 + V_2$$

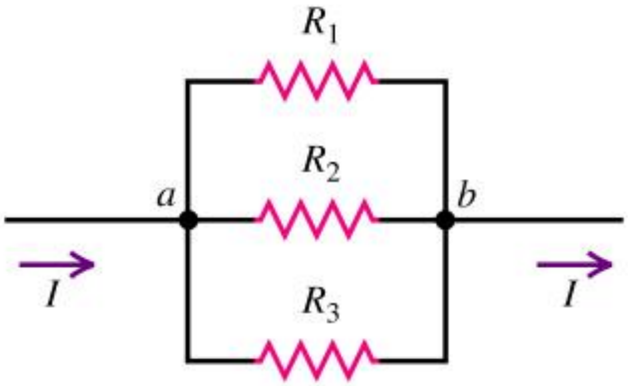
$$\Rightarrow V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \Rightarrow$$

$$R_{12} = \frac{V}{I} = R_1 + R_2$$

Allmänt

$$\boxed{R_{eq} = \sum_i R_i}$$

Parallellkopplade motstånd



Samma potentialskillnaden över de tre motstånden.

För strömmen gäller:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow$$

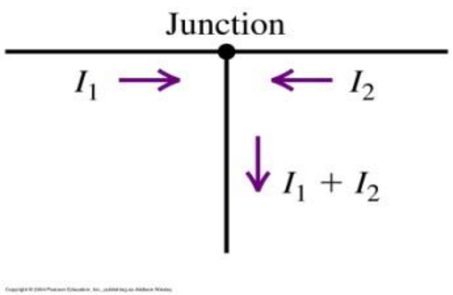
$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{I}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Allmänt $$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}}$$

Kirchhoffs lagar

Kirchhoffs första lag



Summan av de strömmar som kommer in i en förgreningspunkt är lika med summan av de strömmar som går ut ur förgreningspunkten.

eller $\sum i_{in} = \sum i_{ut}$

i betecknar en ström som kan vara positiv eller negativ.

Kirchhoff I bygger på att elektrisk laddning bevaras.

Kirchhoffs andra lag

Summan av potentialskillnaderna i en sluten strömslinga är noll, eller $\sum V = 0$

Kirchhoffs II är en följd av energins bevarande eftersom den elektriska potentialen är direkt relaterad till laddningsbärarnas potentialenergi.

Teckenkonventioner:

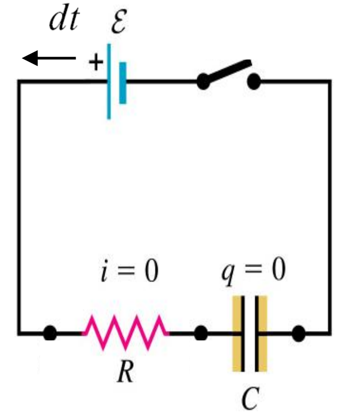
1. Om vi passerar en strömkälla i riktningen från - till + polen tas källspänningen som positiv, i motsatt riktning som negativ.
2. Om vi passerar ett motstånd i strömmens riktning tas potentialskillnaden över motståndet som $V=-iR$. Om vi passerar ett motstånd i motsatt riktning mot strömmen tas potentialskillnaden som $V=+iR$.

RC-kretsar

Uppladdning av en kondensator

Kondensatorn oladdad í början. Då brytaren sluts börjar batteriet flytta laddning från kondensatorns ena skiva till den andra.

$$i = \frac{dq}{dt}$$



Kirchhoff II motsols ger

$$(\mathcal{E}) + (-iR) + \left(-\frac{q}{C}\right) = 0$$

$$(\mathcal{E}) - R\left(\frac{dq}{dt}\right) - \frac{q}{C} = 0 \Longrightarrow \frac{-dq}{\mathcal{E}C - q} = -\frac{1}{RC}dt$$

betecknar: $\boxed{\begin{aligned} u &= \mathcal{E}C - q \\ du &= -dq \end{aligned}}$ differentialekvation av första ordningen => lösning genom integration

$$\frac{du}{u} = \frac{-1}{RC}\,dt \Longrightarrow$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-1}{RC}\,dt \Longrightarrow$$

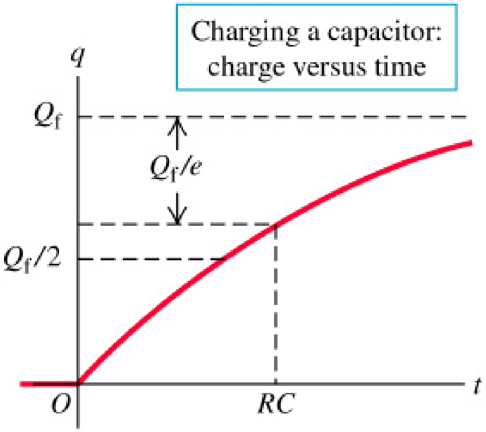
$$\ln u = -\frac{t}{RC} \Longrightarrow$$

$$\ln(\mathcal{E}C - q) = -\frac{t}{RC} + \text{konstant}$$

Integrationskonstanten: $\ln(\mathcal{E}C)$

$$\frac{\mathcal{E}C - q}{\mathcal{E}C} = \mathrm{e}^{-t/RC}$$

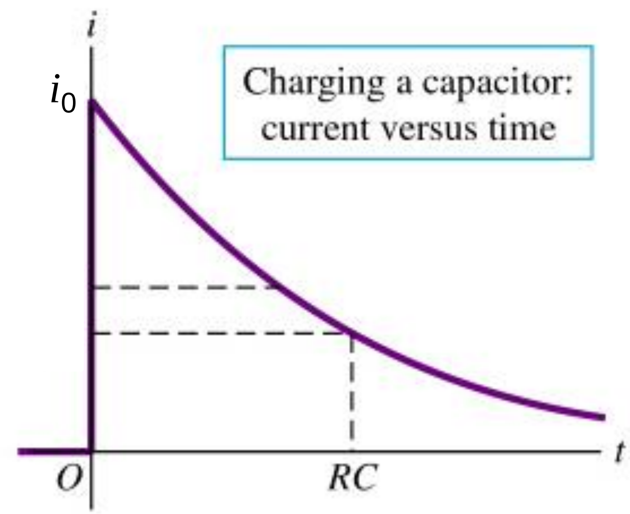
$$\boxed{q(t) = \mathcal{E}C(1 - \mathrm{e}^{-t/RC})}$$



Strömmen som tidsderivatan av q

Begynnelsevillkor: $t=0$, $q=0$ $\Rightarrow$

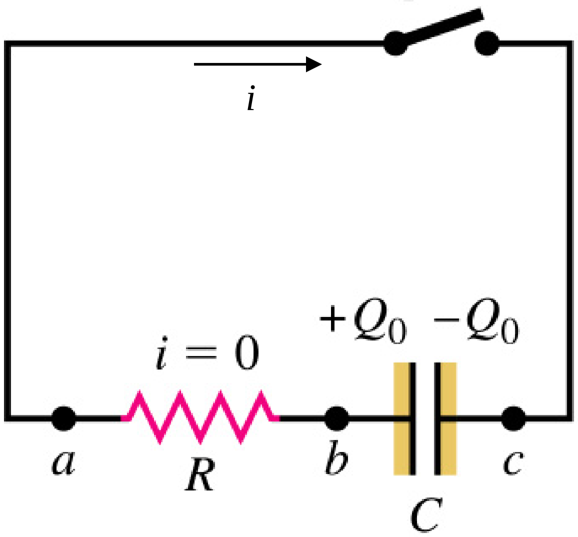
$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R}\mathrm{e}^{-t/RC} = i_0\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$



Faktorn $\tau=RC$ kallas kretsens tidskonstant och bestämmer takten med vilken uppladdningen sker.

Urladdning av en kondensator

En kondensator C kopplas i serie med ett motstånd R. Vid tidpunkten $t=0$ är kondensatorns laddning Q_0 och strömbrytaren är öppen. Då strömbrytaren sluts börjar laddning strömma genom kretsen för att utjämna laddningen på de båda kondensatorskivorna.



Strömmen blir $i = -\dfrac{dq}{dt}$ (laddningen minskar)

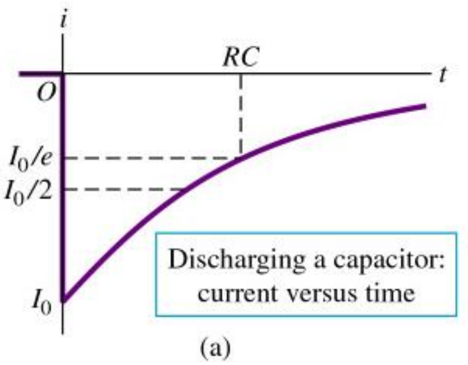
Kirchhoff II medsols

$$-iR + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow iR = \frac{q}{C}$$

$$-\frac{dq}{dt}R = \frac{q}{C} \Rightarrow$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\,dt \quad \text{integrering} \Rightarrow$$

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + \text{konstant}$$

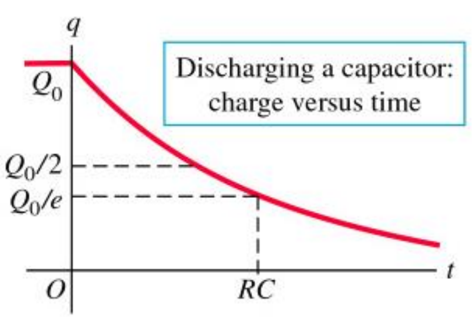


(a)

Begynnelsevillkor: $t = 0,\ q = Q_0 \Rightarrow$

$$\boxed{q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} = i_0 e^{-t/\tau}}$$



MAGNETFÄLT

- Magnetfält
    - Den magnetiska flödestätheten
    - Kraften på en laddad partikel i ett magnetfält
        - Hall-effekten
    - Kraften på en strömförande ledning
    - Kraftmomentet på en strömförande ledningsslinga
    - Magnetiska dipolmomentet
    - En strömslinga som en magnetisk dipol

Den magnetiska flödestätheten B

Magnetiska fenomen kan behandlas analogt med elfält genom att introducera det magnetiska fältet B (magnetisk flödestäthet).

Ett magnetiskt fält påverkar laddningar som befinner sig i rörelse med en kraft.

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

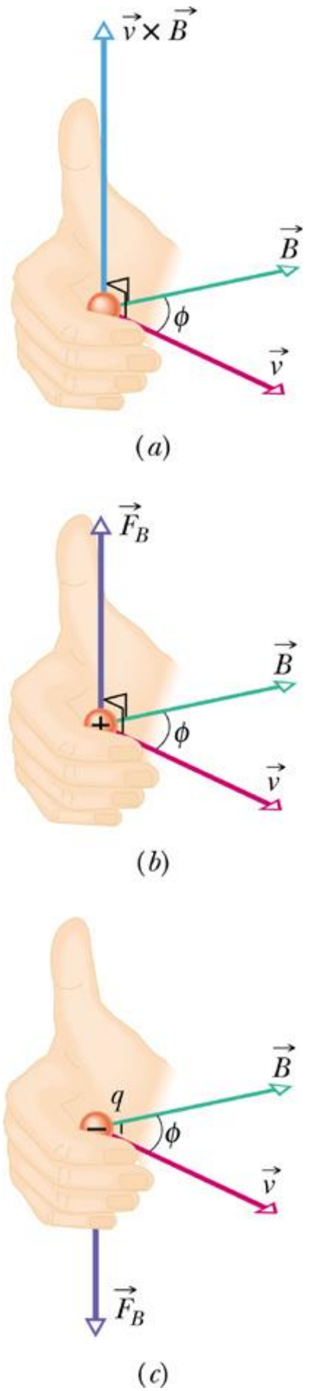
Storleken på kraften ges av $F = |qvB\sin\phi|$

Enhet: $[B] = (\mathrm{N/C})/(\mathrm{m/s}) = \mathrm{T}$ (tesla)

Om en laddad partikel rör sig i ett område med både ett elfält E och ett magnetfält B, påverkas partikeln av nettokraften:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}$$

Lorentz kraften

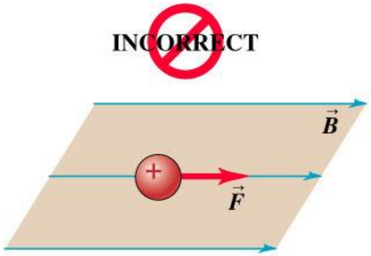


Magnetiska fältlinjer

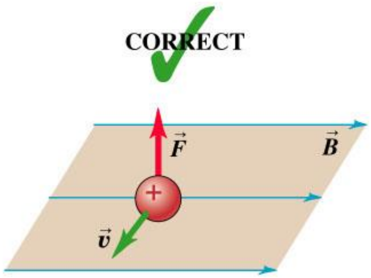
Analogt med elfältets fältlinjer kan ett magnetfält beskrivas med magnetiska fältlinjer, men ...

Magnetiska fältlinjer indikerar inte riktningen för den magnetiska kraften.

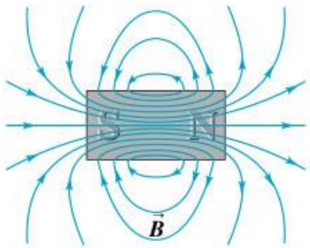
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



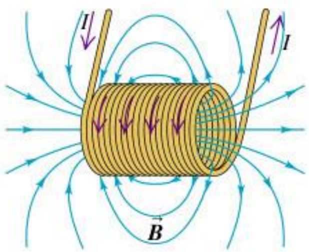
(a)



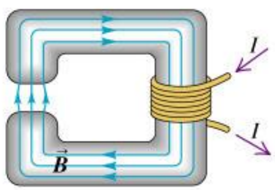
(b)



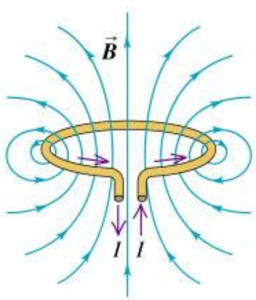
(a) Magnetic field lines through the center of a permanent magnet



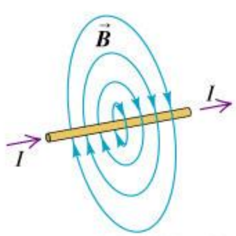
(b) Magnetic field lines through the center of a cylindrical current-carrying coil



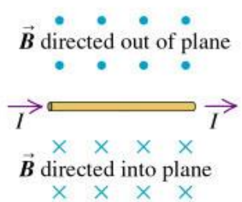
(c) Magnetic field lines through the center of an iron-core electromagnet



(d) Magnetic field lines in a plane containing the axis of a circular current-carrying loop



(e) Magnetic field lines in a plane perpendicular to a long, straight, current-carrying wire



(f) Magnetic field lines in a plane containing a long, straight, current-carrying wire

Hall-effekten

Ström leds genom en ledare i ett magnetfält.

