

## ELEC-C1230 Säättötekniikka (5 op)

Kevät 2023

Luennoitsija: Kai Zenger (etunimi.sukunimi@aalto.fi)

Assistentit: Amin Modabberian, Alekski Lankinen, Fernanda Jokinen, Alwar de Wit, Hilda Palva, Zhibin Yan

Pääassistentti Amin Modabberian (etunimi.sukunimi@aalto.fi)  
Yhteyskanavat yleisesti : sähköposti ja kurssin MyCourses-sivujen keskustelukanava. Luennot, laskuharjoitukset, laskutuvat.

Luku 1: Esittely, johdanto, dynaamiset mallit ja rakenteet, lohkokaaviot, säädön periaatteet



1

## ELEC-C1230 Säättötekniikka (5 op)

- Sisältö
  - Analoginen (jatkuva-aikainen) säätö, dynaamiset järjestelmät, PID-, taajuus- ja tilasäätimet.
  - Digitaalinen (tietokone) säätö, digitaaliset järjestelmät, lyhyt johdatus diskreettiaikaisiin säätömenetelmiin ja säätimiin.
  - Säättäjien suunnittelu, viritys ja analyysi. Simulointi suunnittelun apuna.
- Kurssi toteutetaan kokonaan lähiopetuksena (luokkaopetuksena).
- Luennot
  - Keskiviikkoisin klo 10.15-12.00, AS2
  - Luennoitsijana toimii Kai Zenger.
    - [kai.zenger\(at\)aalto.fi](mailto:kai.zenger@aalto.fi), Maarintie 8 (TuAs), huone 3574.
  - Luentokalvot tulevat kurssisivuille kurssin edetessä.



2

## Laskarit, Laskutuvat, Tuntitehtävät (Quiz) ja Kotitehtävät (KT)

### Laskuharjoitukset ja Laskutuvat:

Jokaiseen luentoan liittyy **laskuharjoitus, jota ei arvostella**: torstaisin klo 14:15-16, sali AS2. Assistentin johdolla lasketaan tehtäviä. Näiden lisäksi kurssissa julkaistaan ylimääräisiä laskutehtäviä ratkaisuihin itsenäistä harjoittelua varten. Nämä tehtävät kuuluvat myös kurssimateriaaliin. Harjoitustehtävät ja malliratkaisut tulevat kurssisivuille.

**Laskutuvat** ovat tilaisuuksia, joissa saa apua kotitehtäviin mutta joissa voi myös kysyä laskuharjoituksista. Ne järjestetään torstaisin klo 16:15-18, salissa TU3 (1171-1172) sekä tiistaisin klo 12:15-14, D-Sali (Y122), kandidalo.

- Ensimmäinen laskuharjoitus on torstaina **12.1** klo 14:15-16 salissa AS2. Ensimmäinen laskutupa on torstaina **19.1** klo 16:15-18 salissa TU3. Toinen laskutupa on tiistaina **24.1** klo 12:15-14 salissa D (kandidalo).



3

## Laskarit, Laskutuvat, Tuntitehtävät (Quiz) ja Kotitehtävät (KT)

- Tuntitehtävä (Quiz) ratkaistaan ja palautetaan portaaliin sähköisesti aikataulussa. **Arvostellaan**. Tuntitehtävä liittyy edelliseen luentoan Quiz avautuu 24 tuntia ennen luennon alkua ja palautuksen aikaikkuna sulkeutuu 15 minuuttia ennen luennon alkua. **(Poikkeus: Ensimmäisen luennon 11.1 Quiz julkaistaan 11.1 ja palautusaikaa on 48 tuntia.)**
- Kurssissa aikaisemmin käytettyä Slack-kanavaa ei enää käytetä. Opetustilaisuuksien lisäksi kysymyksiä voi esittää sähköpostitse sekä kurssin MC-sivujen keskustelukanavalla.



4

## Laskarit, Laskutuvat, Tuntitehtävät (Quiz) ja Kotitehtävät (KT)

- Lisäksi **arvostellaan** erilliset kotitehtävät (KT), joita on kuusi kappaletta. Ne julkaistaan kurssisivuilla ja palautetaan sähköisesti aikataulussa. Näiden paino on aika suuri, ja ne ovat arvostelussa oleellisia (kts. tarkempi määrittely jäljempänä). Kurssin läpäiseminen pelkällä tentillä tai välikokeilla on mahdollista mutta vaikeaa, ja arvosana jää heikoksi. Ensimmäinen kotitehtävä julkaistaan toisella luentoviikolla.
- Quizzit ja kotitehtävät on palautettava MC-portaaliin annetun aikataulun puitteissa. **Järjestelmä ei hyväksy myöhästyneitä palautuksia. Niitä ei myöskään vastaanoteta eikä arvostella millään muilla palautusmenettelyillä jätettyinä (esim. sähköpostitse).**

## ELEC-C1230 Säättötekniikka (5 op)

- Kurssin suorittaminen
  - Kahdella välikokeella (VK) tai tentillä (T), tuntitehtävillä (Quiz) ja kotitehtävillä (KT).
  - 1. välikoe torstaina 23.2.2023 klo 13:30-16:30, AS2, TU2. 2. välikoe ja kurssitentti torstaina 20.4.2023 klo 13:30-16:30, AS2, TU2.
  - 2. välikokeen yhteydessä voi tehtävät nähtyään valita tekeekö tentin vai välikokeen. Vain yhden kokeen voi koetilaisuudessa tehdä. Välikokeita ei voi uusia.
  - Rästitenttejä järjestetään myöhemmin ilmoitettavina aikoina. Rästitentteihin on ilmoitauduttava. Välikokeisiin (tai 2. välikokeen yhteydessä pidettävään tenttiin) ei tarvitse ilmoittautua. Ensimmäinen rästitentti ma 8.5.2023 klo 16:30-19:30.

## ELEC-C1230 Säättötekniikka (5 op)

- Tuntitehtävistä (Quiz) voi saada max 1p. / luento. Max. 12 p.
- Kotitehtävistä (KT) voi saada max 6 p./kotitehtävä. Max. 36 p.
- Kummassakin välikokeessa (VK) on neljä tehtävää a 6 p. max. Yhteensä Max. 24+24 p.=48 p.
- Tentissä (T) on viisi tehtävää a 6 p. max. Yhteensä Max. 30 p.
- Arvosanan määräytymisen painot: Tentti/välikokeet = 50 %, kotitehtävät = 40 %, tuntitehtävät (Quiz) = 10%.
- Välikoe-, tunti- ja kotitehtävipisteet ovat voimassa vuoden ajan, kunnes kurssin luennot alkavat seuraavan kerran.

## ELEC-C1230 Säättötekniikka (5 op)

Arvostelu. Lasketaan suoritusprosentti

$$AS\% = \left\{ \frac{Quiz}{12} \cdot 10 + \frac{KT}{36} \cdot 40 + \max \left[ \frac{VK1+VK2}{48} \cdot 50, \frac{T}{30} \cdot 50 \right] \right\}$$

(Kurssipalautteen antamisesta saa ylimääräisen bonuksen 3 AS%).

Arvostelu: 48% =1, 60% =2, 70%=3, 80% =4, 90% =5.

## ELEC-C1230 Säättötekniikka (5 op)

Luentoja ja niihin liittyviä Quiz-tehtäviä on 12 kpl.

- Tavallisia laskuharjoituksia, joihin ei sisälly palautuksia ja joita ei arvostella, on samoin 12 kpl.
- Erikseen julkaistavia kotitehtäviä on 6 kpl., ja kustakin voi saada maksimissaan 6 p. Kotitehtäviä voi ratkaista **yksin tai ryhmässä**, ihan miten haluaa. **Jokainen kirjoittaa kuitenkin oman ratkaisudokumentin ja palauttaa sen MyCoursesiin.** Tarkat ohjeet löytyvät kotitehtävän tehtäväpaperista. Kotitehtävän julkaiseminen ilmoitetaan aina kurssin tiedotuksessa (MyCourses).
- Kahden välikokeen summa tai tentti huomioidaan edellisellä sivulla olevan kaavan mukaan siten, että parempi suoritus aina otetaan huomioon. Jos on esimerkiksi suorittanut vain yhden välikokeen ja ei tenttiä, niin yllä oleva kaava antaa silti arvostelun. Minimisuoritusvaadetta ei siis missään kohdassa ole.