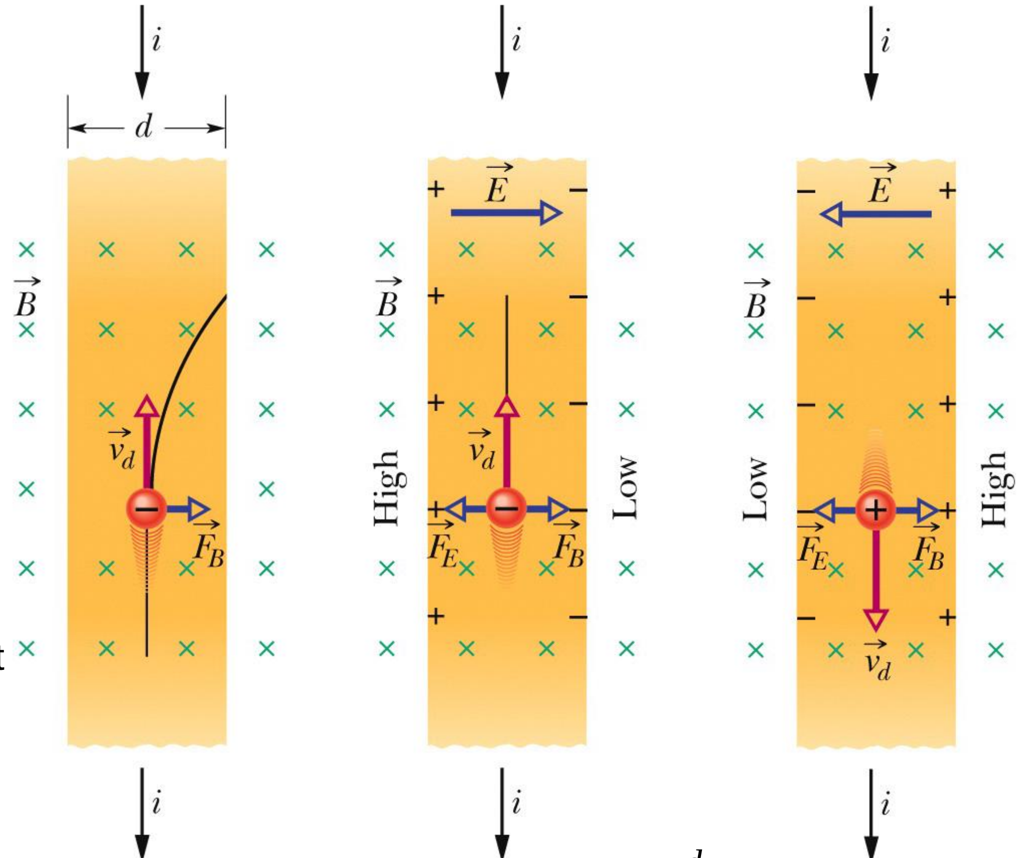
- Laddningar i rörelse påverkas av en magnetisk kraft och avlänkas.
- Ledarens ena sida blir positivt laddad och den andra negativt laddad.
- Ett elfält byggs upp som motverkar laddningsbärarnas avlänking.
- (Hall) spänningen mellan ledarens sidor blir:

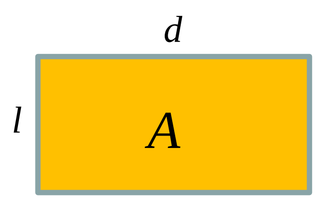
$$V = Ed$$

- Då den magnetiska och elektriska kraften tar ut varandra gäller: $eE = ev_dB$
- Drifthastigheten v_d är $$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{i}{neA}$$
- Nu kan laddningsbärarkoncentrationen bestämmas:

$$\boxed{n = \frac{Bi}{Vle}}$$

- Tecknet på Hallspänningen ger laddningsbärarnas tecken.



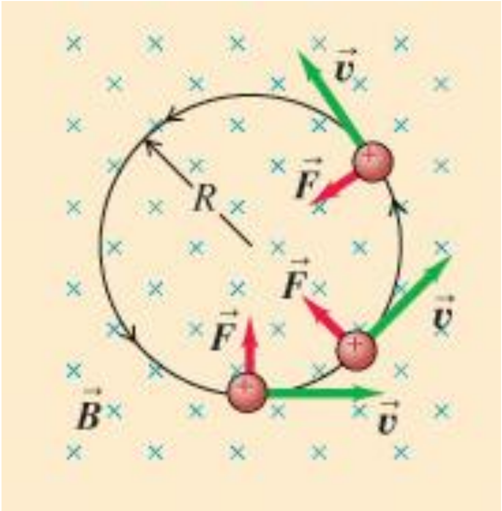


strömtäthet $J = \frac{i}{A}$

En laddad partikel i cirkelbana

Betraktar en situation där endast ett magnetfält påverkar en laddad partikel:

Kraften: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$



Newton II:

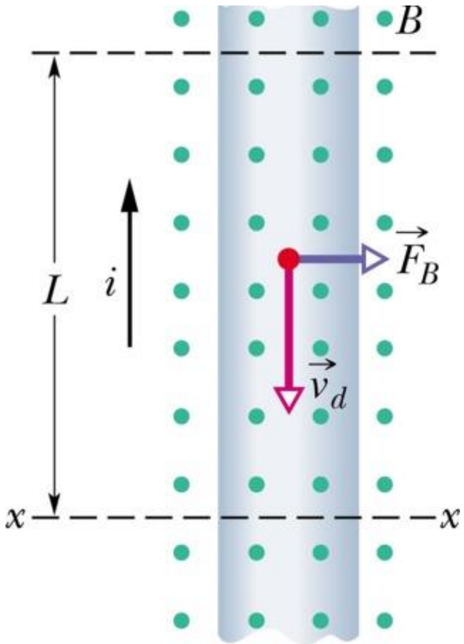
$$\frac{mv^2}{R} = |q\vec{v} \times \vec{B}| = |q|vB\sin 90^\circ = qvB \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{mv}{qB} \quad \text{Högre hastighet ger större radie}}$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q}{m}B$$ Cyclotronfrekvensen

F vinkelrätt mot förskjutningen => Magnetiska kraften gör inget arbete på partikeln!

Kraften på strömförande ledare



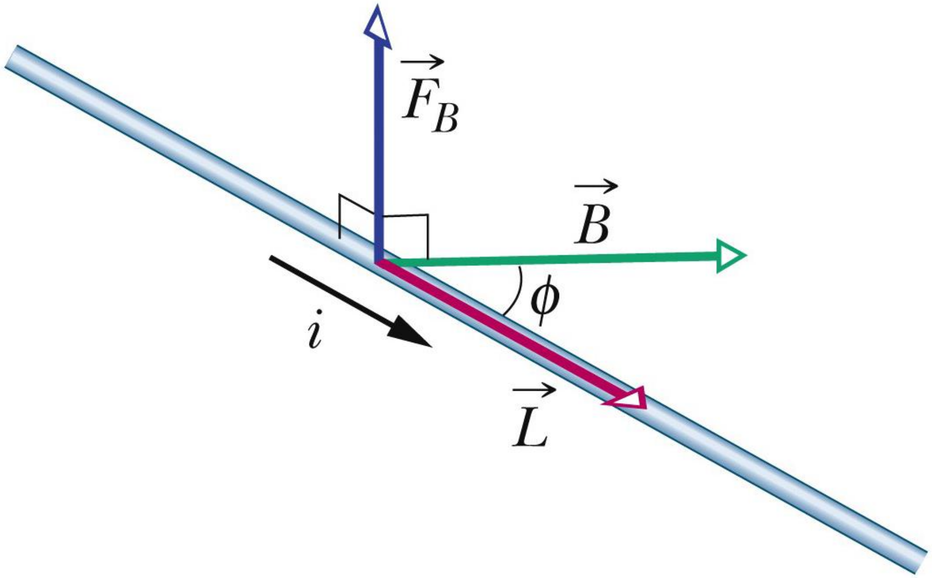
Ifall det går en ström genom en ledare påverkas laddningsbärarna av en magnetisk kraft:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \Longrightarrow$$

Totala kraften på en rak ledare:

$$\boxed{\vec{F} = Nq\vec{v}_d \times \vec{B} = nALq\vec{v}_d \times \vec{B}}$$

$$\Longrightarrow \quad i = nAv_d|q| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}}$$



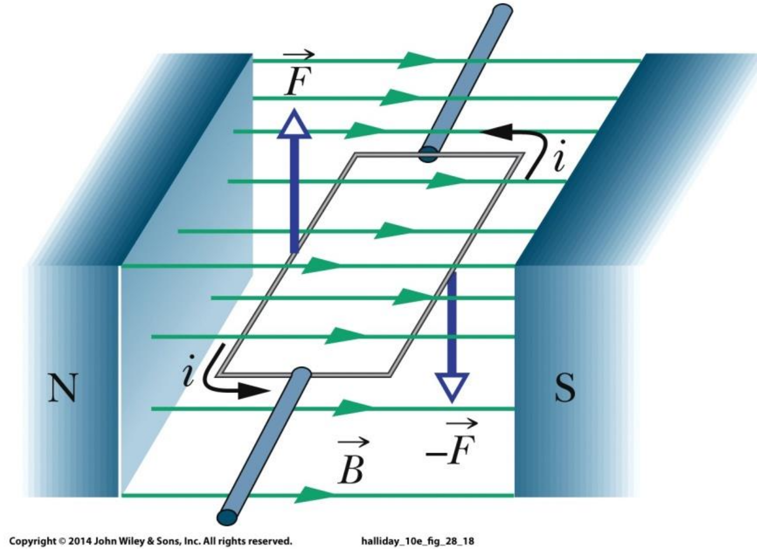
För en gotyckligt formad ledare:

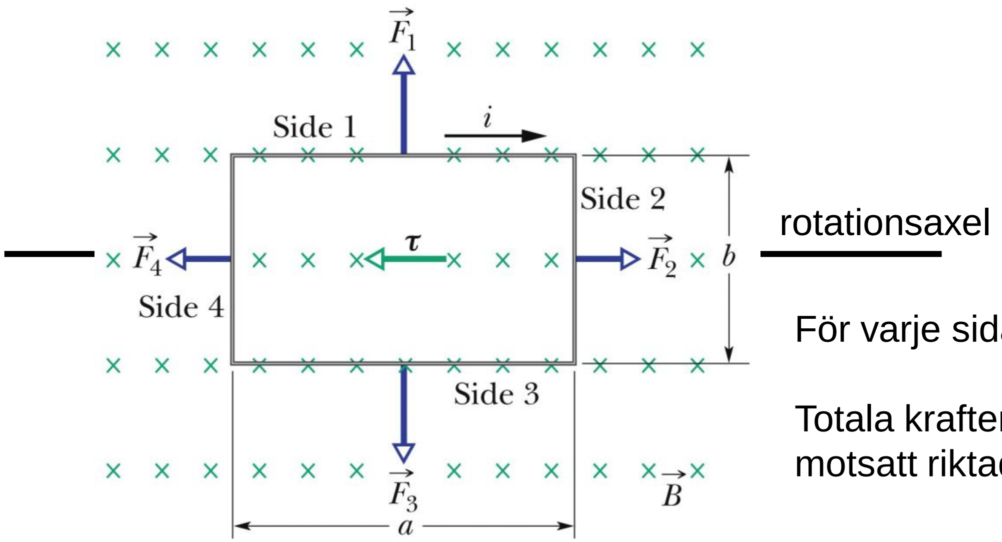
$$d\vec{F} = i\, d\vec{L} \times \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{F} = \int i\, d\vec{L} \times \vec{B}}$$

Kraften och kraftmomentet på en strömslinga

Då magnetfältet ger upphov till en kraft på en strömförande ledare kan fältet också ge upphov till ett kraftmoment. Av speciellt intresse är kraftmomentet på en strömslinga som snurrar kring en axel, denna rotationsrörelse är basen för en elektrisk motor.

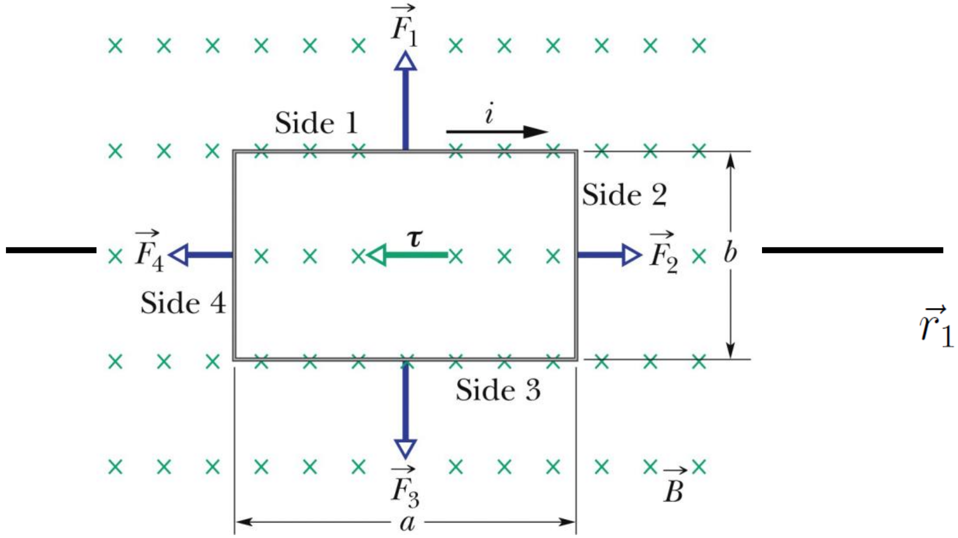


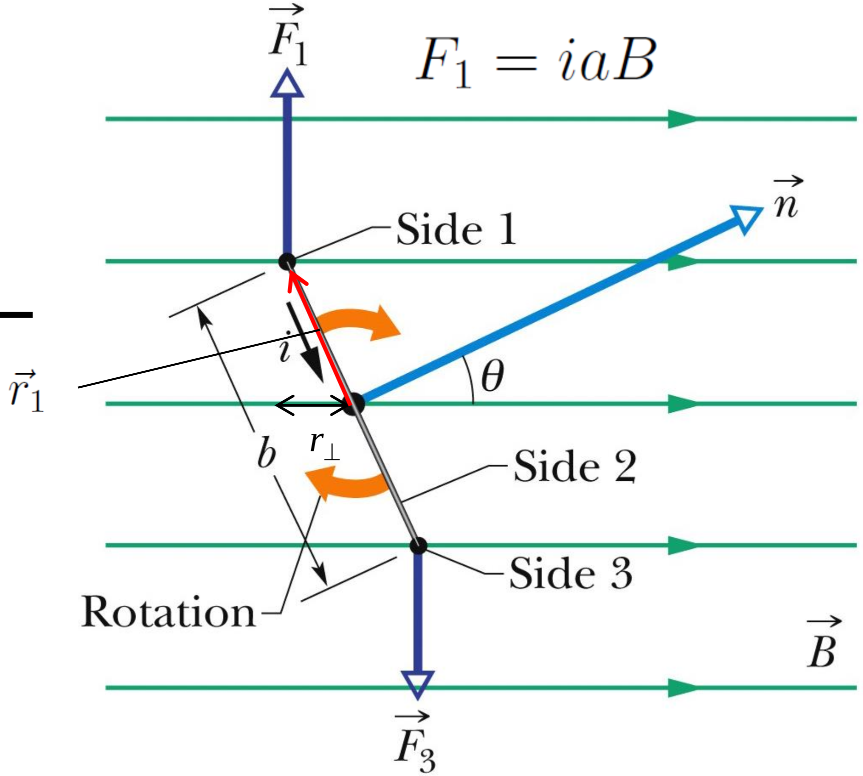


För varje sida i strömslingan gäller: $\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$

Totala kraften kommer att vara noll då F_2 och F_4 lika stor men motsatt riktade och F_1 och F_3 lika stora men motsatt riktade.

F_2 och F_4 på rotationsaxeln, ger inte upphov till något kraftmoment $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$





F_1 ger upphov till kraftmomentet:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \Longrightarrow \quad \tau_1 = r_\perp F_1 = iaB\frac{b}{2}\sin\theta$$

Totala kraftmomentet på slingan blir: $\tau = iabB\sin\theta$

För flera påvarannliggande slingor (spole) blir kraftmomentet: $\boxed{\tau = (NiA)B\sin\theta}$

Magnetiskt dipolmoment

Magnetiska dipolmomentet: $\boxed{\vec{\mu} = Ni\vec{A}}$

Ytvektorn $\vec{A}$:s riktning definieras av högerhandsregeln (krök högra handens fingrar i strömmens riktning och tummen ger riktningen för ytvektorn)

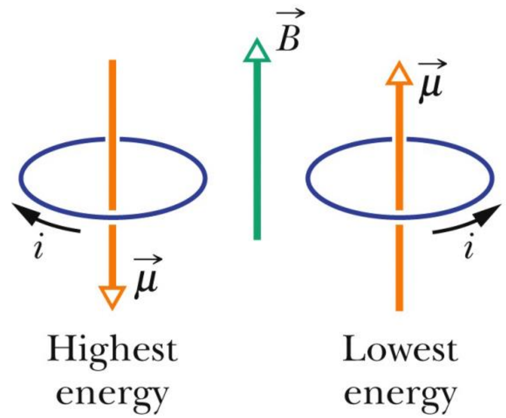
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Potentialenergin för en magnetisk dipol

$$\boxed{U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}}$$

Analogt med definitionen för den elektriska dipolens potentialenergi

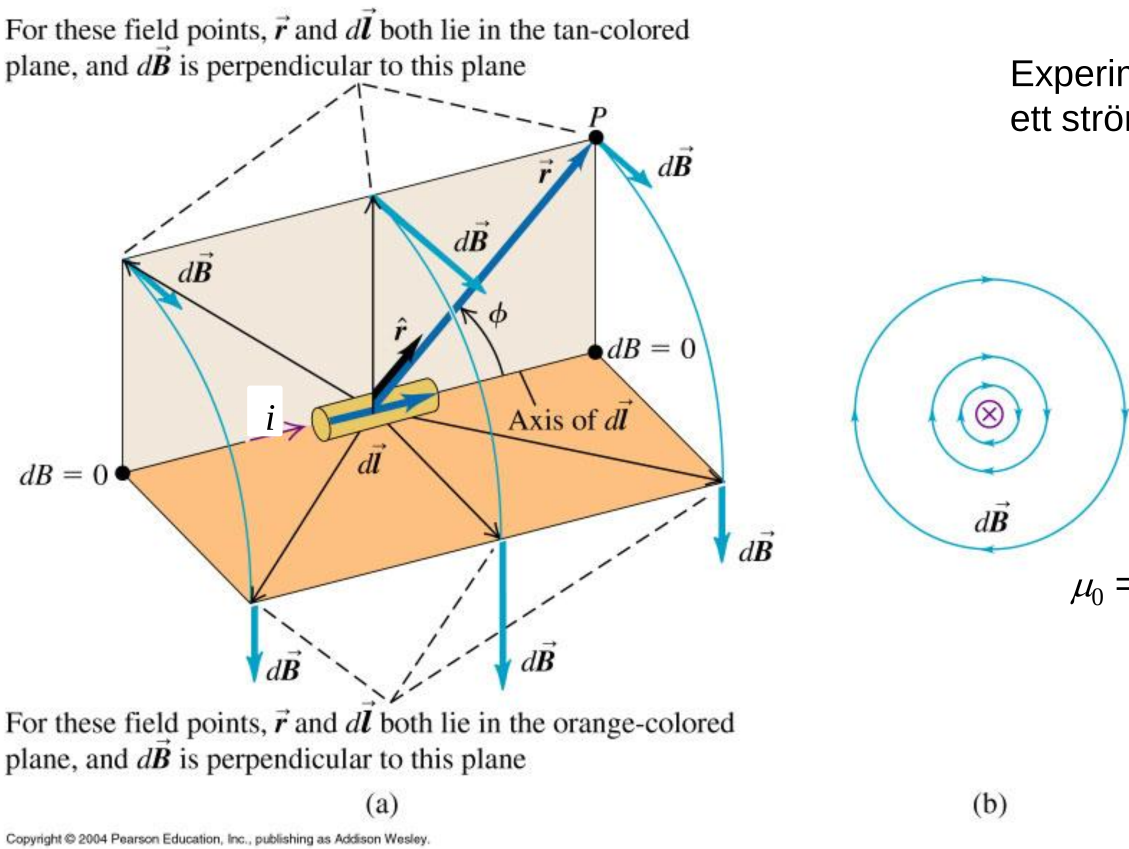
The magnetic moment vector attempts to align with the magnetic field.



MAGNETFÄLT

- Källor till magnetfält
  - Biot-Savarts lag
  - Amperes lag
  - Kraften mellan två strömförande ledare

KÄLLOR TILL MAGNETFÄLT



Experimentellt kan man visa att magnetfältet från ett strömelement är:

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}}$$

Biot-Savarts lag, motsvarigheten till Coulombs lag för magnetism

μ_0 = permeabiliteten i vakuum $\quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ \mathrm{Tm/A}$

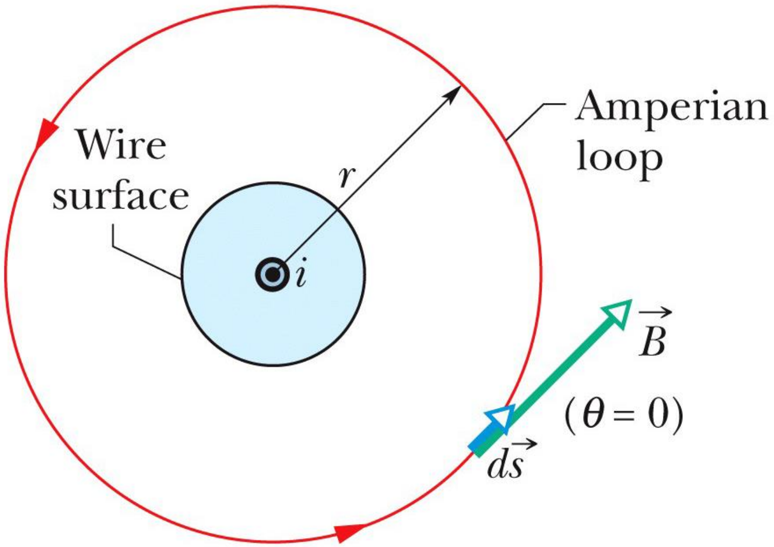
Ett enskilt strömelement existerar inte

integration över en strömförande ledare $\quad \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}}$$

Amperes lag

Fältet kring en lång rak ledare: $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$



Integration av magnetfältet B kring en sluten bana:

Fältlinjerna bildar cirkelplan centrerade i ledningens axel. Strömmen korsar cirkelplanet.

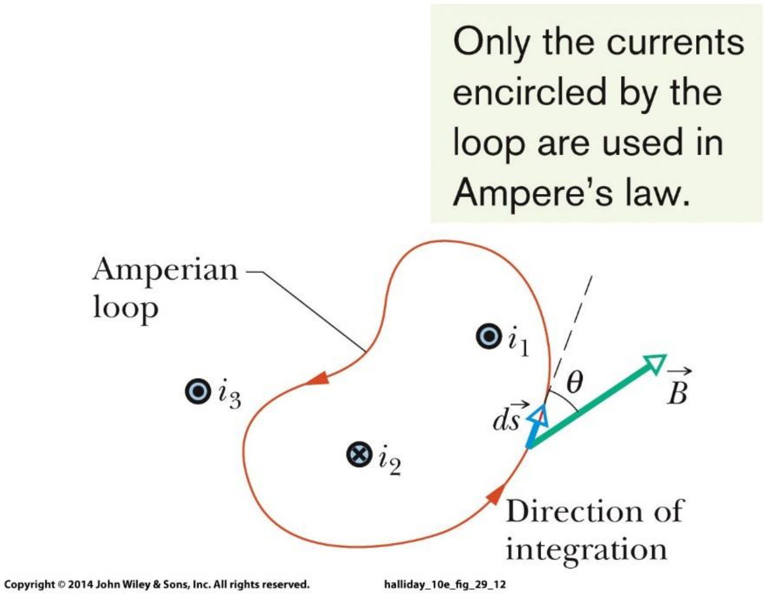
Geometriskt: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B\, ds = B \oint ds = B(2\pi r)$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

För exempelfallet beror integralen över B längs med en sluten fältlinje endast av strömmen i och konstanten μ_0:

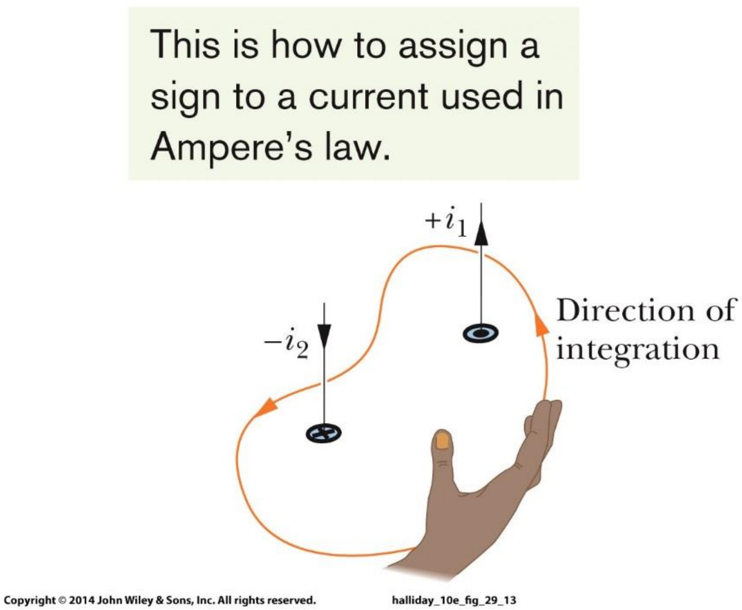
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$



För en allmän integrationsbana gäller:

Strömmar som korsar integrationsbanan ger kontributionen $\mu_0 i$ (i:s tecken bestäms av högerhandsregeln).

Strömmar som inte korsar integrationsbanan ger ingen kontribution.



$\Rightarrow$ **Amperes lag**: $$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum i}$$

Amperes lag kan användas till att bestämma det magnetfält som produceras av en strömfördelning med stor symmetri (jämför med Gauss lag för elfält).

Kraften mellan två parallella ledare

- En strömförande ledare alstrar ett magnetfält kring sig.
- Laddade partiklar i rörelse påverkas av en magnetisk kraft.

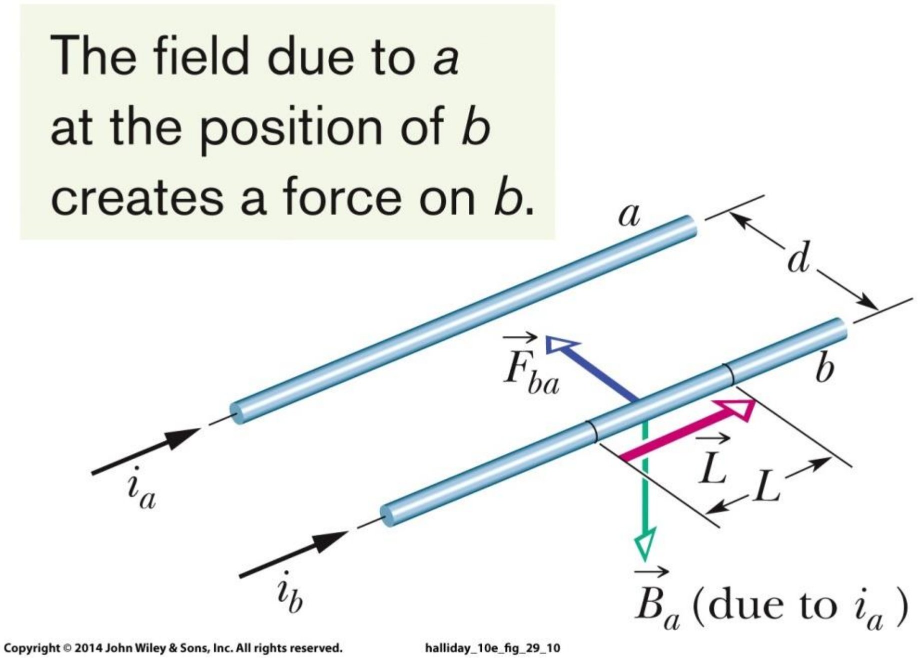
$\Rightarrow$ Strömförande ledare påverkar varandra med magnetiska krafter

Fältet från ledare a: $$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

Kraften på ledare b: $$\vec{F}_{ba} = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a$$

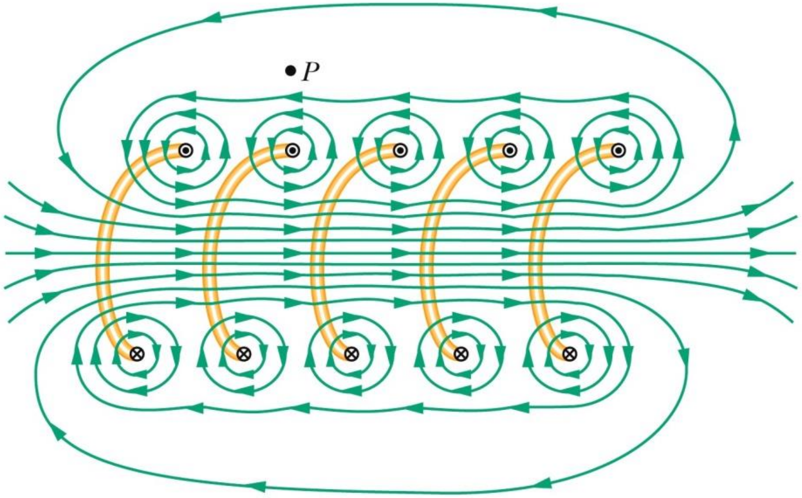
$$\Rightarrow$$

$$F_{ba} = i_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi d}$$

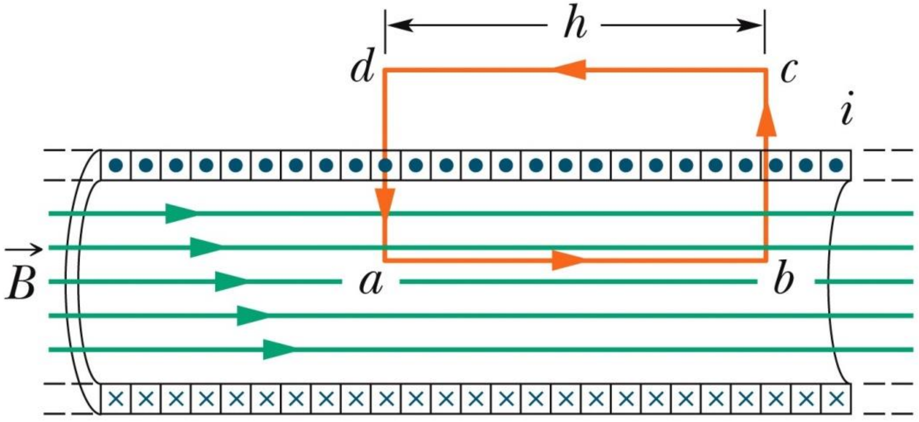


- Parallella strömmar attraherar varandra.
- Antiparallella strömmar repellerar varandra.

Magnetfältet i en solenoid



 halliday_10e_fig_29_18



 halliday_10e_fig_29_20

Amperes lag ger för magnetfältet inne i en solenoid:

$$B = \mu_0 i n$$

där n är solenoidens varvdensitet

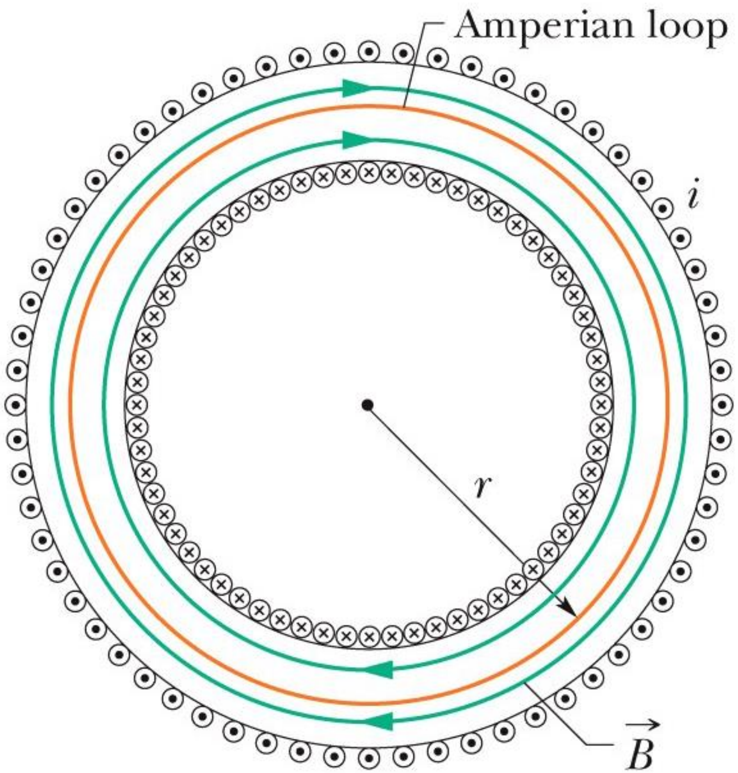
Magnetfältet i en toroid


(a)

Amperes lag ger för magnetfältet inne i en toroid:

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi}\frac{1}{r}$$

där N är toroidens varvantal.