## ELEC-C1230 Säättötekniikka (5 op)

Opintomateriaalia oman tarpeen ja kiinnostuksen mukaan

- Kirja: R.C.Dorf, R.H. Bishop: Modern Control Systems, Pearson Education International, mieluiten 12. – 14. painos. (Ainakin painokset 12 ja 13 löytyvät vapaasti netissä).
- Luentokalvot ja laskuharjoitukset ratkaisuihin löytyvät kurssin kotisivulta
- Huom. Luentokalvot ovat suhteellisen laajat ja omatoimiseen opiskeluun soveltuvat. Luennoilla niitä ei käydä kaikkia läpi, vaan keskitytään tärkeimpiin asioihin ("punainen lanka"). Dorf, Bishop on erinomainen oppikirja, mutta laaja ja sisältää paljon sellaista, mitä kurssilla ei käydä läpi. Kirjan lukeminen luku luvulta vaatii paljon aikaa. Kirjaa suositellaan käytettäväksi apuna oman kiinnostuksen mukaan. Kannattaa lukea ne kohdat, jotka luennoilla on käsitelty, sillä tämä kattaa kurssin sisällön.

## ELEC-C1230 Säättötekniikka (5 op)

- The lectures and exercises will take place in Finnish, but the course can be done in English also:

- The course book is in English (R.C.Dorf, R.H. Bishop: Modern Control Systems, Pearson Education International, preferably 12th - 14th edition). At least eds. 12 and 13 are freely available in the net.
- The homework problems, mid-term exams and full exams will be available in English – if you contact the lecturer one week before the release date (exam date) and ask for English versions.
- Both the lecturer and the teaching assistants can be contacted – should you require assistance.

## Lukuohje

Kalvomateriaali on laaja ja itseopiskeluun soveltuva. Kaiken tarkkaan lukemiseen ja omaksumiseen voi kuitenkin mennä melkoisesti aikaa, samoin kuin oppikirjan (Dorf ja Bishop) lukemiseen. Lukuohjeessa annetaan ohjeita siitä, mikä kussakin luvussa on keskeistä materiaalia.

### Johdanto\_Luku1\_ ja\_2:

- Tutustu kurssin mekanismiin (opetus, palautukset, kokeet, arvosteluperiaatteet). Suunnittele oma ajankäyttösi ja aikataulusi kurssin vaatimuksiin nähden.
- Käy kursorisesti läpi johdantona oleva säiliön pinnankorkeuden säätöesimerkki; tee selväksi itsellesi ohjauksen ja takaisinkytketyn säädön välinen ero. Huom. esimerkki on erittäin opettavainen, mutta kokonaisuudessaan aika laaja ja voit huolelta sivuuttaa sen loppuosan ilman, että siitä olisi haittaa myöhemmin.
- Tutustu hieman historiallisiin säätimiin, esimerkiksi Wattin kuvernööriin ja vesikelloon.
- Katsele kurssisivulla olevat Matlab/Simulink-ohjelmiston opetusvideot. Ohjelmistoa käytetään erityisesti kotitehtävissä – jo ensimmäisestä lähtien.

## Kurssin oleellinen sisältö, viittaukset (suuntaa-antavia): Dorf, Bishop, Modern Control Systems, 12th ed.)

- Dynaamiset ja staattiset mallit (2.1-2.3)
- Laplace-muunnos (2.4)
- Siirtofunktio, tilaesitys, mallien väliset yhteydet (2.5-2.6, 3.1-3.7)
- Lohkokaavioalgebra, suljettu säätöpiiri, säätöpiirin suorituskyky (2.6), (5.1-5.6)
- Tila- ja tulo-lähtöstabiilisuus, Routhin kaavio (6.1-6.4)
- PID-säädin (7.6)
- Tilamenetelmät: saavutettavuus, tarkkailtavuus, tilatakaisinkytketty säätö, tilatarkkailija (11.1-11.6)
- Taajuustason esitys, Bodin ja Nyquistin diagrammit (8.1-8.5)
- Vahvistus- ja vaihevarat, Nyquistin stabiilisuuslause (9.1-9.5)
- Suorituskyvyn mitat, taajuuskompensaattorit (10.1-10.4, 10.8)
- Johdatus digitaalisäätöön eli diskreettiaikaiseen säätöön (13.1-13.3)
- Z-muunnos, (pulssin)siirtofunktio (13.4)
- Diskreetin järjestelmän stabiilisuus
- Näytteenotto, jatkuvien säädinten diskreetit approksimaatiot

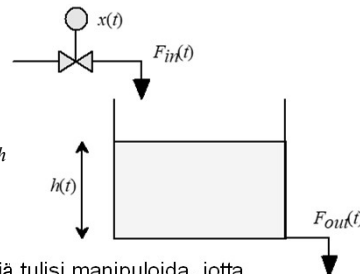
## Mitä säätötekniikka on?

- Control Systems Engineering
  - Laaja näkemys:
    - Systemien sekä niiden hallintamekanismien ja -rakenteiden analysointia, suunnittelua ja toteuttamista
  - Suppea näkemys:
    - Negatiivisen takaisinkytkennän (säätösilmukan) tutkimus
- Systemi
  - "Any definable set of components."
  - Järjestelmä, joka määrittää suureiden väliset riippuvuudet

## Esimerkki 1.

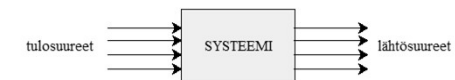
- Tarkastellaan vesisäiliön pinnankorkeuden hallintaa

- säiliön tuloventtiiliä  $x$  avataan tai suljetaan, jolloin tulovirtaus  $F_{in}$  vastaavasti kasvaa tai pienenee
- tavoitteena on, että pinnankorkeus  $h$  käyttäytyisi halutulla tavalla
- säiliön poistovirtaus  $F_{out}$  on tuntematon häiriö

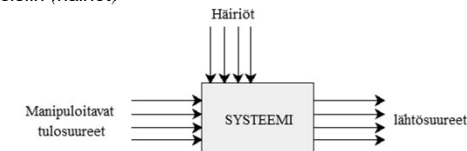


- Säätötekniikka kertoo, miten venttiiliä tulisi manipuloida, jotta pinnankorkeus käyttäytyisi halutusti jokaisella ajanhetkellä – vaikka säiliöön vaikuttaa merkittäviä häiriöitä.
  - Perussäännöt ovat:
    - Kun pinnankorkeus on liian alhainen niin tuloventtiiliä avataan
    - Kun pinnankorkeus on liian korkea niin tuloventtiiliä suljetaan

## Lohkokaaviot



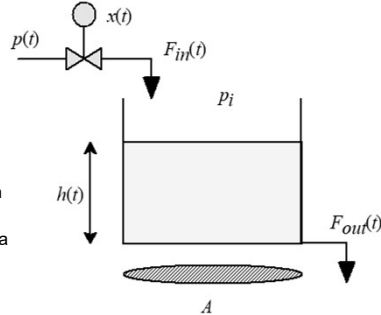
- Nuolissa kulkevat informaatiota signaalit ja lohkoissa prosessoidaan informaatio toiseksi informaatioksi
- Lohkoon tulevia signaaleja ovat herätteitä (tulosuureita) kun taas lohkoista lähtevät signaalit ovat vasteita (tai lähtösuureita)
- Lohkokaavioista selvittää systeemin kausaaliiteetti eli syy-seuraussuhteet
- Lohkojen tulosuureet jaetaan usein manipuloitaviin ja ei-manipuloitaviin suureisiin (häiriöt)



## Esimerkki 1.

- Tehdään lohkokaavio edelliselle esimerkille seuraavilla oletuksilla

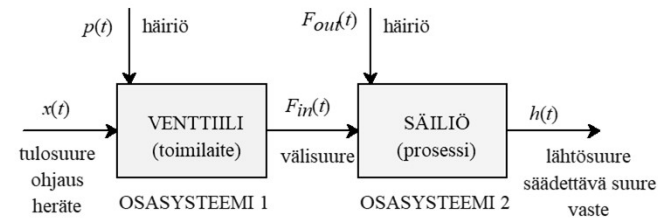
- Oletetaan venttiilille yksinkertainen staattinen malli (virtaus on suoraan verrannollinen paine-eron neliöjuureen ja venttiin avaukseen)
- Virtaukset  $F_i$  ovat tilavuusvirtauksia
- Tulovirtaus purkautuu ilmanpaineeseen  $p_i$  (vakio)
- Säiliö on suoraseinäinen (poikkipinta-ala on  $A$ )
- Syöttöpaineen  $p$  vaihtelut ovat häiriöitä
- Säiliö sisältää puhdasta vettä (kokoonpuristumaton neste – ei tiheysvaihteluita)



## Esimerkki 1. -jatkoa

- Selvitetään aluksi muuttujien välinen kausaliteetti – eli mitkä muuttujat ovat tulo- ja mitkä lähtösuureita

- Lähtösuure on pinnankorkeus  $h$ , johon kaikki muuttujat vaikuttavat
- Pinnankorkeuteen vaikuttaa suoraan tulo- ja lähtövirtaukset  $F_{in}$  ja  $F_{out}$  sekä tulovirtauksen  $F_{in}$  kautta välillisesti venttiin aukeama  $x$  ja syöttöpaine  $p$ .