(b)

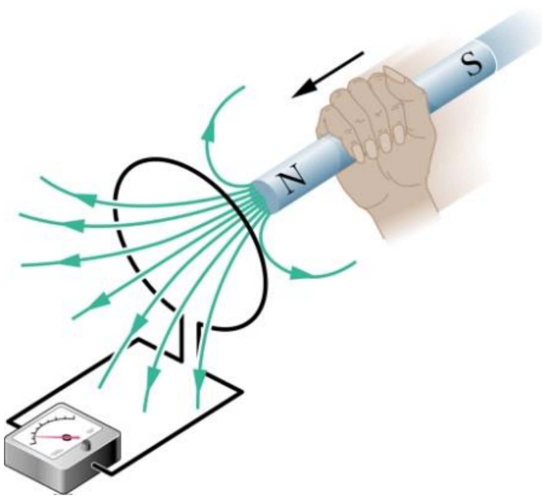
INDUKTION

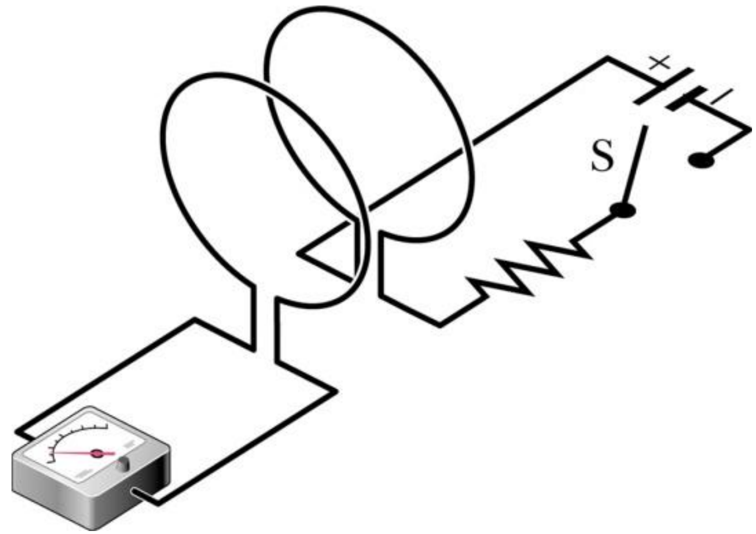
- Induktion
  - Faradays lag och inducerad källspänning
  - Lentz lag
  - Energiomvandling vid induktion

ELEKTROMAGNETISK INDUKTION

Induktionsexperiment

- Eftersom en konstant ström i en ledning ger upphov till ett konstant magnetfält antog Faraday (felaktigt) att ett konstant magnetfält skulle ge upphov till en ström.

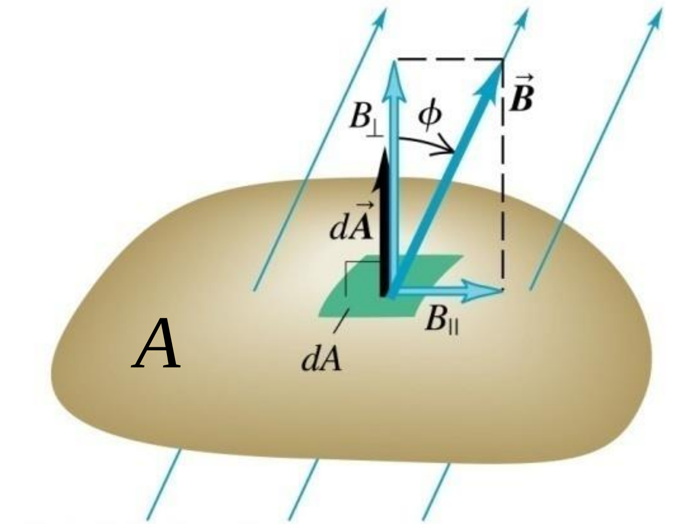




Då en ström går genom kretsen betyder detta att en källspänning inducerats i kretsen, dvs. laddningsbärarna tar emot energi.

Faradays (induktions) lag

Sambandet mellan magnetfältet och den inducerade källspänningen:n beskrivs med hjälp av det magnetiska flödet genom en yta.



Flödet genom dA:

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B\, dA \cos\phi \implies$$

Totala flödet genom A:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$[\Phi_B]=\mathrm{Tm}^2=\mathrm{Wb}$ (weber)

Ett tidsberoende magnetiskt flöde som korsar en strömslinga inducerar en källspänning enligt

Faradays lag:

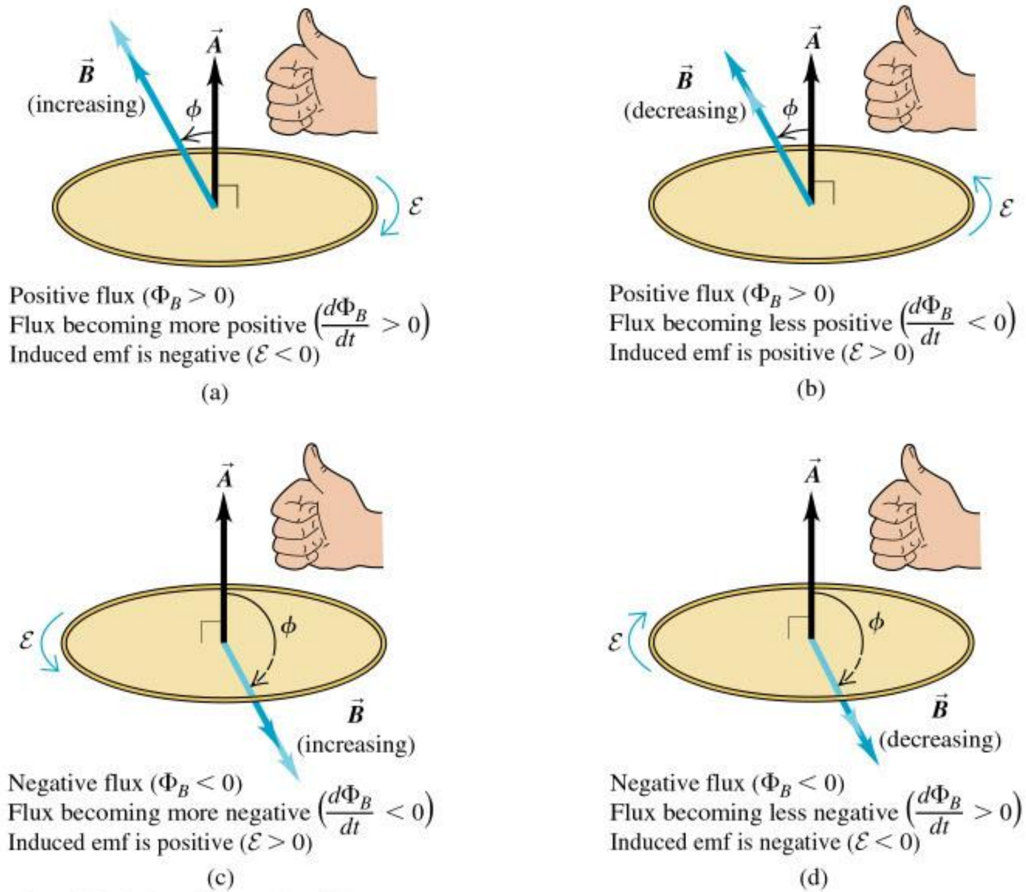
$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

Ifall ett varierande magnetisk flöde går igenom en spole induceras samma källspänning i varje varv av spolen.

$$\implies \quad \mathcal{E}_T = N\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Källspänningens och inducerade strömmens riktning i Faradays lag

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

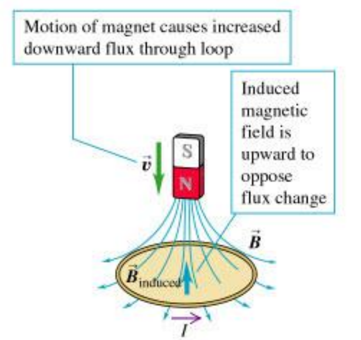


Lenz lag

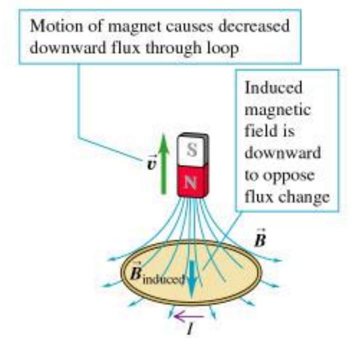
Minustecknet och derivatans tecken i Faradays lag bestämmer riktningen för den inducerade källspänningen. Riktningen fås också via Lenz lag:

Lenz lag:

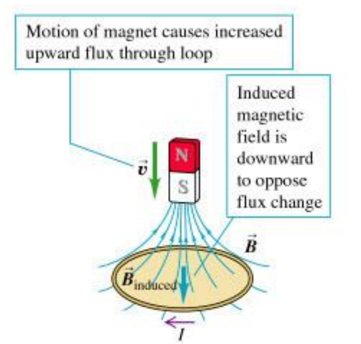
Riktningen för den inducerade källspänningen är sådan att dess kontribution till det magnetiska fältet, motverkar förändringen i det magnetiska flödet som producerar den inducerade strömmen.



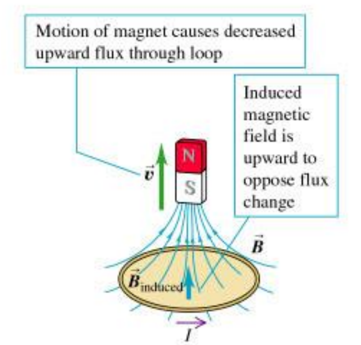
(a) To produce this induced field, induced current must be *counterclockwise* as seen from above loop



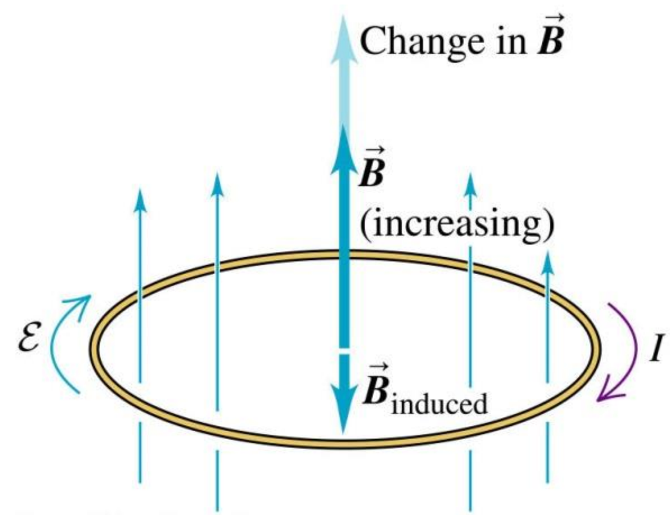
(b) To produce this induced field, induced current must be *clockwise* as seen from above loop



(c) To produce this induced field, induced current must be *clockwise* as seen from above loop



(d) To produce this induced field, induced current must be *counterclockwise* as seen from above loop



Induktion och energiomvandling

Då slingan dras med konstant hastighet *v* görs arbete med effekten

$$P = Fv$$

Flödet genom slingan

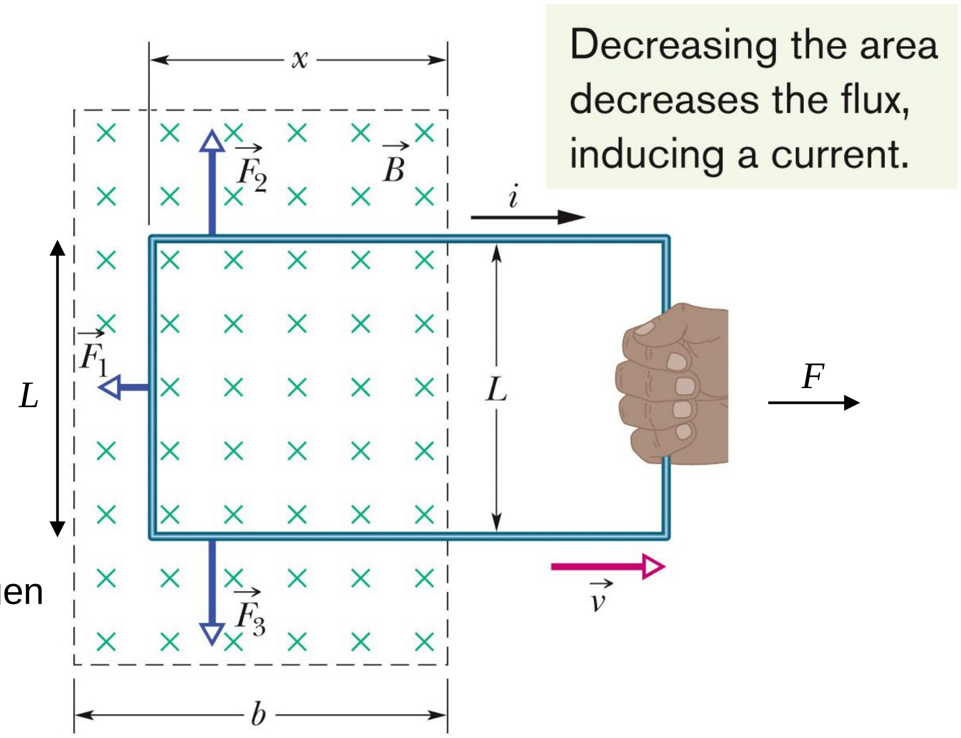
$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA = BLx$$

Enligt Faradays lag blir den inducerade källspänningen

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = BLv$$

Strömmen i slingan:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv}{R}$$



Strömmen i slingan: $i = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = \dfrac{BLv}{R}$

Laddningsbärarna erhåller energi med takten

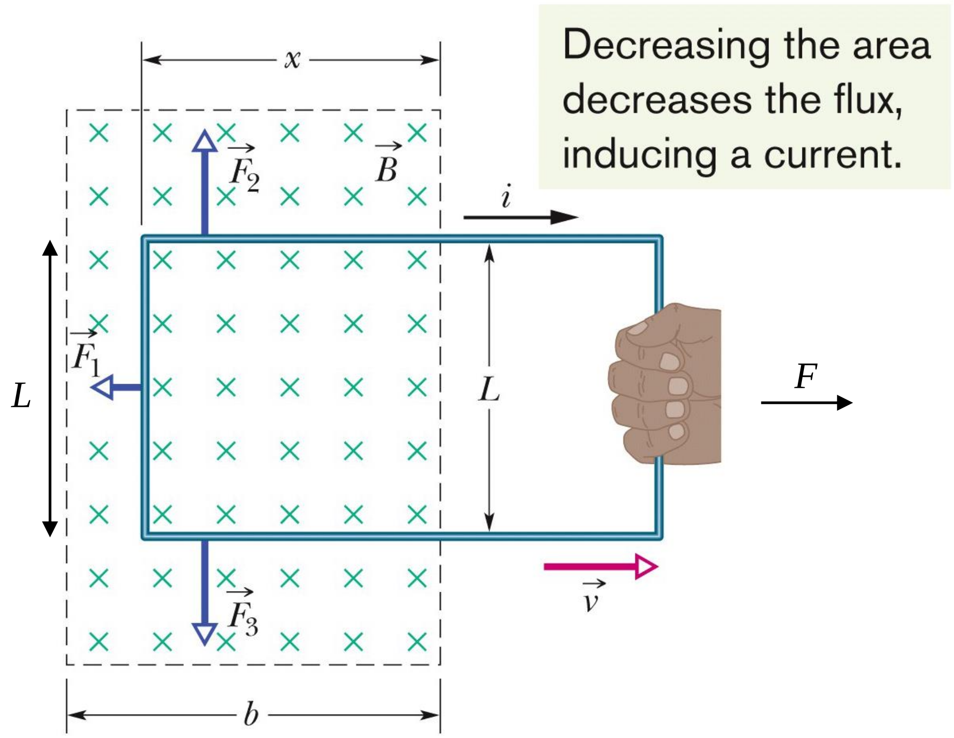
$$P = \mathcal{E} i = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

Laddningsbärarna rör på sig $\Longrightarrow$ Magnetisk kraft

$$\vec{F}_1 = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Konstant hastighet (NII jämvikt)

$$F_1 = iLB = F$$



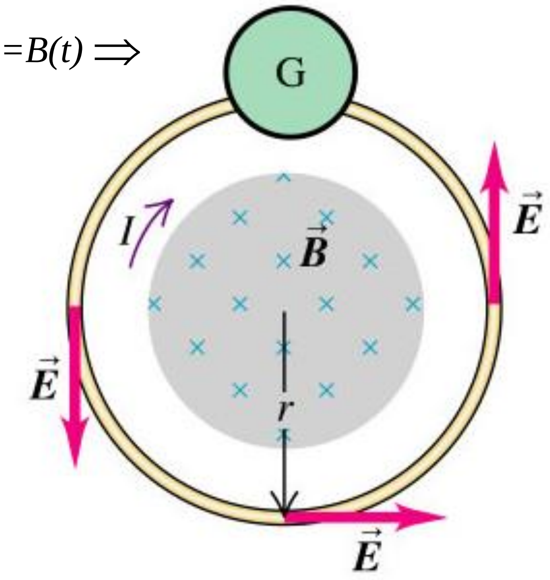
- Den mekaniska kraften F gör arbete.
- Arbetsenergin tillförs laddningsbärarna
- Laddningsbärarna förlorar energi pga reistans i slingan ($P=i^2R$)
- Resistiv uppvärming, energi avges till omgivningen i form av värme

INDUCERADE ELEKTRISKA FÄLT, INDUKTANS OCH ENERGIN I MAGNETFÄLT

- Inducerade elektriska fält
- Induktans
- Energin i ett magnetfält

Inducerade elektriska fält

- En strömslinga kring en solenoid: Strömmen i solenoiden ändras $B=B(t) \Longrightarrow$
- Flödet genom slingan ändrar
- Källspänning induceras



$$\mathcal{E} = -A\frac{dB}{dt}$$

Vilken kraft får laddningsbärarna att gå runt i slingan?

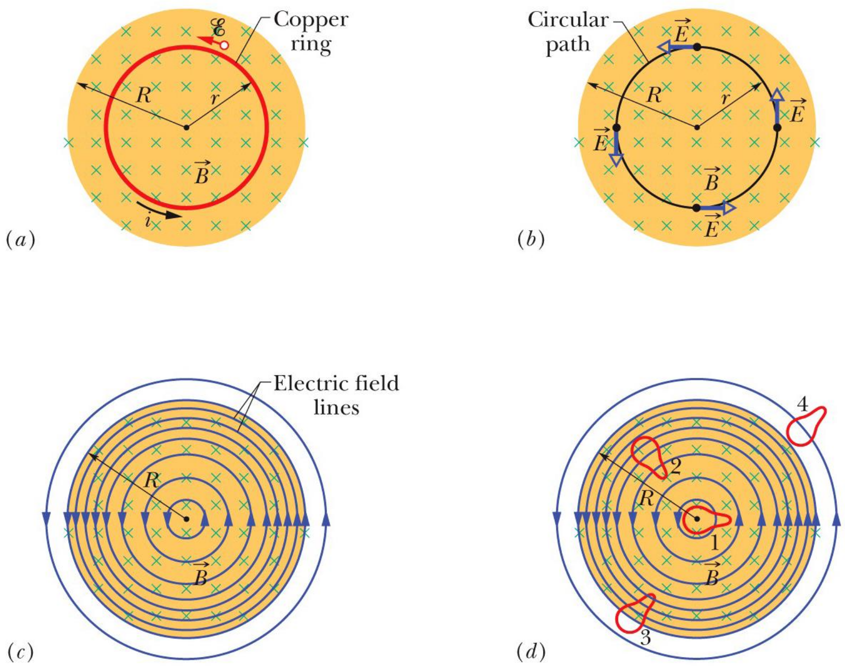
$$\vec{F} = \boxed{q\vec{E}} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_B \perp \vec{v}$$

$\Rightarrow$ **Elektrisk kraft ?!** $\quad W_E = \oint \vec{F}_E \cdot d\vec{l} \neq 0$

Den inducerade källspänningen = arbetet per laddningsenhet som görs av den elektriska kraften då en laddningsbärare rör sig ett varv i slingan:

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \oint \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{q} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Jmf. elektrostatiska fält: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ konservativt fält!

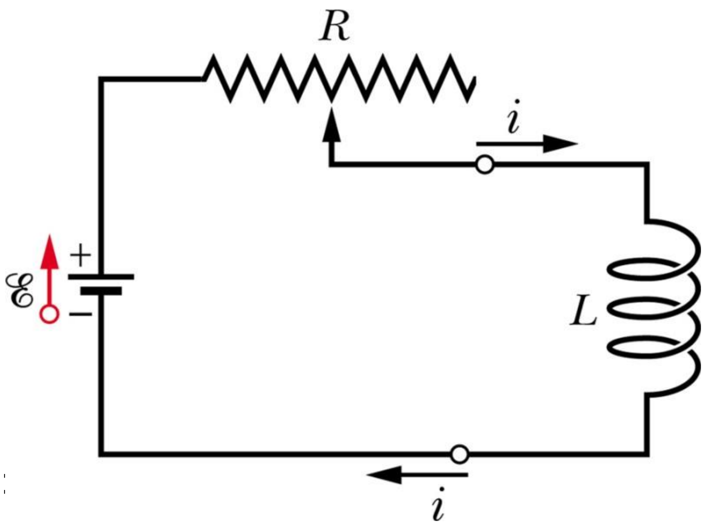
$\Longrightarrow$ **Ett inducerat elfält är INTE konservativt!**

Faradays lag med hjälp av det inducerade elektriska fältet:

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

Induktans och självinduktion

Strömmen i kretsen producerar ett magnetfält, dvs. ett magnetiskt flöde korsar slingorna i spolen. Ifall strömmen ändrar, ändrar också det magnetiska flödet.



Från Faradays lag följer då att en självinducerad källspänning existerar i kretsen:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Flödet är proportionellt mot strömmen (solenoid $B = \mu_0 i n$):

$$N\Phi_B = Li$$

Definierar självinduktansen L

L = självinduktans   [L] = H

Den självinducerade källspänningen blir $\boxed{\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}}$

Magnetisk energi

Effektförbrukningen i ett godtyckligt kretselement är

$$P = iV$$

Potentialskillnaden över en spole beror av **förändringen** i strömmen

$$\Rightarrow \quad P = iV = Li\frac{di}{dt}$$

Takten med vilken laddningsbärarna erhåller eller förlorar energi i ett induktivt kretselement:

$$\Rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = P = Li\frac{di}{dt}$$

Om strömmen genom spolen ökar är riktningen för den inducerade källspänningen motsatt mot strömmen och laddningsbärarna förlorar potentialenergi och vice versa.

$$\Rightarrow \quad dU = Li\frac{di}{dt}dt = Li\,di$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}Li^2}$$

Energi som lagras i en induktor

Energidensitet i ett magnetfält (jmf. elfält)

För en ideal solenoid med längden l, tvärsnittsarean A och varvdensiteten n gäller:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{(nl)(BA)}{i} = \frac{nl\mu_0 in(A)}{i} = \mu_0 n^2 lA \quad \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 Ali^2 \quad \text{och} \quad B = \mu_0 ni \quad \Rightarrow$$

$$U = \frac{B^2}{2\mu_0}Al$$

Definierar: energidensiteten i ett magnetfält u_B

$$\boxed{u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

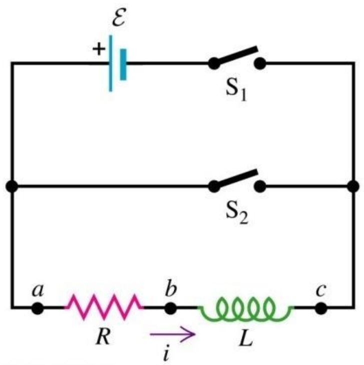
VÄXELSTRÖMSKRETSAR

- Växelströmskretsar
    - LR, LC- och LRC-kretsar med likströmskällor
    - Kretsar med växelspänningskällor
        - Reaktans
        - Impedans
    - Effekt i växelströmskretsar

R-L kretsar

Strömbrytaren S_1 sluts då $t=0$:

Strömökningen i kretsen kommer att motverkas av en inducerad källspänning i spolen.



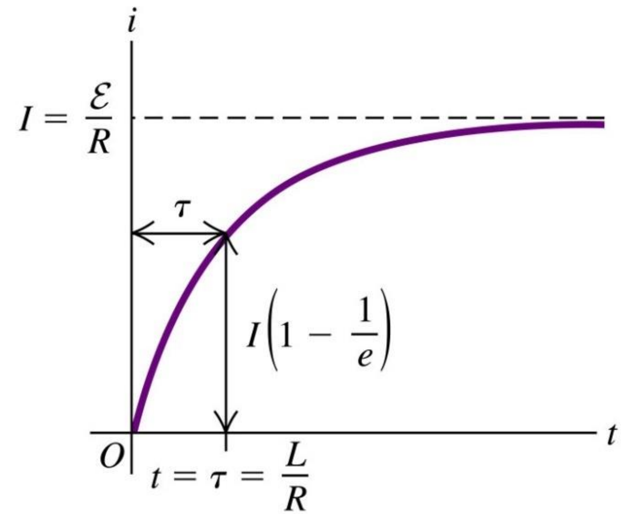
Kirchhoff II motsols på strömslingan ger:

$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} - Ri = 0$$

+ variabelbyte + integrering av diff. ekvationen

$$\boxed{i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_L}\right)}$$

där $\tau = L/R$, R-L kretsens tidskonstant

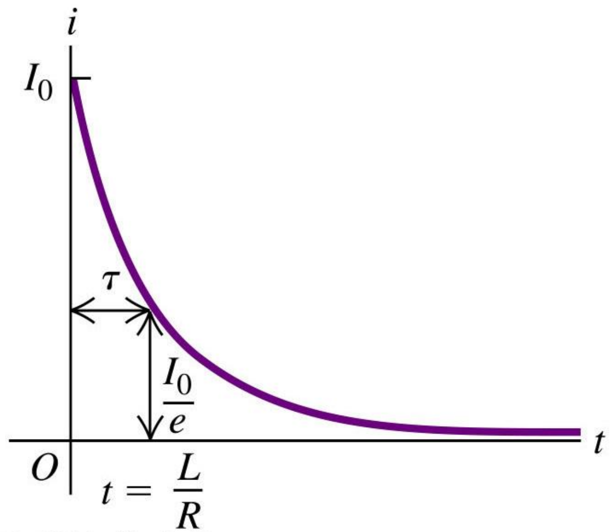


Då spänningskällan kopplas bort från kretsen (S_1 öppnas, S_2 sluts) ger Kirchhoff II medsols:

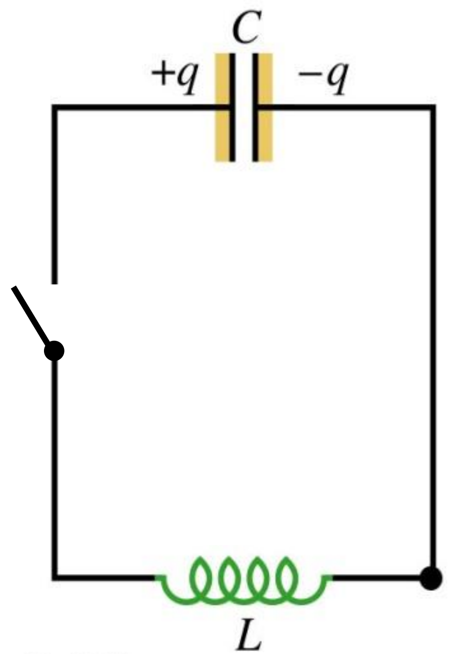
$$L\frac{di}{dt} + iR = 0$$

+ integrering av diff. ekvationen

$$\boxed{i(t) = i_0 e^{-t/\tau_L}}$$



L-*C* kretsen



En kondensator urladdas genom en spole.

Kirchhoff II: $$L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

ins. av $i=dq/dt$ $\Longrightarrow$

$$\frac{d^2q}{dt^2}=-\frac{1}{LC}q$$

Diff. ekv. av andra ordningen, lösning av formen

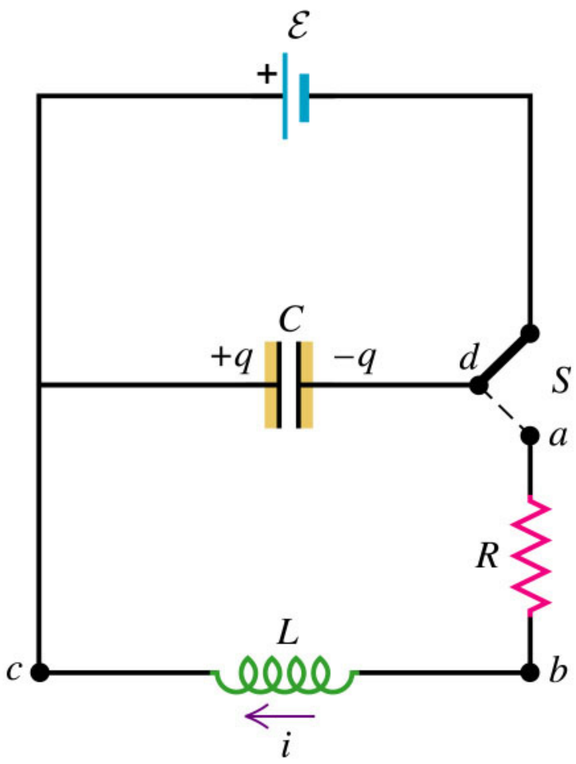
$$q=Q_m\cos(\omega_0 t+\phi)$$

där $\boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$ och $i=-\omega_0 Q_m\sin(\omega_0 t+\phi)$

Q_m och ϕ bestäms av begynnelsevillkoren.

Jmf. med en mekanisk harmonisk oscillator.

L-*R*-*C* kretsen



En kondensator urladdas genom en spole i en resistiv krets.

Kirchhoff II: $$L\frac{di}{dt}+iR+\frac{q}{C}=0$$

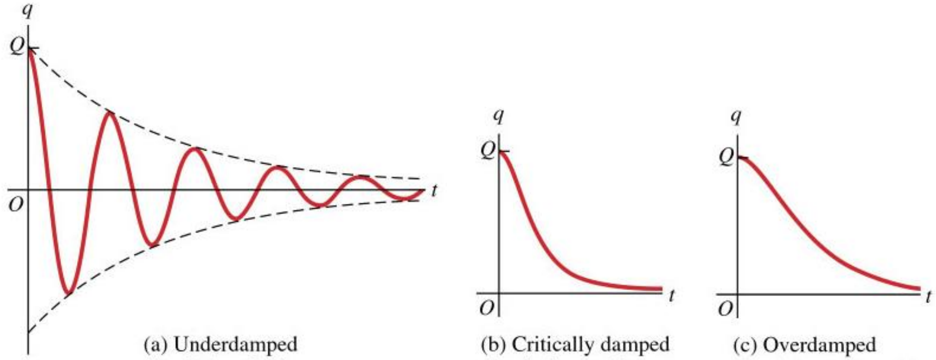
ins. av $i=dq/dt$ $\Longrightarrow$

$$\frac{d^2q}{dt}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0$$

Diff. ekvationen för en dämpad oscillator, lösning av formen

$$q=Q_m e^{-t/\tau}\cos(\omega_d t+\phi)$$

där $\tau=\dfrac{2L}{R}$ och $\omega_d=\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}=\sqrt{\omega_0^2-\dfrac{1}{\tau^2}}$



(a) Underdamped circuit (small R)

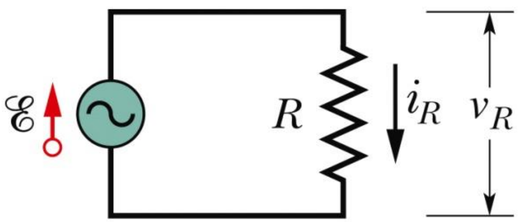
(b) Critically damped circuit (larger R)

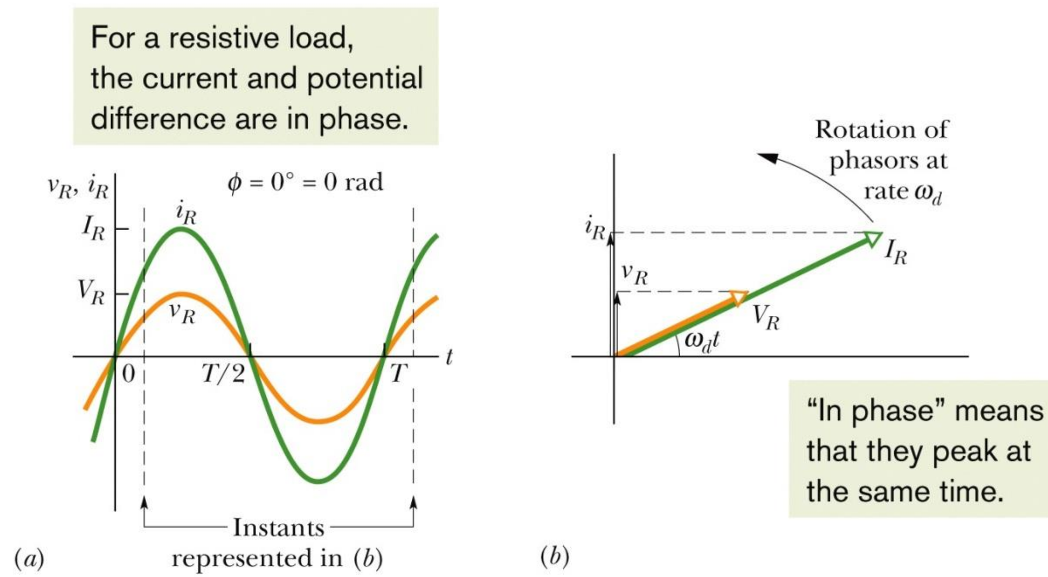
(c) Overdamped circuit (very large R)