## Esimerkki 1. -jatkoa

- Tarkastellaan, mitä lohkot sisältävät

- Massatase: Varastoituva massa = tuleva massavirta – lähtevä massavirta
- Vakiotheyksisillä systeemeillä massatase yksinkertaistuu tilavuustaseeksi

$$\frac{dm(t)}{dt} = Q_m(t) - Q_{out}(t), \quad \begin{cases} m(t) = \rho \cdot V(t) \\ Q(t) = \rho \cdot F(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \frac{dV(t)}{dt} = \rho \cdot F_{in}(t) - \rho \cdot F_{out}(t) \Rightarrow \frac{dV(t)}{dt} = F_{in}(t) - F_{out}(t)$$

- Tilavuudesta päästään helposti pinnankorkeuteen, ottamalla säiliön poikkipinta-ala huomioon

$$V(t) = A \cdot h(t)$$

$$A \frac{dh(t)}{dt} = F_{in}(t) - F_{out}(t) \Rightarrow \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} (F_{in}(t) - F_{out}(t))$$

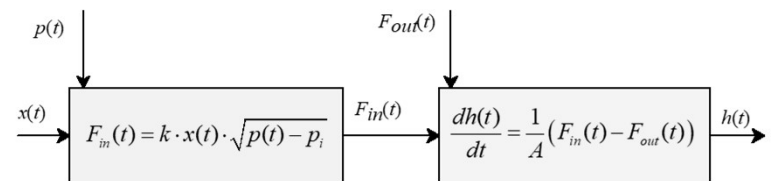
## Esimerkki 1. -jatkoa

- Venttiilille saadaan yksinkertainen staattinen riippuvuus

$$F_{in}(t) = k \cdot x(t) \cdot \sqrt{p(t) - p_i}$$

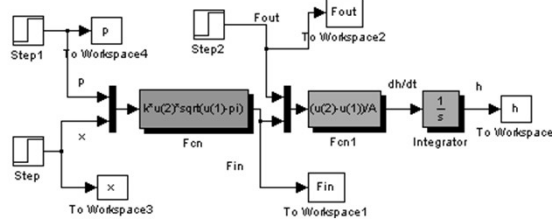
- $k$  on purkauskerroin, joka määrittelee virtauksen riippuvuuden paine-eroon ja venttiin avautumaan nähden

- Kokonaislohkokaavioksi saadaan



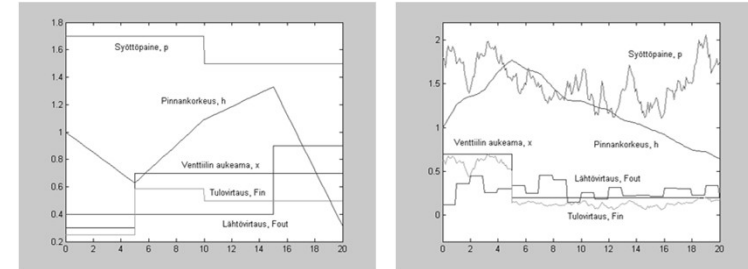
## Esimerkki 1. -jatkoa

- Kehitetty lohkoavaio sopii hyvin esimerkiksi simulointiin. Tehdään MATLAB/Simulink-malli ja tutkitaan miten säiliön pinnankorkeus käyttäytyy eri tulosuureilla ja parametreilla
  - Oletetaan, että parametreille pätee:  $A = 2\text{m}^2$ ,  $k = 1\text{m}^3\text{h}^{-1}\text{atm}^{-0.5}$ ,  $p_i = 1\text{atm}$
  - Kokeillaan aluksi askelmaisia tulosuureiden muutoksia



## Esimerkki 1. -jatkoa

- Askelherätteiden jälkeen kokeillaan realistisempia, kohinaisia herätteitä
  - Syöttöpaineen vaihtelut ovat ryömivää kohinaa ja lähtövirtaus muuttuu satunnaisesti tunnin välein



## Lähtösuureen hallintastrategiat

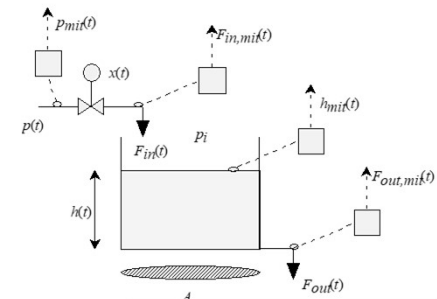
- Lähtösuureen hallintamekanismit jaetaan tavallisesti kolmeen perusluokkaan
  - Avoin ohjaus
  - kompensointi eli myötäkytkentä
  - varsinainen säätö eli (negatiivinen) takaisinkytkentä
- Näiden kolmen perusstrategian lisäksi käytetään runsaasti eri hallintamekanismien yhdistelmiä
  - Sekvenssissä eli vaihtelemalla hallintamekanismia tilanteen mukaan
  - Samanaikaisesti
    - Rinnakkain samalla hierarkiatasolla
    - Sisäkkäin eri hierarkiatasoilla
- Tarkastellaan eri mekanismeista esimerkin avulla

## Esimerkki 1. -jatkoa

- Kokeillaan, miten edellä esitetyt lähtösuureen hallintastrategiat sopivat esimerkkiprosessille
  - Kompensointi edellyttää mittausta syöttöpaineesta ja poistovirtauksesta
  - Takaisinkytketty säätö edellyttää mittausta pinnankorkeudesta

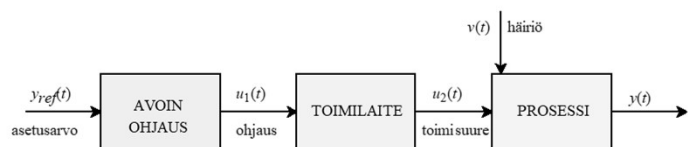
- Laitetaan mittarit paikoilleen

- Tässä yhteydessä ei puututa mittauslohkojen sisältöön - todetaan vain että mittauslohkojen tulona on todellinen mitattava suure ja lähtönä mittarin ilmoittama approksimaatio todellisesta suureesta.

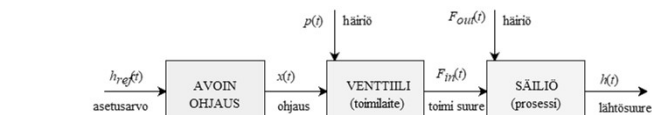


## Avoin ohjaus

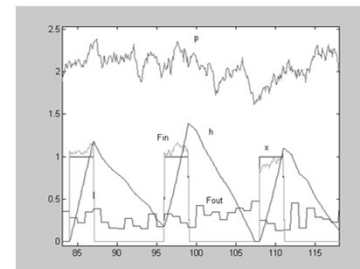
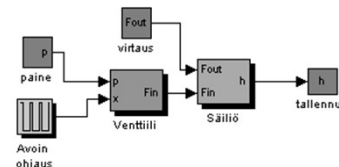
- Avointa ohjausta käyttämällä hallittavaa lähtösuuretta ei seurata lainkaan
  - Tyypillisesti komentosekvenssi
  - Ei edellytä mittauksia ... edullinen
  - Käytetään:
    - panosprosesseissa ja reseptipohjaisessa ajossa
    - systeemien hallituissa ylös- ja alasajoissa
    - Laajoissa, stabiileissa järjestelmissä kehittyneempien hallintamekanismien lomassa



## Esimerkki 1. -jatkoa – Avoin ohjaus

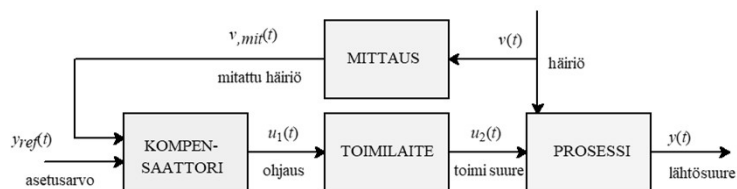


- Venttiili avataan joka kahdestoista tunti kolmen tunnin ajaksi
- Joskus säiliö ennättää tyhjentyä täyttöjen välillä - joskus ei



## Kompensointi eli myötäkyytkentä

- Kompensoinnilla pyritään poistamaan mitattavien häiriöiden vaikutukset jo ennen kuin ne näkyvät lähtösuureessa
  - Edellyttää mittauksia kompensoitavista häiriöistä
  - Edellyttää häiriöiden vaikutusten hyvää ymmärtämistä eli mallin tuntemista
  - Luonteeltaan ennakoiva

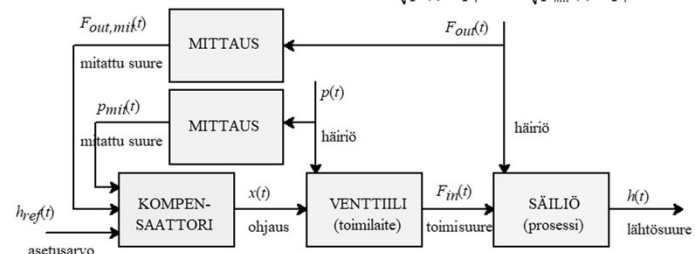


## Esimerkki 1. -jatkoa - Kompensointi

- Pinnankorkeus ei muutu (vaikka siihen vaikuttaa häiriöitä), jos tulovirtaus on jokaisella ajanhetkellä yhtä suuri kuin lähtövirtaus

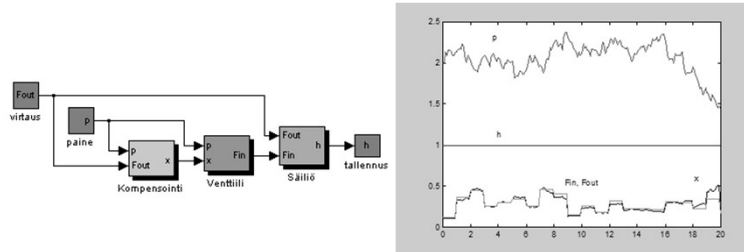
$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}(F_{in}(t) - F_{out}(t)) = 0 \Rightarrow F_{in}(t) = F_{out}(t)$$

$$\Rightarrow k \cdot x(t) \cdot \sqrt{p(t) - p_i} = F_{out}(t) \Rightarrow x(t) = \frac{F_{out}(t)}{k \cdot \sqrt{p(t) - p_i}} \approx \frac{F_{out,mit}(t)}{k \cdot \sqrt{p_{mit}(t) - p_i}}$$



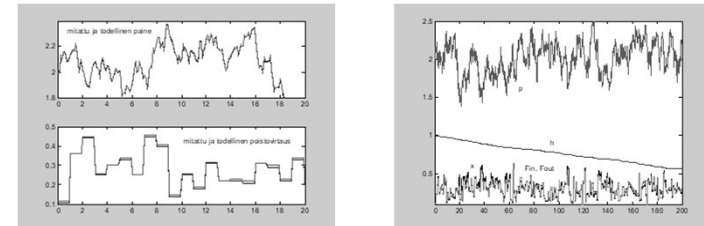
## Esimerkki 1. -jatkoa - Kompensointi

- Venttiiliä ohjataan nyt kompensoinnilla
  - Tehdään myötäkkyntä sekä poistovirtauksen että syöttöpaineen mittauksista
  - Kompensaattori kompensoi kaikki häiriöt ennen kuin pinnankorkeudessa nähdään niiden vaikutuksia



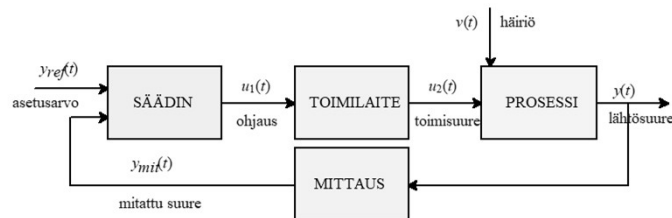
## Esimerkki 1. -jatkoa - Kompensointi

- Oletetaan nyt, että paineen ja virtauksen mittaauksissa on pyöristysvirheitä
  - Mitatuissa arvoissa on vain kaksi desimaalia
  - Pyöristysvirheiden johdosta pinnankorkeus ryömiä hallitsemattomasti – sitä ei mitata, joten ryömintää ei havaita
  - Tämän tyyppinen kompensointi ei toimi yksin ainoana hallintajärjestelmänä



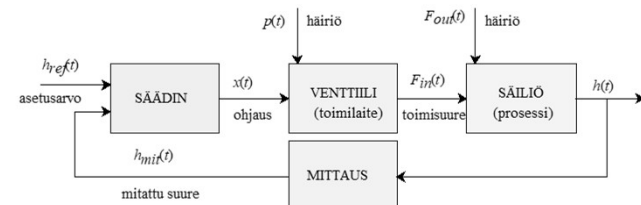
## Säätö eli takaisinkytkentä

- Takaisinkytketyllä säädöllä korjataan lähtösuureessa olevat poikkeamat
  - Edellyttää mittausta lähtösuureesta
  - Voi korjata häiriön vasta kun sen vaikutukset näkyvät lähtösuureessa
  - Stabiiloiva
  - Ei edellytä tarkan mallin tuntemista



## Esimerkki 1. -jatkoa - Takaisinkytkentä

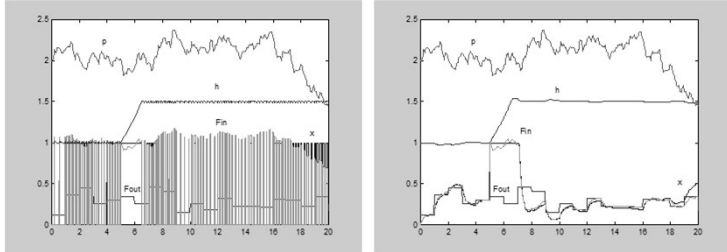
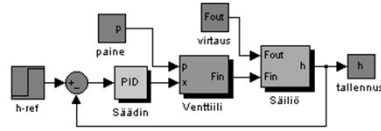
- Tässä tapauksessa säätimeksi voidaan valita esimerkiksi
  - Relesäädin
    - Heti kun pinnankorkeus ylittää sovitun yläraja-arvon, niin venttiili lyödään täysin kiinni ja heti kun alaraja-arvo alitetaan, niin venttiili avataan täysin auki
  - PID-säädin
    - Pehmeä ohjaussignaali (PID-säädin käsitellään kurssilla myöhemmin)





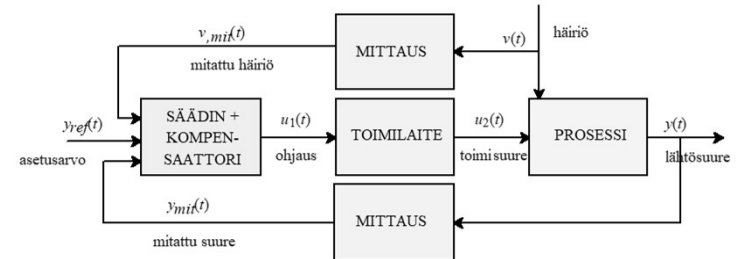
## Esimerkki 1. -jatkoa - Takaisinkytkentä

- Tehdään takaisinkytkentä pinnankorkeuden mittauksesta
- Säädetään pinnankorkeus arvosta 1 arvoon 1.5 ajanhetkellä 5h
- Relesäädöllä (vas.) systeemi jää värähtelemään – PID:llä (oik.) ei



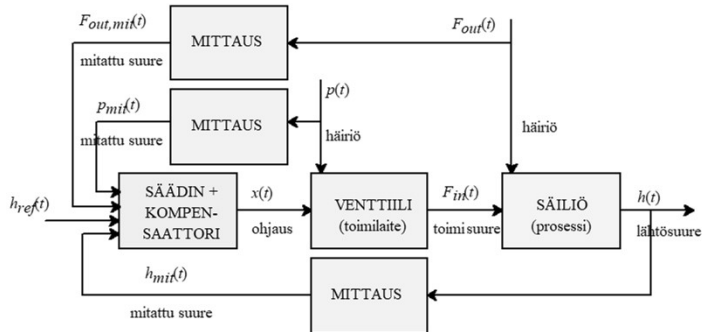
## Yhdistetyt strategiat

- Takaisinkytkennän ja myötäkytkennän yhdistäminen
  - Myötäkytketty häiriön kompensointi pyrkii ennakoimaan ja toimii jo ennen kuin häiriö vaikuttaa säädettävään suureen
  - Takaisinkytketty säätö korjaa tilanteen, mikäli lähtösuure poikkeaa kompensoinnista huolimatta halutusta arvosta



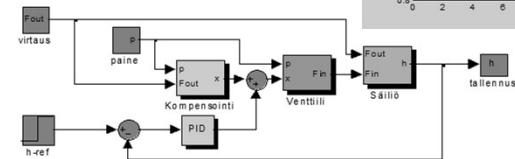
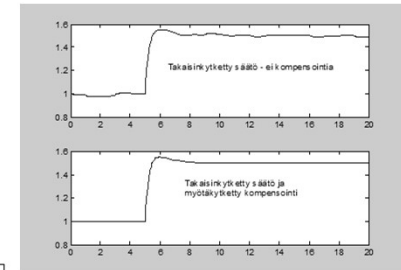
## Esimerkki 1. -jatkoa - Yhdistetyt strategiat

- Takaisinkytkennän ja myötäkytkennän yhdistäminen
  - Edellyttää mittauksia lähtösuureesta