Växelströmskretsar

Ett motstånd i en AC-krets

AC-källa $V = V_R \sin(\omega t)$





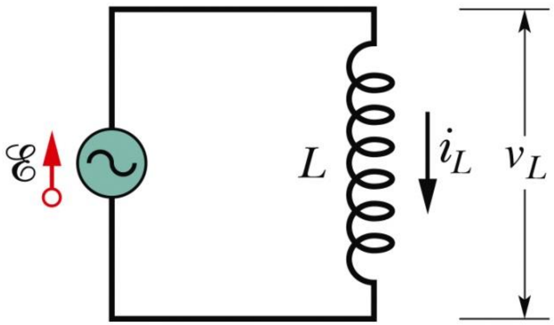
Kirchhoff II: $V_R \sin(\omega t) = i_R R$

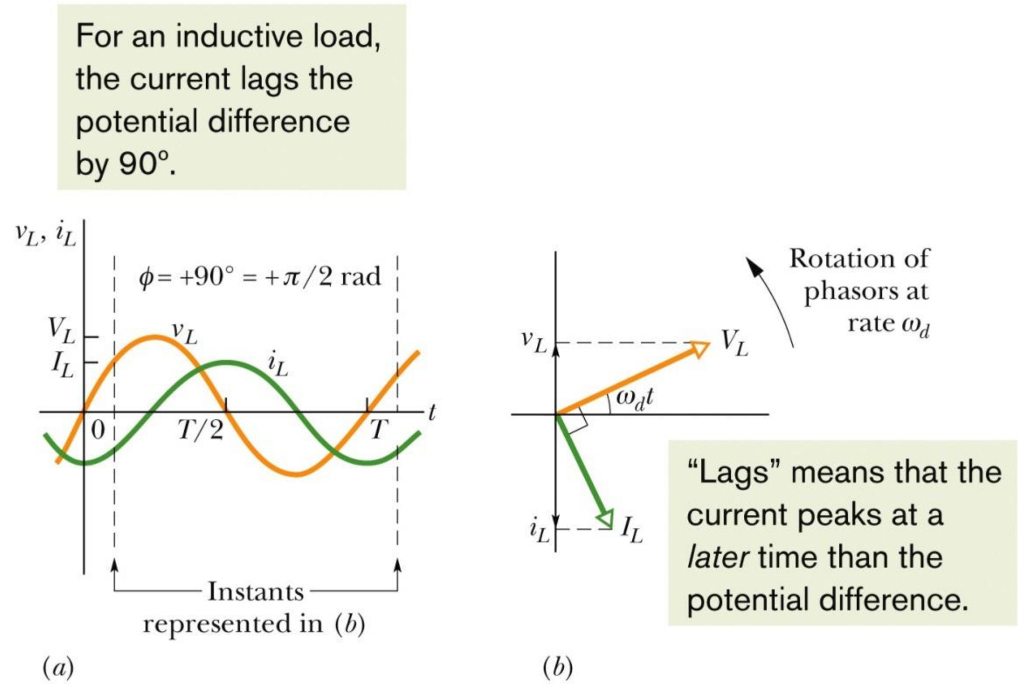
$$\Rightarrow \quad i_R = \frac{V_R}{R} \sin(\omega t)$$

Ifall R är ohmisk: $\boxed{i_R = I_R \sin(\omega t)}$

där $I_R = V_R/R$

En spole i en AC-krets





Kirchhoff II:

$$V_L \sin(\omega t) = L\frac{di}{dt} \Rightarrow$$

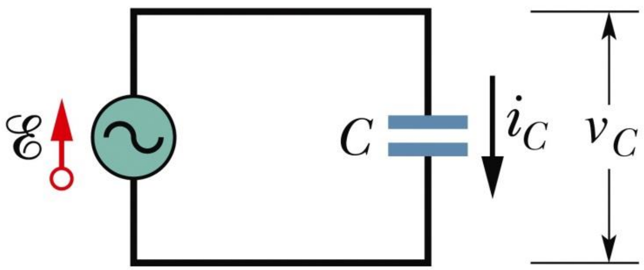
$$\int \frac{di}{dt}\, dt = \frac{V_L}{L}\int \sin(\omega t)\, dt \Rightarrow i_L = -\frac{V_L}{\omega L}\cos(\omega t)$$

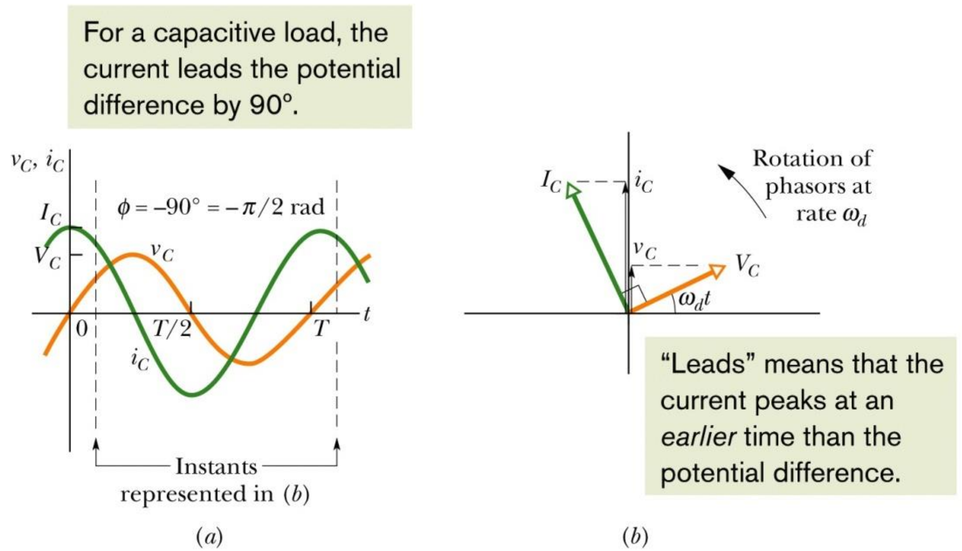
$$\boxed{i_L = I_L \sin(\omega t - \frac{1}{2}\pi)}$$

där $I_L = V_L/\omega L$

Definierar induktiv reaktans: $\boxed{X_L = \omega L}$

En kondensator i en AC-krets





Kirchhoff II:

$$V_C \sin(\omega t) = \frac{q}{C} \Rightarrow$$

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \omega C V_C \cos(\omega t)$$

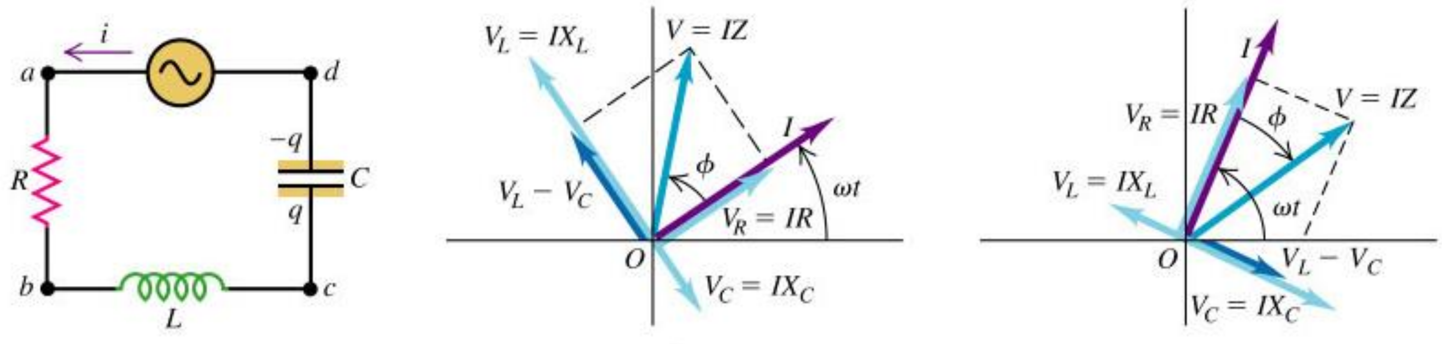
$$\boxed{i_C = I_C \sin(\omega t + \frac{1}{2}\pi)}$$

där $I_C = V_C/(1/\omega C)$

Definierar kapacitiv reaktans: $\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$

En *L-R-C* seriekrets

induktiv kapacitiv



(a) (b) (c)

Kirchhoff II:

$$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = V$$

där $V = V_m \sin(\omega t)$

Derivering + $dq/dt = i$

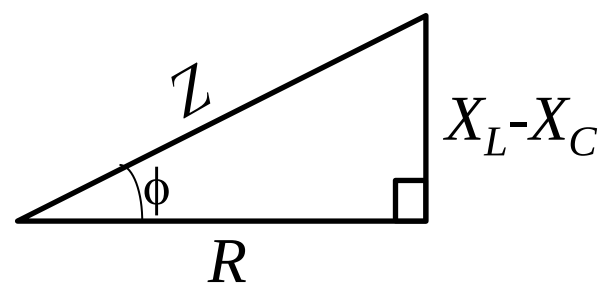
$$\Rightarrow L\frac{d^2 i}{dt} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega V_m \cos(\omega t)$$

Diff. ekvationen för en driven harmonisk oscillator $\Rightarrow$

$$\boxed{i = I_m \sin(\omega t - \phi)}$$ där $I_m = \dfrac{V_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$

Definierar impedans: $\boxed{Z = \dfrac{V_m}{I_m}}$ $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

Fasskillnaden: $\tan\phi = \dfrac{X_L - X_C}{R}$



Resonans i en AC-krets

Strömamplituden begränsas av impedansen:

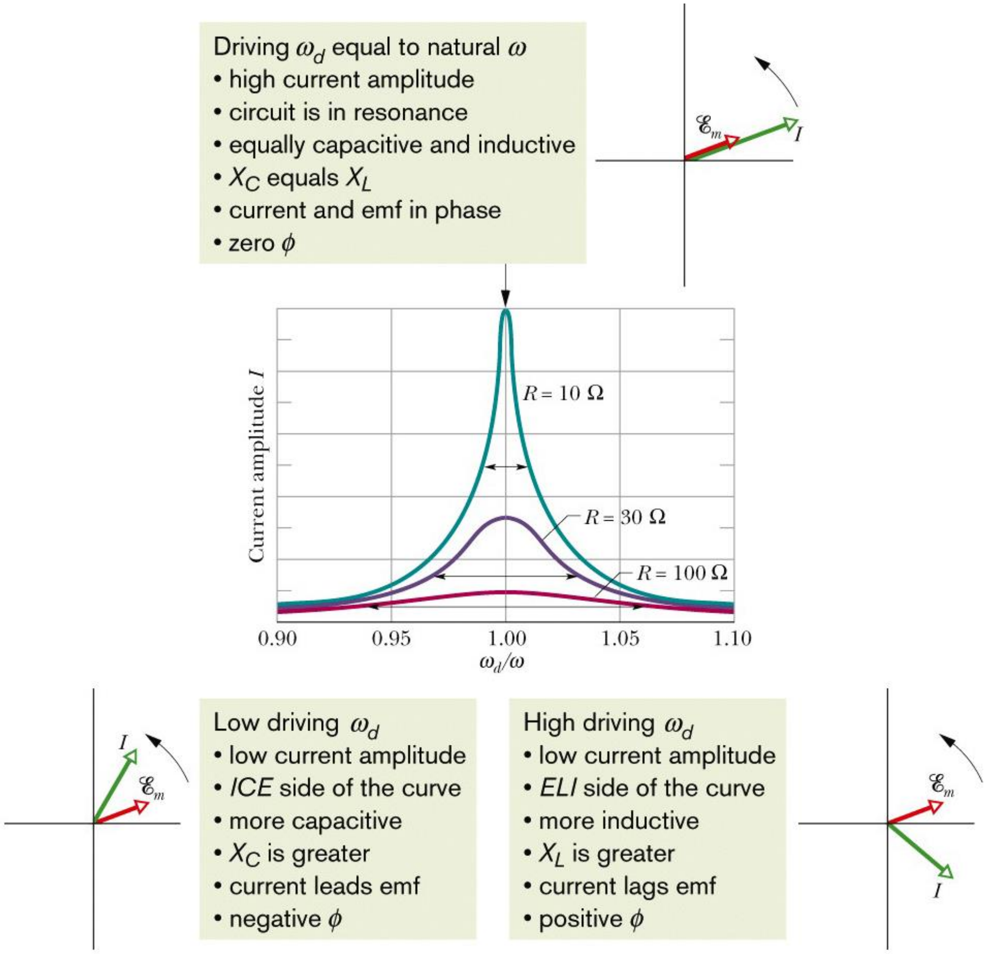
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

då $X_L = X_C$ eller $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

får strömmamplituden sitt största värde

$$I_m = V_m / Z$$

kretsen är i resonans. Jmf. drivna harmoniska oscillatorn

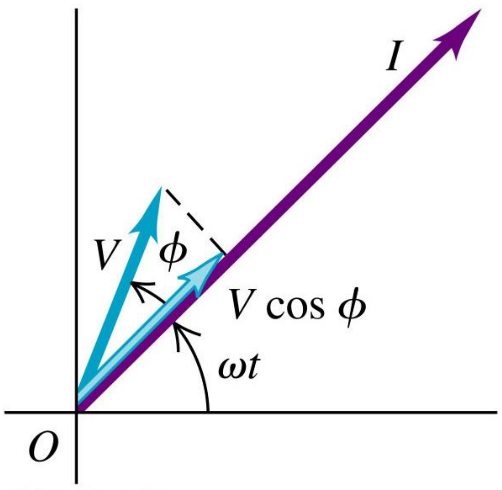


$$X_L = \omega L \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Effekten i en AC-krets

En allmän AC-krets har fyra element: spänningkällan, motståndet, kondensatorn och spolen



- Strömkällan tillför kretsen elektromagnetisk energi.
- I motståndet sker energiförluster pga uppvärmning ($P = i^2R$).
- Vid en viss tidpunkt lagras eller lämnar energi kondensatorn, beroende på om den uppladdas eller urladdas. Medeleffekten är noll för kondensatorn.
- Spolen fungerar på samma sätt som kondensatorn, dvs. som en energilagrare. Medeleffekten kommer att vara noll.

Uttrycket för medeleffekten kommer att innehålla produkten av uttrycket för två sinusoidalt varierande funktioner ($P=VI$) , därför är det bekvämt att introducera kvadratiska medelvärden eller effektivvärden (effektiva värden) för storheterna.