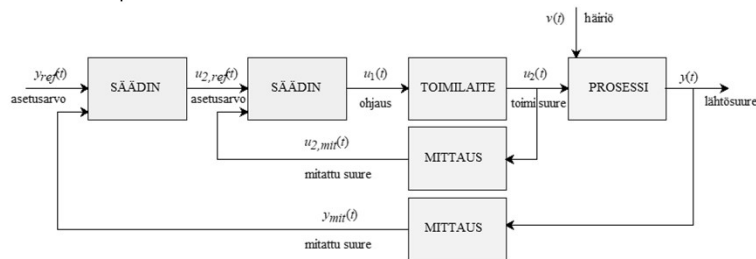
## Esimerkki 1. -jatkoa - Yhdistetyt strategiat

- Tehdään takaisinkytkentä pinnankorkeuden mittauksesta ja samanaikainen kompensointi syöttöpainesta ja poistovirtauksesta
- Säädetään pinnankorkeus arvosta 1 arvoon 1.5 ajanhetkellä 5h



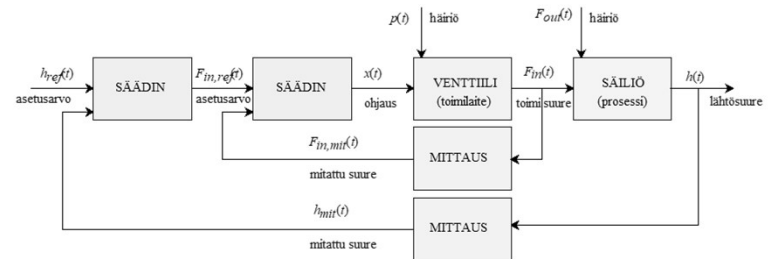
## Yhdistetyt strategiat

- Kaksi takaisinkytkettyä säädintä sisäkkäin, kaskadisäättö
  - Edellyttää mittauksia lähtösuureesta
  - Jotta kaskadisäädöstä olisi hyötyä, niin sisemmän silmukan olisi oltava huomattavan nopea ja siihen olisi tultava merkittäviä häiriöitä - verrattuna ulompaan silmukkaan



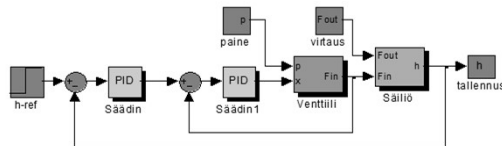
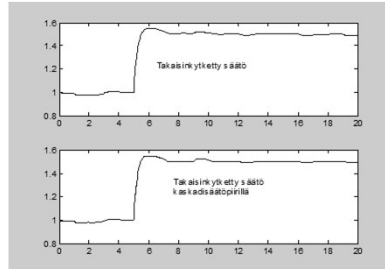
## Esimerkki 1. -jatkoa - Yhdistetyt strategiat

- Esimerkkiprosessissa tehdään sisempään säätösilmukkaan takaisinkytkentä tulovirtauksesta ja ulompaan silmukkaan pinnankorkeudesta
  - Edellyttää mittauksia molemmista suureista



## Esimerkki 1. -jatkoa - Yhdistetyt strategiat

- Tehdään takaisinkytkentä pinnankorkeuden mittauksesta ja sisempi takaisinkytkentä tulovirtauksesta
- Säädetään pinnankorkeus arvosta 1 arvoon 1.5 ajanhetkellä 5h
- Tässä prosessissa ei kaskadisäätimestä ole merkittävää hyötyä – hyöty saavutetaan suuremmilla häiriöillä ja pitemmillä viiveillä



## Historiallisia automaatteja

*"Jos jokainen instrumentti voisi tehdä itse oman työnsä, totellen ja ennakoiden muiden tahtoa... jos sukula osaisi kutoa ja plektra soittaa lyryä ilman ohjaavaa kättä, päälliköt eivät tarvitsisi palvelijoita..." (Aristoteles)*

- Ktesibioksen (n. 283-247eKr.) vesikello
  - Ensimmäinen dokumentoitu takaisinkytkentä
- Leonardo Da Vincin (1452-1519) paistiautomaatti
  - Häiriön kompensointi
- Cornelius Drebbelin (1572-1633) termostaatti
  - Ensimmäinen automaattinen lämmönsäätöjärjestelmä
- James Wattin (1736-1819) kuvernööri
  - Pyörimisnopeuden säätö

## Ktesibios (n. 283-247eKr.)

- Alexandriassa asunut kreikkalainen keksijä ja parturi
- Teki keksintöjään mm. Arsinoelle (Ptolemy II Philadelphosin sisar ja vaimo)
- Rakensi ilma- ja vesikäyttöisiä koneita (katapultti, urut, pumppu, kello)
- Vain pieniä osia kirjoituksista on jäljellä.



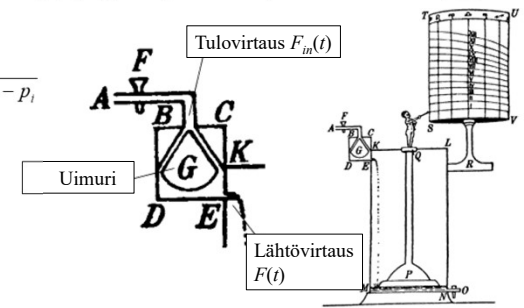
A? Aalto-yliopisto

41

## Ktesibioksen vesikello

- Ensimmäinen dokumentoitu takaisinkytkentä
  - Pinnankorkeuden säätö syöttösäiliössä kartiomaisen uimurin avulla (pinnan noustessa uimuri tukkii tuloputken ja pinnan laskiessa uimuri laskee avaten tuloputken)
  - Veden virtaus kelloon ( $F(t)$ ) riippuu syöttösäiliön pinnankorkeudesta ( $h(t)$ )

$$\begin{aligned}
 F(t) &= k \cdot x \cdot \sqrt{\Delta p(t)} \\
 &= k \cdot x \cdot \sqrt{(p_1 + \rho \cdot g \cdot h(t)) - p_1} \\
 &= k \cdot x \cdot \sqrt{\rho \cdot g \cdot h(t)} \\
 &= (k \cdot x \cdot \sqrt{\rho \cdot g}) \cdot \sqrt{h(t)} \\
 &= K \cdot \sqrt{h(t)}
 \end{aligned}$$

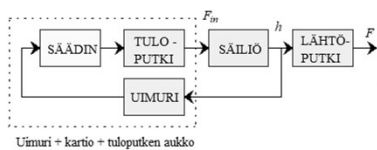


A? Aalto-yliopisto

42

## Ktesibioksen kello

- Säätopiirissä mittaus (uimuri), säädin (kartion dimensiot) ja toimilaite (tuloputken aukko) on fuusioitu yhteen elementtiin



Uimuri = kartio + tuloputken aukko



A? Aalto-yliopisto

43

## Leonardo Da Vinci (1452-1519)

- Syntyi Italiassa Firenzen lähistöllä
- Keksijä, taitelija, tiedemies
- Astui Milanon herttuan palvelukseen 1482
  - Veistoksia ja maalauksia
  - Sota- ja muita koneita
  - Luonnontieteiden (anatomia) tutkimusta
- Monia keksintöjä (ilma- ja vesikäyttöisiä), hammasrattaita – useat jäivät suunnitelmien asteelle (lentokone)

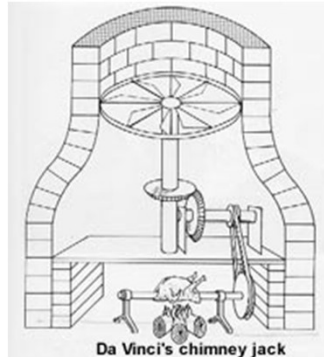


A? Aalto-yliopisto

44

## Da Vincin paistiautomaatti

- Liekki paistin alla saa aikaan kuuman ilmvirran, joka pyörittää turpiinisiivistöä savupiipussa. Turpiinin pyöräminen muutetaan hammasrattailla paistin pyörämiseksi
  - Kun liekki on suuri, niin paistia on käännettävä nopeasti, jottei se palaisi liikaa yhdestä kohdasta
  - Pienellä liekillä, paistia on käännettävä hitaasti, jotta se ennättäisi kypsyä



Da Vinci's chimney jack

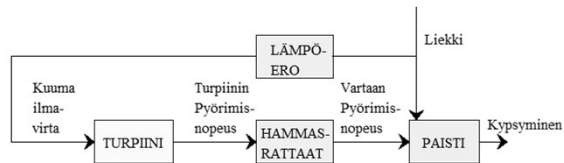
## Paistiautomaatti

- Kuvassa esitetty paistiautomaatti on 1700-luvulta. Edinburghissa, New Townissa sijaitsevassa entisöidyssä Georgian Housessa.