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad \text{och} \qquad V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Effekten i en allmän AC-krets: $\boxed{\overline{P} = V_{rms} I_{rms} \cos\phi}$

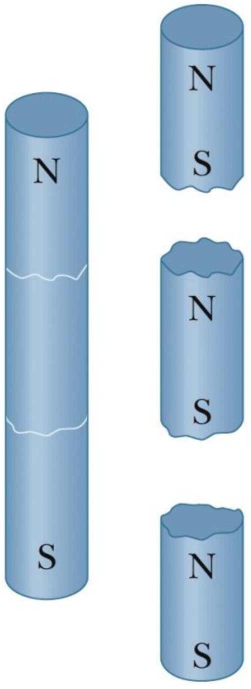
$$\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

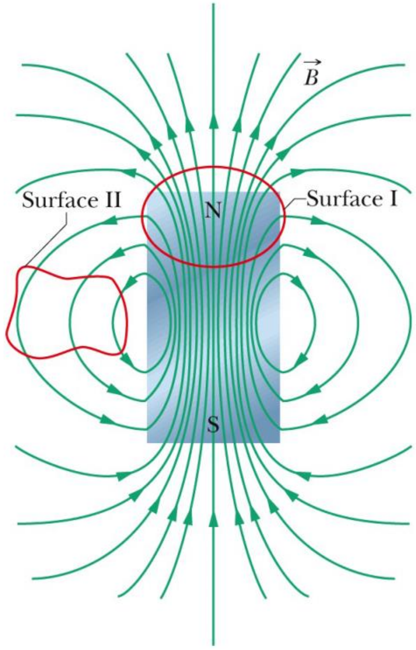
MAXWELLS EKVATIONER

- Maxwells ekvationer
    - Gauss lag för magnetfält
    - Maxwells förskjutningsström
    - Maxwells ekvationer i integralform
    - Maxwells ekvationer i differentialform

Gauss lag för magnetfält

- Gauss lag för ett elektriskt fält ger att flödet genom en sluten yta endast beror av den inneslutna laddningen
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$
- Om en permanent magnet (en magnetisk dipol) bryts itu, får man flera magnetiska dipoler, inte två monopoler.
- För en godtycklig sluten yta visar det sig att det totala magnetiska flödet genom ytan är noll. Alla fältlinjer som kommer in i den slutna ytan kommer också ut därifrån.
- Alla fältlinjer är slutna. $\Rightarrow$
- Gauss lag för magnetfält
$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0}$$
- Gauss lag för magnetfält antyder att inga motsvarigheter till elektriska laddningar existerar inom magnetismen, dvs. det existerar inga magnetiska monopoler. Den enklaste källan till magnetfält är således den magnetiska dipolen.

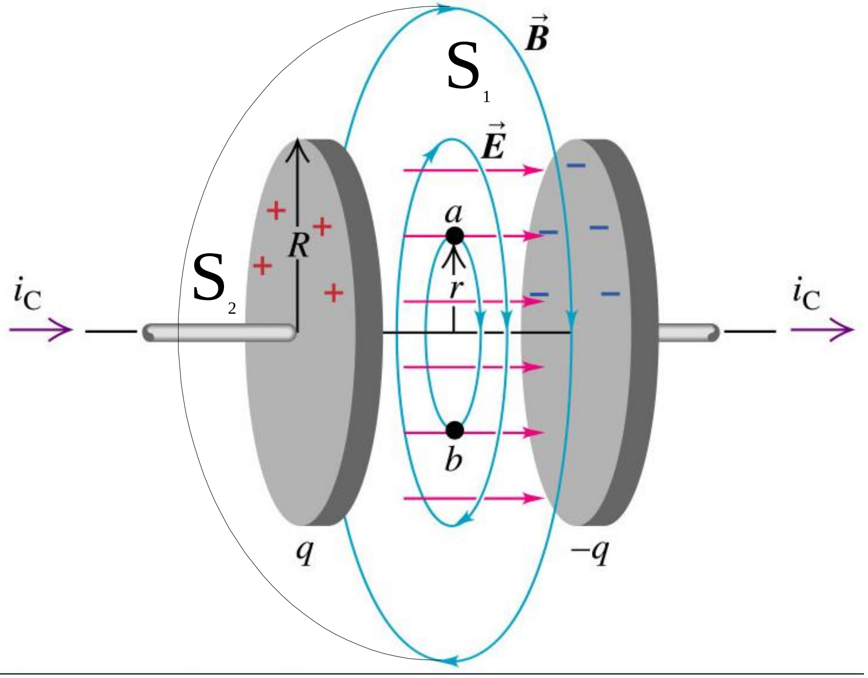




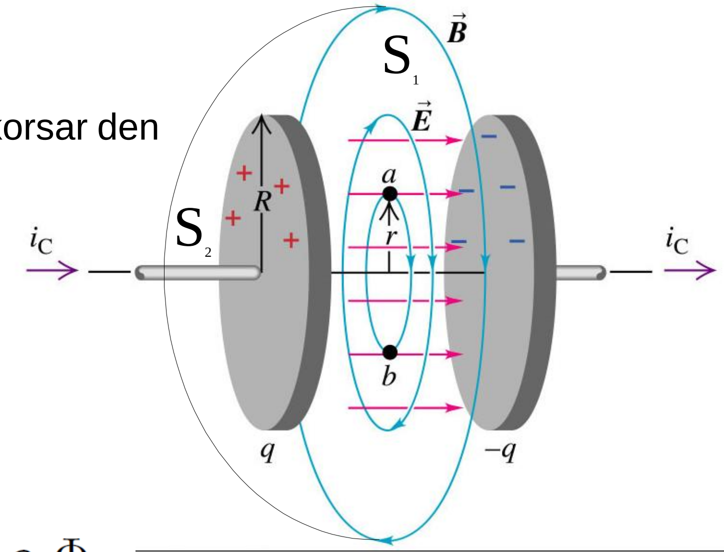
Maxwells förskjutningsström

En skivkondensator laddas:
Ytan S_2 korsas av strömmen i_c,
Ytan S_1 korsas inte av en ström.
Båda ytorna beskrivs av samma integrationsbana.

- Amperes lag: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i$
- Strömmen i ledningen och genom S_2: $i_C = \dfrac{dq}{dt}$
- Strömmen genom S_1 är noll.



Maxwells modifikation av Amperes lag:



- En matematiskt ekvivalent ström korsar S_1, så att strömmen som korsar den slutna banan är den samma oberoende av val av yta.

Elfältet mellan skivorna: $E = \dfrac{|\sigma|}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}$

Laddningen Q kan skrivas med hjälp av det elektriska flödet Φ_E:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot dA = EA \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \varepsilon_0 EA = \varepsilon_0 \Phi_E$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Maxwell definierade förskjutningsströmmen: $\boxed{i_d = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt}}$

Allmänna formen på Amperes lag: $$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)}$$

Maxwells ekvationer:

Hela den klassiska elektromagnetismen finns sammanfattad i fyra ekvationer:

Gauss lag för elektriska fält: $$\oint \vec{E} \cdot \, d\vec{A} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

Gauss lag för magnetiska fält: $$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Faradays lag: $$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Amperes lag: $$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\sum i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

- Faradays lag och Amperes lag: el- och magnetfälten beror av varandra.
- T.ex. en störning i ett elfält ger upphov till ett magnetfält och vice versa.
    - Elektromagnetiska vågor!

Maxwells ekvationer i differentialform

Differentialformerna för Maxwells ekvationer fås från integralformerna med hjälp av divergensteoremet och Stokes teorem.

Divergensteoremet: $$\oint \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_V \nabla\cdot\vec{F}dV$$

där: $$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Stokes teorem: $$\int_A \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{A} = \oint \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$\oint \vec{E}\cdot\, d\vec{A} = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(\sum i + \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

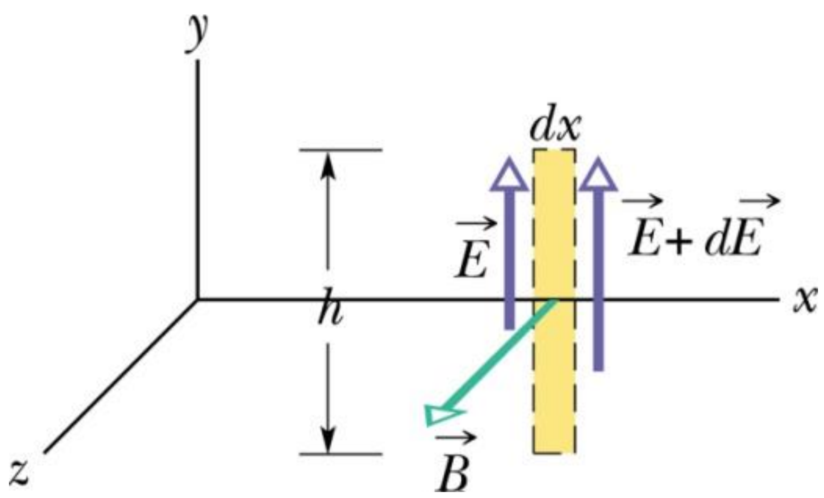
ELEKTROMAGNETISK VÅGRÖRELSE

- Elektromagnetisk vågrörelse
  - Vågekvationen för elektromagnetisk vågrörelse
  - Harmoniska vågor
  - Energitransport
  - Poynting vektorn
  - Strålningstryck

Elektromagnetiska vågor, vågekvationen

Anta ett elfält i y-riktningen och ett magnetfält i z-riktningen.

Fälten i vakuum, dvs. inget medium.



Från Maxwells ekvationer följer:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}}$$

Vågekvationen för en våg som framskrider i x-axelns riktning med våghastigheten:

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

c = 299 792 458 m/s

För magnetfältet fås på motsvarande sätt:

$$\boxed{\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}}$$

Harmoniska elektromagnetiska vågor

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

Harmoniska lösningarna på vågekvationerna för el- och magnetfältet:

$$E_y = E_0 \sin(k_e x - \omega_e t)$$
$$B_z = B_0 \sin(k_b x - \omega_b t + \phi)$$

Allmänt kan vågtal, vinkelfrekvens och fas vara olika för de två vågorna.

Från Faradays lag i differentialform ($\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$) följer att:

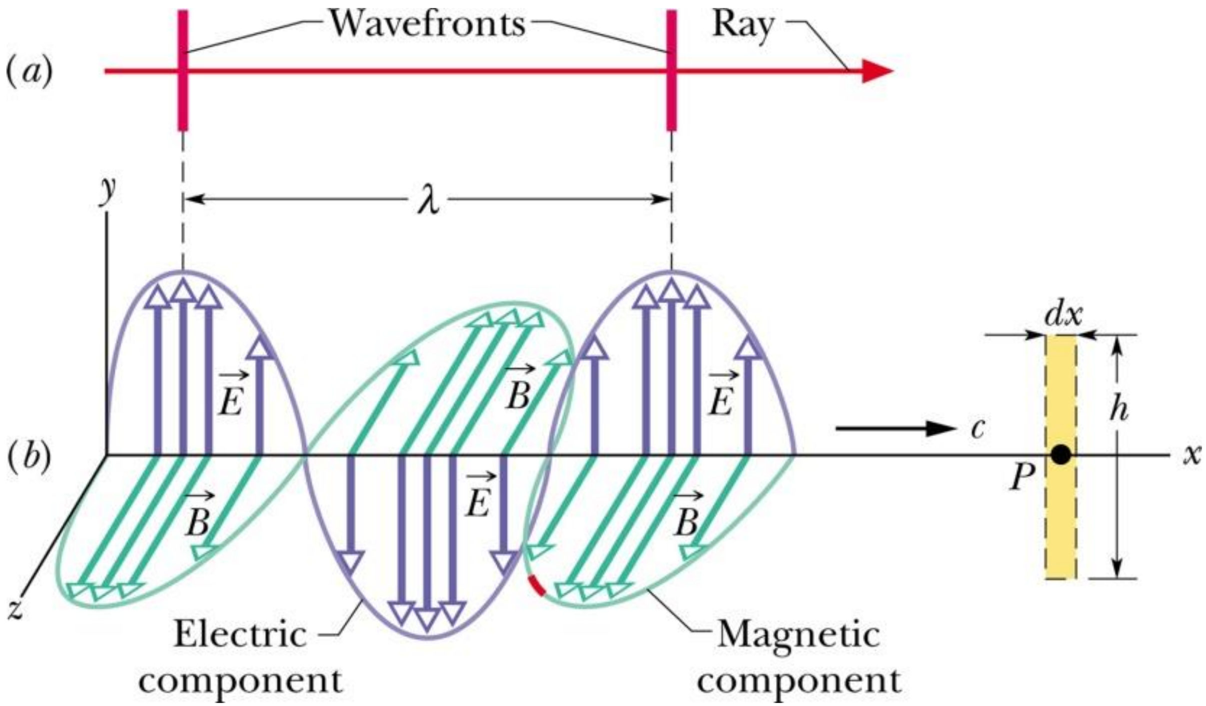
$\boxed{k_e = k_b, \quad \omega_e = \omega_b, \quad \phi = 2\pi n}$ och $\boxed{E_0 = cB_0}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} E_y &= E_0 \sin(kx - \omega t) \\ B_z &= B_0 \sin(kx - \omega t) \end{aligned}}$$

Inte två vågor, utan **en elektromagnetisk våg**!

Notera att $$\vec{E} \times \vec{B} = (E_y \hat{j}) \times (B_z \hat{k}) = E_y B_z \hat{i}$$

pekar i vågens
propageringsriktning



Energitransport i en EM-våg

Energidensiteten i el- och magnetfältet: $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ och $u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$

Styrkan i el- och magnetfältet proportionella mot varandra:

$$E_y = cB_z \quad \text{och} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow$$

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_y^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0 c^2}\right)(cB_z)^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = u_B$$

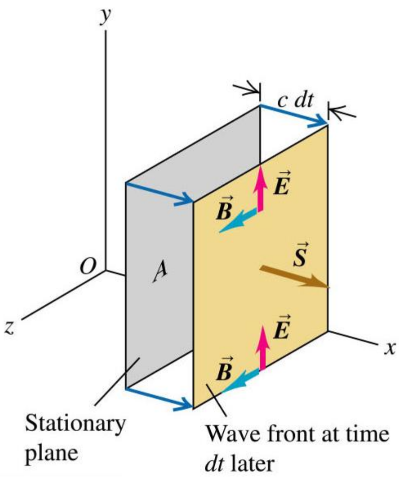
Energidensiteten i el- och magnetfältet lika stort!

Energidensiteten i en elektromagnetisk våg: $\boxed{u = \varepsilon_0 E^2}$

Poynting vektorn

En elektromagnetisk planvåg passerar ett stationärt plan med arean A

Volymen mellan planet och vågen innehåller energi:



$$dU = u\,dV = (\varepsilon_0 E^2)(Ac\,dt)$$

Energiflödet per tidsenhet:

$$\boxed{S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 c E^2}$$

Då E och B proportionella: $S = \dfrac{EB}{\mu_0} \Longrightarrow \boxed{\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}}$

Poynting vektorn,
$|\vec{S}|$ = intensiteten,
rörelseriktning

$[S]$ = W/m^2

Intensiteten i en harmonisk våg $\quad S = \dfrac{1}{\mu_0}E_0 B_0 \sin^2(kx - \omega t)$

Poynting vektorns riktning ändrar inte!

Medelintensiteten:

$$S_{avg} = \frac{1}{2\mu_0}E_0 B_0 \quad \text{eller}$$

$$S_{avg} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c \qquad S_{avg} = \frac{cB_0^2}{2\mu_0}$$

Elektromagnetisk rörelsemängd och strålningstryck

Elektromagnetiska vågor kommer att föra med sig rörelsemängd enligt

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2}$$

Vågen rör sig genom en area A under tiden dt:

$dV = Ac\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}}$ överföringstakten av rörelsemängd per enhetsarea och tid

Enligt Newton II: $F = \dfrac{dp}{dt}$ och definitionen för tryck $p_{rad} = \dfrac{F}{A}$

Strålningstryck

$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{S}{c}$$ Fullständigt absorberande yta

OBS! TRYCK!