## Da Vincin paistiautomaatti

- Kyseessä on häiriön kompensointi
  - Liekin suuruus riippuu monesta ulkoisesta seikasta (kuten poltettavasta materiaalista) ja sen vaihtelut ovat systeemiin tulevia häiriöitä.
  - Paistin kypsyminen riippuu liekin suuruudesta ja ajasta, jonka se on liekin läheisyydessä (eli tässä tapauksessa pyörämisnopeudesta)
    - Liekki vaikuttaa suoraan positiivisesti kypsymiseen: Suuri liekki -> nopea paistin kypsyminen
    - Liekin vaihtelut myös kompensoidaan myötäkytkennällä: Suuri liekki -> nopea kuuma ilmvirta -> nopea turpiinisiivistön pyöräminen -> nopea paistin pyöräminen -> hidas paistin paikallinen kypsyminen



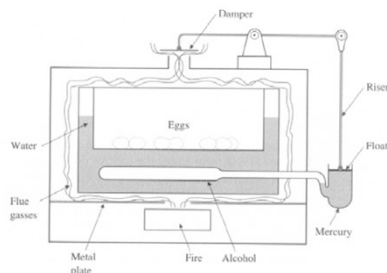
## Cornelius Drebbel (1572-1633)

- Hollantilainen kaivertaja, alkemisti ja keksijä
- Kehitti sukellusveneen, pumpun ja kellon, jota ei tarvinnut koskaan vetää (perustui ilmanpaineen muutoksiin)
- Astui Kuningas Jaakon palvelukseen v. 1606 Lontoossa



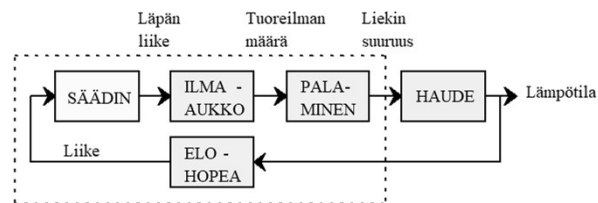
## Drebbelin termostaatti

- Lämpötilan säätö takaisinkytkennällä
  - Liekki kuumentaa haudetta, jossa on lämpötilamittarina alkoholia ja elohopeaa putken sisällä
  - Nesteet laajenevat, mikä muuttuu erillisessä astiassa pystysuoraksi liikkeeksi
  - Pystysuora liike siirtää läpän tuoreilman syöttöaukon päälle ja pois
- Liian kuuma lämpötila sulkee aukon, jolloin liekki kuristuu ja liian alhainen lämpötila avaa aukon, jolloin liekki kasvaa



## Drebbelin termostaatti

- Säädin koostuu liikkeenvälittimestä, jolla siirretään elohopean liike läpän liikkeeksi
  - Säädin voidaan viritellä herkäksi siirtämällä välittimen tukipisteitä siten, että pienikin elohopean tilavuuden laajeneminen muuttuu suureksi läpän liikkeeksi



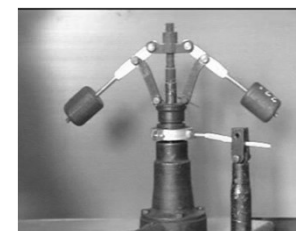
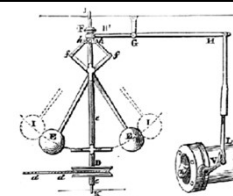
## James Watt (1736-1819)

- Skotlantilaisen (Greenock) kauppiaan poika
- Opiskeli matemaattikko-instrumenttisuunnittelijaksi – eli insinööriksi.
- Paransi Saveryn ja Newcomen höyrykoneita ja sai patentoitua oman tehokkaamman mallinsa
- Kuvasi höyrykoneidensa tehoa hevosvoimissa (havainnollinen esimerkki asiakkaille, kuinka monta hevosta laitteella voidaan korvata)



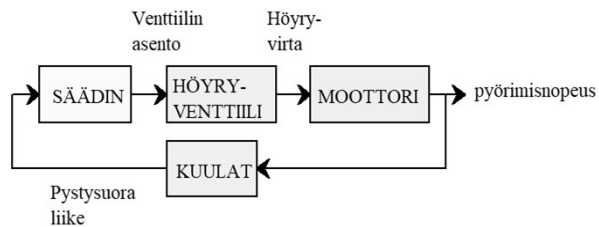
## Wattin kuvernööri

- Suunniteltiin höyrykoneen pyörimisnopeuden säätöön kuormitushäiriöissä
  - Alhaisilla pyörimisnopeuksilla painot ovat painovoiman johdosta tukivarren lähellä
  - Korkeilla pyörimisnopeuksilla keskipakovoima nostaa pallot (voittaa painovoiman), joka muuttuu pystysuoraksi liikkeeksi ja edelleen venttiilin kuristukseksi - venttiilin kuristamisesta seuraa vuorostaan pyörimisnopeuden laskeminen
  - Kyseessä on negatiivinen takaisinkytkentä



## Wattin kuvernööri

- Kuormituksen tai höyryn paineen muuttuessa moottori ei kykene pitämään yllä samaa pyörimisnopeutta venttiilin pysyessä muuttumattomana
- Wattin kuvernöörissä säädin koostuu liikkeen välityksestä, jossa holkin pystysuora liike muuttuu höyryventtiilin liikkeeksi



## Luku 2: Dynaamiset mallit, differentiaaliyhtälöt, tilaesitys ja linearisointi

## Mihin tarvitaan malleja säätötekniikassa?

- **Systemin ymmärtämiseen**
  - Kausaliteetin selvittäminen
  - Simulointi
  - Systemin analysointi (stabiilius, nopeus, värähtelyt, minimivaiheisuus, epälineaarisuus, ...)
- **Systemin hallintaan**
  - Mallipohjaiset hallintastrategiat
- **Säädetyin järjestelmän analysointiin**
  - Teoreettinen hallintastrategian analysointi (stabiilius, nopeus, häiriönsietokyky, nousuaika, ylitys, pysyvä poikkeama, värähtelyn vaimentuminen, ...)
  - Simulointi

## Mallit

- Dynaaminen / Staattinen malli
- Lineaarinen / Epälineaarinen malli
- Jatkuva-aikainen / Diskreettiaikainen malli
- Aikavariantti / Aikainvariantti malli
- Deterministinen / Stokastinen malli
- MIMO- / SISO-malli
- Kootujen parametrien / Jakautuneiden parametrien malli
- Parametroitu / Ei-parametroitu malli
- Kokeellinen / Teoreettinen malli
- Kvalitatiivinen malli / Kvantitatiivinen malli
- Lokaali / Globaali malli
- Matemaattinen / Ei-matemaattinen malli

## Mallit

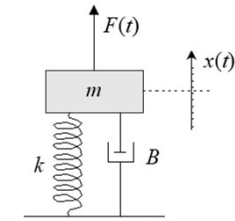
- Tällä kurssilla käsitellään lähinnä dynaamisia, lineaarisia, jatkuva-aikaisia, aikainvariantteja, deterministisiä, koottujen parametrien, parametrisoituja, kvantitatiivisia, matemaattisia malleja
- Tarkastellaan muutamia tärkeitä malliluokkia yksityiskohtaisemmin

## Esimerkki 2. Dynaamiset / staattiset mallit

- Järjestelmä on dynaaminen kun sen tila on funktio aikaisemmasta tilasta (järjestelmällä on muistia ja hitautta).

- Esim. Ulkoisen voiman  $F$  vaikutus massakappaleen paikkaan  $x$  - johdetaan voimataseesta ( $m$  on massa,  $k$  jousivakio ja  $B$  vaimennuskertoimen)

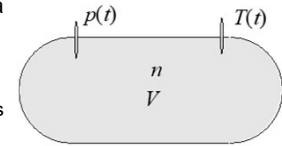
$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$



- Staattinen järjestelmä ei riipu aikaisemmasta tilasta (muistiton ja hitaukseton järjestelmä).

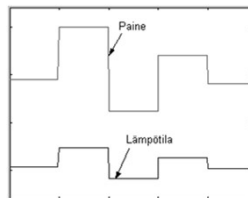
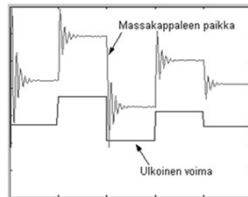
- Esim. Lämpötilan  $T$  vaikutus paineeseen  $p$  suljetussa, eristetyssä säiliössä - johdetaan ideaalikaasulaista ( $n$  on ainemäärä,  $V$  tilavuus ja  $R$  kaasuvakio)

$$p(t)V = nRT(t)$$



## Esimerkki 2. Dynaamiset / staattiset mallit

- Tehdään simuloinnit, joissa muutetaan mekaanisessa järjestelmässä ulkoista voimaa ja kaasusäiliössä lämpötilaa askelmaisesti.
  - Dynaamisessa järjestelmässä vaste muuttuu pitkään senkin jälkeen, kun heräte on jo tasaantunut. Vastetta ei voida määrittää ainoastaan saman hetken herätteen arvon perusteella - on tunnettava systeemin historia.
  - Staattisessa järjestelmässä heräte ja vaste muuttuvat samoilla ajanhetkillä ja vaste voidaan määrittää suoraan saman hetken herätteen arvon perusteella. Kausaliteetilla ei ole merkitystä: On sama muutetaanko painetta vai lämpötilaa ... toinen muuttuja seuraa ja vaste on sama.