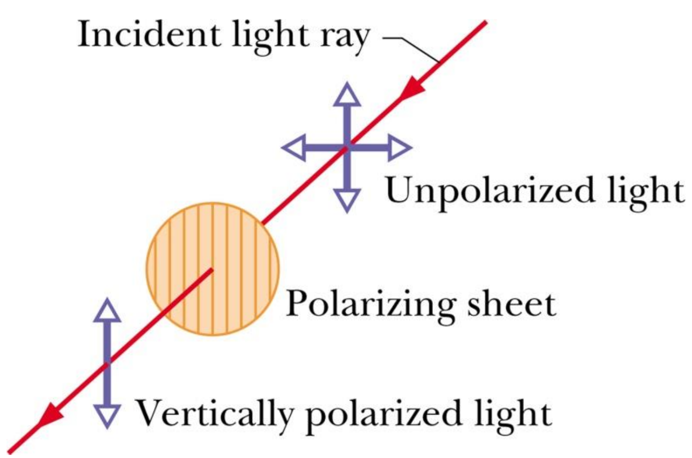
$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{2S}{c}$$ Fullständigt reflekterande yta

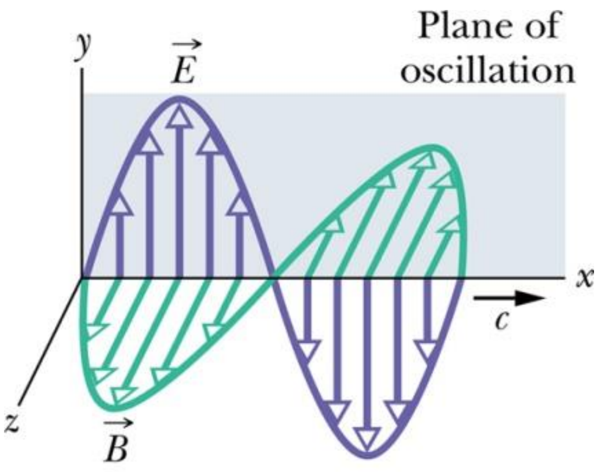
ELEKTROMAGNETISK VÅGRÖRELSE

- Polarisation
- Brytning och reflektion
- Totalreflektion
- Dispersion
- Polarisation genom reflektion

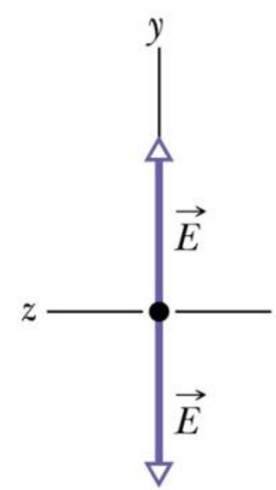
Polarisation

- En vågs polarisation karakteriserar riktningen i vilken vågen oskillerar.
- Enklaste typen av polarisation är lineär eller plan polarisation
- Polarisationsriktningen definieras som elfältets oscillationsplan.
- I en godtycklig punkt längs en planpolariserad våg oskillerar elfältet längs en fixerad linje.
- Ljus från en vanlig ljuskälla, t.ex. en glödlampa, är opolariserat.
- Opolariserat ljus kan polariseras genom att låta det passera genom en polarisator:





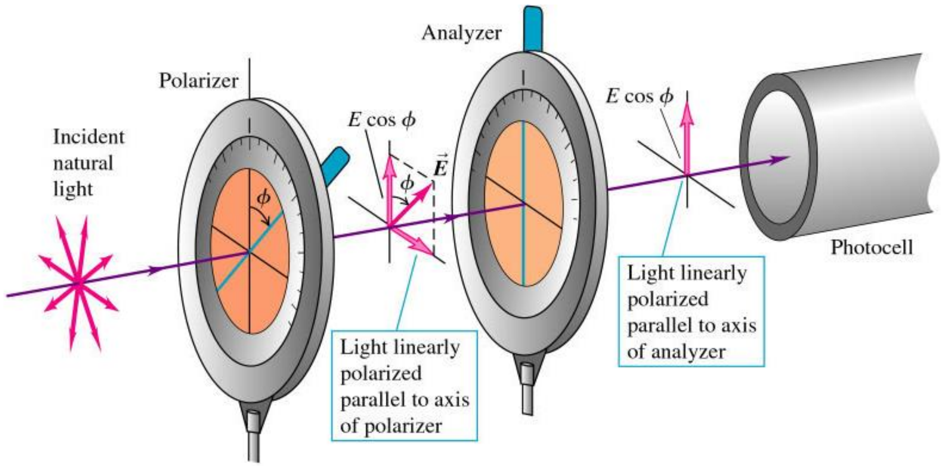
(a)



(b)

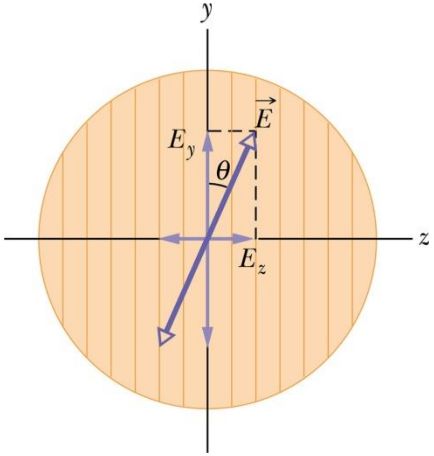
Mätning av polarisation

Ljus kan polariseras genom att låta det gå genom en polarisator.



Intensiteten ut ur analysatorn:

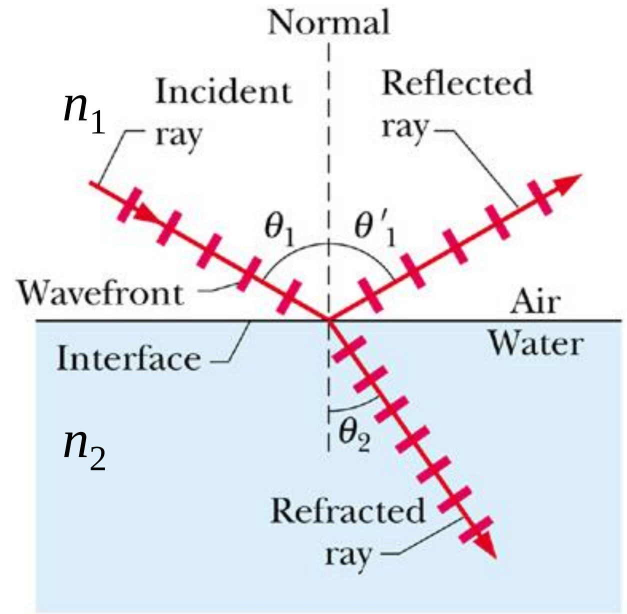
Malus lag $$\boxed{I = I_0 \cos^2 \theta}$$



Brytning och reflektion

Brytningsindex för ett material:
c = ljusets hastighet i vakuum
v = ljusets hastighet i materialet

$$\boxed{n = \frac{c}{v}}$$



Brytnings- och reflektionlagarna

Följande kan observeras experimentellt:

1. Den reflekterade strålen och den brutna strålen ligger i ett plan som definieras av den infallande strålen och normalen till gränsytan.
2. Infallsvinkeln är lika stor som reflektionsvinkeln för alla materialpar och våglängder (θ_1=θ_1').
3. Förhållandet mellan sinus av vinklarna θ_1 och θ_2 är lika med inversen på förhållandet mellan ämnenas brytningsindex, eller

$$\boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$$ Snells lag

Om $n_1/n_2 > 1$ är $\theta_2>\theta_1$ och ljuset bryts från normalen.
Om $n_1/n_2 < 1$ bryts ljuset mot normalen.
Om $n_1>n_2$ säger man att ämnet 1 är optiskt tätare än ämnet 2 som är optiskt tunnare.

Ljusets frekvens ändrar **INTE** då det passerar från ett material till ett annat.

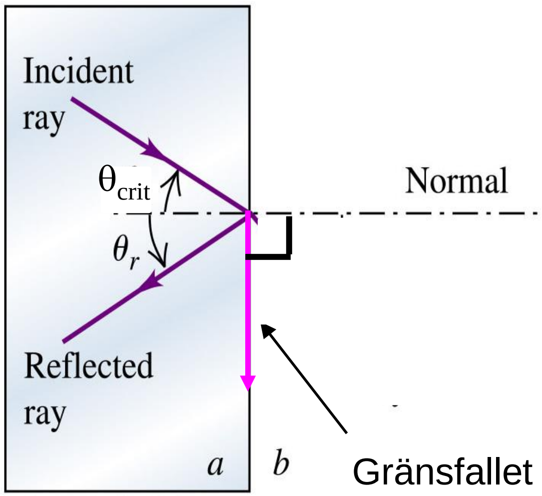
Våglängden ändrar ($v = \lambda f$) $\Longrightarrow$ $\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}}$

Totalreflektion

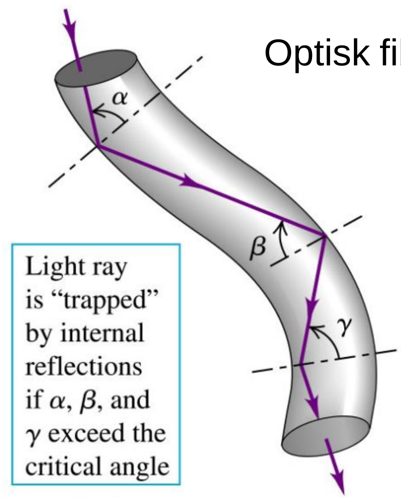
Vid strålgång från ett optiskt tätare till ett tunnare ämne är brytningsvinkeln större än infallsvinkeln. Om brytningsvinkeln är större än 90º kommer ingen brytning att ske, utan strålningen reflekteras. Fenomenet kallas totalreflektion.

Gränsvinkeln för totalreflektion:

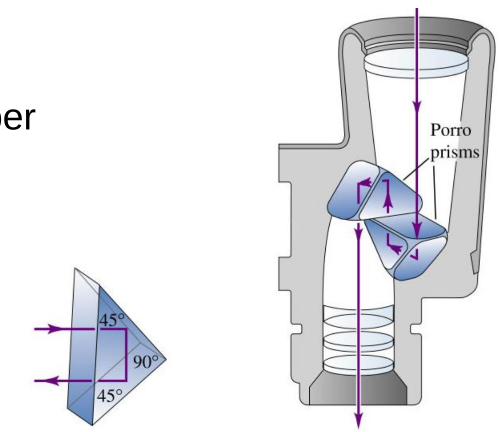
$$\boxed{\sin\theta_{\text{crit}} = \frac{n_b}{n_a}}$$



Gränsfallet för totalreflektion



Optisk fiber



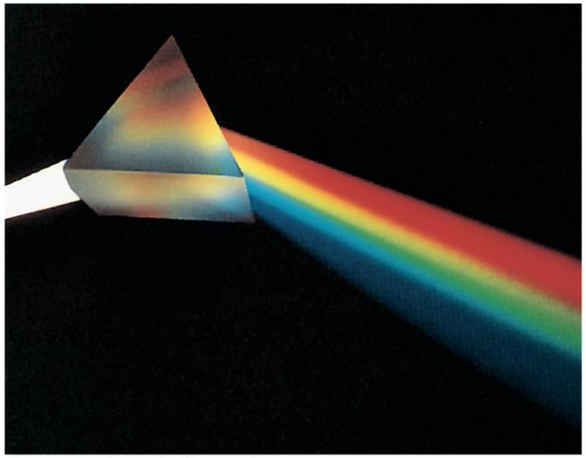
Ett *Porro* prisma

Dispersion

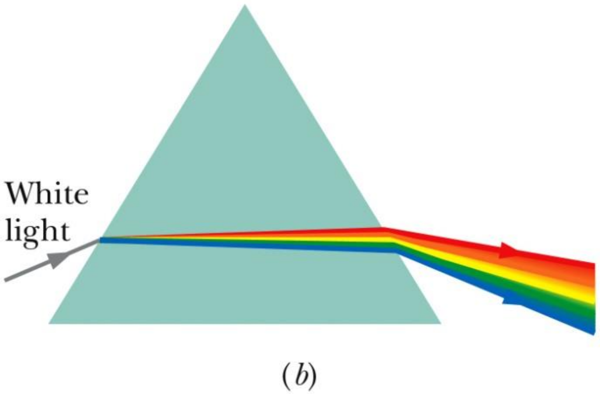
Våghastighet och brytningsindex beror av våglängd:

$$\boxed{v = v(\lambda) \qquad n = n(\lambda)}$$

Prisma

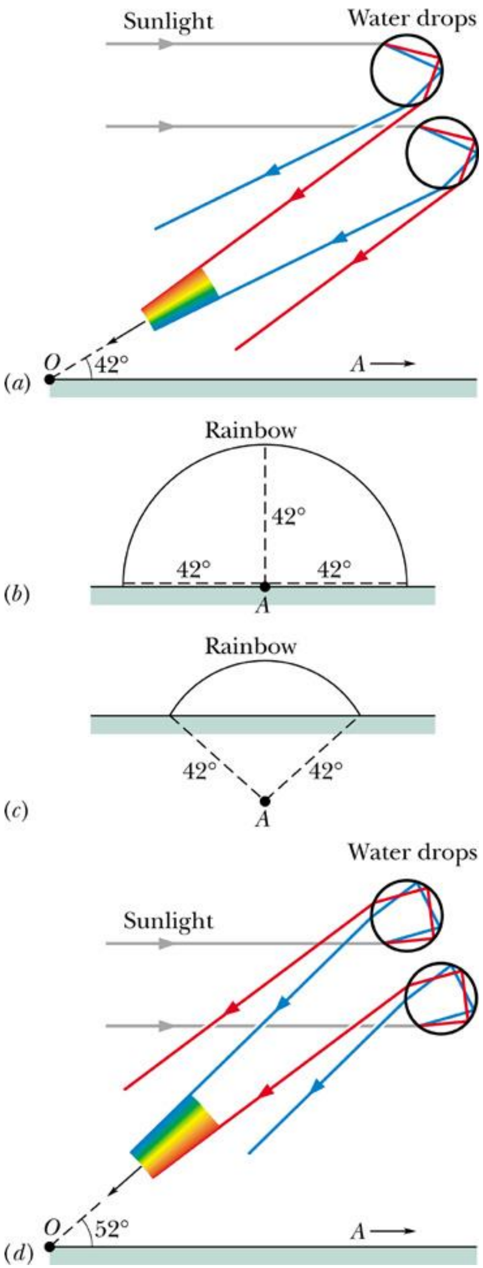


Courtesy Bausch & Lomb



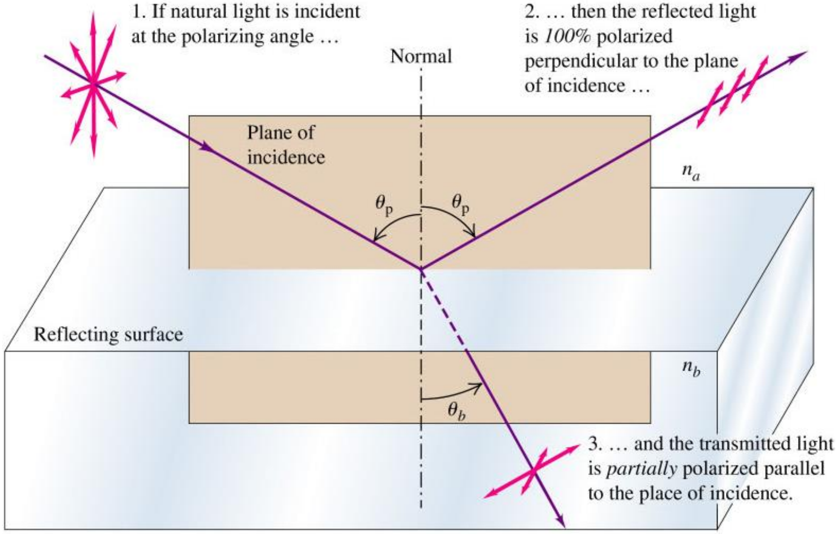
halliday_10e_fig_33_20b

Hur regnbågen uppstår



Polarisation genom reflektion

Betrakta en stråle opolariserat ljus som träffar gränsytan mellan två ämnen:



Om permeabiliteten för de två ämnena är $\mu_a = \mu_b = \mu_0$ fås ur Maxwells ekvationer reflektions- och transmissionskoefficienterna,
(förhållanden mellan de reflekterade respektive brutna fälten till det inkommande fältet):

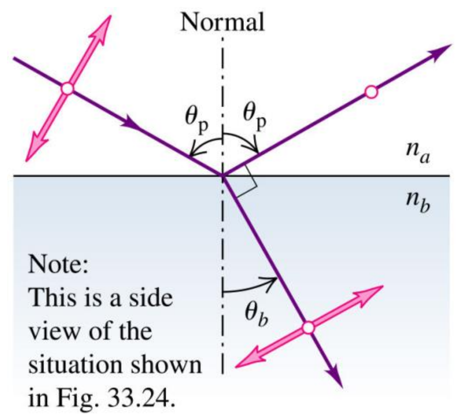
$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_P - \theta_b)}{\tan(\theta_P + \theta_b)} \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \infty \Rightarrow r_{\parallel} = 0$$

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_P - \theta_b)}{\sin(\theta_P + \theta_b)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2\cos\theta_P \sin\theta_b}{\sin(\theta_P + \theta_b)\cos(\theta_P - \theta_b)}$$

$$t_{\perp} = \frac{2\cos\theta_P \sin\theta_b}{\sin(\theta_P + \theta_b)}$$

Den reflekterade strålen är polariserad vinkelrätt mot infallsplanet, oberoende av den infallande strålens polarisering.



$$n_a \sin\theta_P = n_b \sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \theta_P\right)}_{\theta_b} = n_b \cos\theta_P$$

$$\boxed{\tan\theta_p = \frac{n_b}{n_a}}$$

Brewsters lag