## Lineaariset / epälineaariset mallit

- Järjestelmä on lineaarinen, jos se täyttää seuraavat ehdot
  - Jos heräte  $u_1$  aiheuttaa vasteen  $y_1$ , niin heräte  $Ku_1$  aiheuttaa vasteen  $Ky_1$  ( $K$  on mielivaltainen vakio).
  - Jos heräte  $u_1$  aiheuttaa vasteen  $y_1$  ja heräte  $u_2$  vasteen  $y_2$ , niin heräte  $(u_1+u_2)$  aiheuttaa vasteen  $(y_1+y_2)$ .

- Testaamalla voidaan todeta, että esimerkin 1 venttiili on epälineaarinen järjestelmä ja esimerkin kaksi kaasusäiliö on lineaarinen järjestelmä

- Venttiili

$$F_{in}(t) = k \cdot x(t) \cdot \sqrt{p(t) - p_i}$$

- Jos paine muuttuu kaksinkertaiseksi arvosta  $2p_i$  arvoon  $4p_i$  (ja kaikki muut muuttujat säilyvät ennallaan), niin virtaus muuttuu seuraavasti:

- Alkutilanteessa:

$$F_{in} = kx\sqrt{2p_i - p_i} = kx\sqrt{p_i}$$

- Muutoksen jälkeen:

$$F_{in} = kx\sqrt{4p_i - p_i} = kx\sqrt{3p_i} = \sqrt{3}kx\sqrt{p_i} \neq 2 \cdot kx\sqrt{p_i}$$

## Lineaariset / epälineaariset mallit

- Kaasusäiliö  $p(t)V = nRT(t) \Leftrightarrow p(t) = \frac{nR}{V}T(t)$
  - Jos heräte muuttuu  $K$ -kertaiseksi, niin vaste muuttuu myös  $K$ -kertaiseksi. Vaste on heräte kerrottuna vakiolla  $nR/V$
  - Yleisesti differentiaaliyhtälö on lineaarinen, jos sen jokainen summan termi on muotoa :  
vakio  $\cdot$  (muuttuja tai sen  $n$ :s derivaatta)<sup>1</sup>
    - esim:  
$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - 5y(t) = 2i_1(t) - u_1(t) + 3\ddot{u}_2(t) - 2u_2(t)$$
  - Todelliset järjestelmät ovat lähes aina epälineaarisia, mutta niitä voidaan usein approksimoida lineaarisilla malleilla.
- <sup>1</sup> Pistenotaatio tarkoittaa aina derivaattaa ajan suhteen

## Jatkuva-aikaiset / diskreettiaikaiset mallit

- Jatkuva-aikaiset, dynaamiset mallit ovat differentiaaliyhtälöitä tai yhtälöryhmiä
    - esimerkki 2:n mekaaninen järjestelmä
- $$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$
- Diskreettiaikaiset, dynaamiset mallit ovat differenssiyhtälöitä tai yhtälöryhmiä
    - esim koron laskenta:

$$y(t_k + 1) = 1.07 \cdot y(t_k) - u(t_k + 1)$$

## Jakautuneiden / koottujen parametrien mallit

- Jakautuneiden parametrien mallit ovat osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tai yhtälöryhmiä. Aikaderivaattojen (merkitään yleensä pisteellä) lisäksi näissä on paikkaderivaattoja (merkitään yleensä pilkulla) eri akseleiden suhteen
  - Esim. nesteen pitoisuuden  $C$  muuttuminen putkessa ajan  $t$  ja putken pituuden  $z$  funktiona, virtauksen  $v$  ja diffuusion/dispersion  $D$  johdosta.  
$$\frac{\partial C(t,z)}{\partial t} = -v \frac{\partial C(t,z)}{\partial z} + D \frac{\partial^2 C(t,z)}{\partial z^2} \Leftrightarrow \dot{C}(t,z) = -vC'(t,z) + DC''(t,z)$$
- Koottujen parametrien malleissa on ainoastaan aikaderivaattoja
  - esimerkki 2:n mekaaninen järjestelmä:  
$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$
- Usein jakautuneiden parametrien mallia voidaan approksimoida usealla koottujen parametrien mallilla

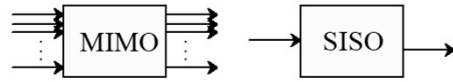
## Aikavariantit / aikainvariantit mallit

- Aikavarianteissa malleissa mallin parametrit muuttuvat ajan funktiona
    - Esimerkki 2:n mekaaninen järjestelmä, jossa massa muuttuu ajan funktiona (massa koostuu hiekasta, jota lastataan eri tapauksissa eri määrät)
- $$m(t)\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$
- Aikainvarianteissa malleissa malliparametrit ovat vakioita.
  - Tyypillisesti kaikki todelliset järjestelmät ovat aikavariantteja (kuluminen, likaantuminen, muuttuvat ympäristöolosuhteet, mutta monissa tapauksissa aikavarianttisuus on niin vähäistä, ettei sitä tarvitse ottaa huomioon).



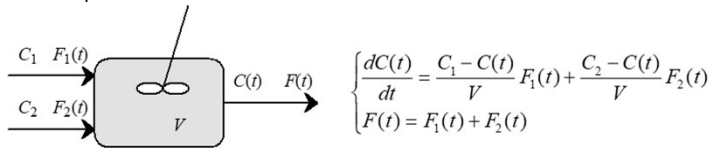
## MIMO- / SISO-mallit

- MI - Multiple Input
- SI - Single Input
- MO - Multiple Output
- SO - Single Output



- SISO: esimerkki 2:n mekaaninen järjestelmä - yksi heräte: ulkoinen voima - yksi vaste massakappaleen paikka  $m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$

- MIMO: sekoitusprosessi, jossa sekoitetaan kaksi eri-pitoisuuksista virtausta yhteen - kaksi herätettä: virtaukset  $F_1$  ja  $F_2$  - kaksi vastetta: poistovirtaus  $F$  ja sen pitoisuus  $C$



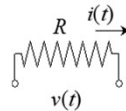
## Fysikaalinen mallintaminen

- Tarkastellaan fysikaalista mallintamista koottujen parametrien malleilla sähköpiireissä, mekaanisissa järjestelmissä (sekä etenevä että pyörivä liike) ja virtausjärjestelmissä.
- Tässä tarkastelussa keskitytään yksinkertaisiin lineaarisiin peruskomponentteihin jättäen esimerkiksi lämpö- ja energiajärjestelmät tarkastelun ulkopuolelle.

## Sähköpiirien peruskomponentit

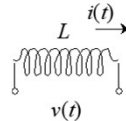
- Vastus (resistanssi)

$$v(t) = Ri(t)$$



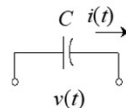
- Kela (induktanssi)

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



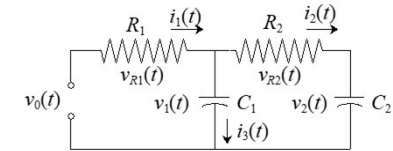
- Kondensaattori (kapasitanssi)

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$



## Esimerkki 3. Sähköpiiri

- Tehdään malli sähköpiirille
- Tulosuurena eli herätteenä on  $v_0(t)$  ja lähtösuureina eli vasteina jännitteet kondensaattorien yli  $v_1(t)$  ja  $v_2(t)$ .
- Sähkövirroille ja vastuksille saadaan



$$C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = i_3(t), \quad C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} = i_2(t)$$

$$v_{R1}(t) = R_1 i_1(t), \quad v_{R2}(t) = R_2 i_2(t)$$

- Kirchoffin ensimmäinen laki  $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$

- Kirchoffin toinen laki

$$\begin{cases} v_0(t) = v_{R1}(t) + v_1(t) \\ v_1(t) = v_{R2}(t) + v_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0(t) = R_1 i_1(t) + v_1(t) \\ v_1(t) = R_2 i_2(t) + v_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1(t) = \frac{v_0(t) - v_1(t)}{R_1} \\ i_2(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_2} \end{cases}$$

### Esimerkki 3. Sähköpiiri

- Mallin herätteenä on jännite ja vasteina ovat jännitteet, joten kehitetyistä yhtälöistä on syytä eliminoida sähkövirrat tarpeettomina muuttujina.

$$\begin{cases} \frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{1}{C_1} i_2(t) = \frac{1}{C_1} (i_1(t) - i_2(t)) = \frac{v_0(t) - v_1(t)}{R_1 C_1} - \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_2 C_1} \\ \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} i_2(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_2 C_2} \end{cases}$$

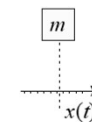
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_1(t)}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) v_1(t) + \left(\frac{1}{R_2 C_1}\right) v_2(t) + \left(\frac{1}{R_1 C_1}\right) v_0(t) \\ \frac{dv_2(t)}{dt} = \left(\frac{1}{R_2 C_2}\right) v_1(t) - \left(\frac{1}{R_2 C_2}\right) v_2(t) \end{cases}$$

### Mekaanisten järjestelmien peruskomponentit

Etenevä liike:

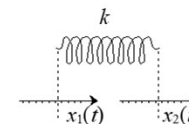
- Massakappale (inertia)

$$F_m(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$



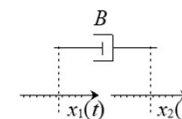
- Jousi

$$F_k(t) = k \Delta x(t) = k(x_1(t) - x_2(t))$$



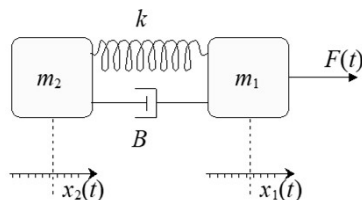
- Vaimennin

$$F_b(t) = B \frac{d\Delta x(t)}{dt} = B \left( \frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right)$$



### Esimerkki 4. Mekaaninen järjestelmä

- Tehdään malli mekaaniselle järjestelmälle, jossa kaksi massakappaletta on kytketty toisiinsa jousella ja vaimentimella
- Herätteenä on ulkoinen voima  $F(t)$  ja vasteena jälkimmäisen massakappaleen paikka  $x_2(t)$
- Ensimmäiselle massakappaleelle



$$m_1(t) \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + B \left( \frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right) + k(x_1(t) - x_2(t)) = F(t)$$

- Toiselle massakappaleelle

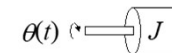
$$m_2(t) \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = B \left( \frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right) + k(x_1(t) - x_2(t))$$

### Mekaanisten järjestelmien peruskomponentit

Pyörivä liike:

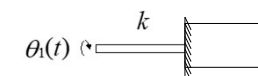
- Hitausmomentti

$$T_J(t) = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$$



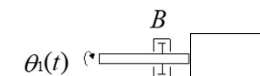
- Vääntöjousi

$$T_k(t) = k \theta_1(t)$$



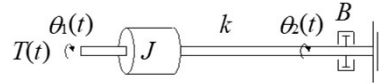
- Vääntövaimennin

$$T_b(t) = B \frac{d\theta_1(t)}{dt}$$



## Esimerkki 5. Mekaaninen järjestelmä

- Tehdään malli kuvassa esitetyllä pyörivällä järjestelmällä. Herätteenä on vääntömomentti  $T(t)$  ja vasteena kulmat  $\theta_1(t)$  ja  $\theta_2(t)$



$$\begin{cases} J \frac{d^2 \theta_1(t)}{dt^2} + k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = T(t) \\ B \frac{d\theta_2(t)}{dt} = k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \end{cases}$$

## Virtausjärjestelmien peruskomponentit

- Läpivirtaussäiliö

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) - F_2(t)$$

- Ideaalisekoitin

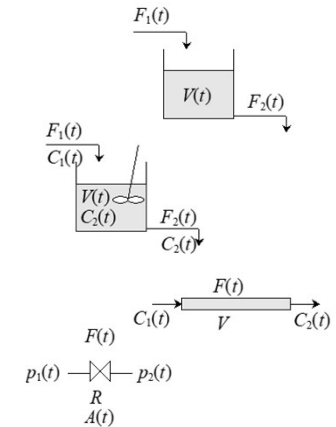
$$\frac{dV(t)C_2(t)}{dt} = F_1(t)C_1(t) - F_2(t)C_2(t)$$

- Putkiviive

$$C_2(t) = C_1(t - T_d(t)) = C_1\left(t - \frac{V}{F(t)}\right)$$

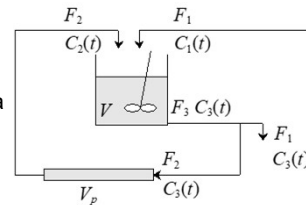
- Virtaus aukon läpi

$$F(t) = A(t)R\sqrt{\Delta p(t)} = A(t)R\sqrt{p_1(t) - p_2(t)}$$



## Esimerkki 6. Virtausjärjestelmä

- Tehdään malli kuvassa esitetyllä virtausjärjestelmälle. Herätteenä on tulovirran pitoisuus  $C_1(t)$  ja vasteena poistovirran pitoisuus  $C_3(t)$ . Virtaukset ja tilavuudet ovat vakioita
- Virtauksen haaraantumispisteelle saadaan  $F_3 = F_1 + F_2$



- Ideaalisekoittimelle ja putkelle saadaan

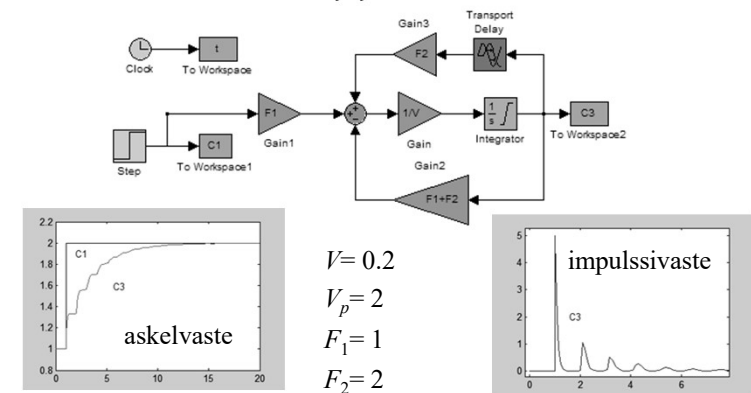
$$\frac{dVC_3(t)}{dt} = F_1C_1(t) + F_2C_2(t) - F_3C_3(t), \quad C_2(t) = C_3\left(t - \frac{V_p}{F_2}\right)$$

- Eliminoidaan yhtälöistä  $F_3$  ja  $C_2(t)$ :

$$\frac{dC_3(t)}{dt} = \frac{1}{V}\left(F_1C_1(t) + F_2C_3\left(t - \frac{V_p}{F_2}\right) - (F_1 + F_2)C_3(t)\right)$$

## Esimerkki 6. Virtausjärjestelmän simulointi

- Tehdään simulointimalli virtausjärjestelmälle SIMULINK:illa



$$V = 0.2$$

$$V_p = 2$$

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 2$$

## Tilaesitys

- Tilaesitys on kompakti tapa esittää korkean kertaluvun differentiaaliyhtälöitä/-yhtälöryhmiä.
- Systeemin hetkellinen tila on täydellinen kuvaus systeemistä. Jos alkutila (tilasuureet alkuhetkellä) ja kaikki tulosuureet alkuhetkestä lähtien tunnetaan, niin systeemin tila ja lähtösuureet voidaan määrittää mielivaltaisella ajanhetkellä. Tästä seuraa että tilaesitys sopii erittäin hyvin simulointiin.
- Systeemin tilasuureiden manipulointi ohjauksilla mahdollistaa paremman systeemin hallinnan verrattuna systeemin lähtösuureiden manipulointiin ohjausten avulla.
- Tilaesitys on standardimuotoinen esitys, joten systeemistä riippumatta voidaan standardoida myös hallintamekanismit (yhtälöt eivät riipu systeemin kertaluvusta ja parametreista)
- Tilaesitys soveltuu hyvin monimuuttujasysteemien mallintamiseen ja hallintaan

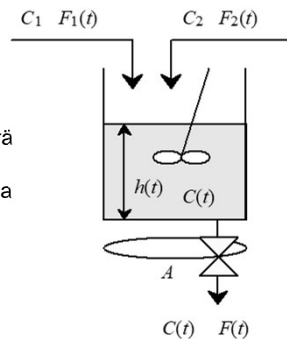
## Tilaesitys

- Tilaesityksessä mielivaltaisen kertaluvun differentiaaliyhtälö/-yhtälöryhmä esitetään ryhmänä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.
- Tilojen valinta voidaan tehdä äärettömän monella eri tavalla => tilaesitys ei ole yksikäsitteinen vaan monet erilaiset tilaesitykset voivat kuvata samaa input/output-mallia.
- Yleinen tilaesitys on muotoa 
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$
- $\mathbf{x}(t)$  on tilasuure,  $\mathbf{u}(t)$  ohjaussuure (tulosuure) ja  $\mathbf{y}(t)$  lähtösuure - kaikki nämä suureet voivat olla vektoreita tai skalaareja.
- $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  on systeemiyhtälö (kuvaa systeemin dynamiikan) ja  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  on lähtökuvaus (kertoo miten lähtösuureet riippuvat tiloista ja ohjauksista)
- Jos  $\mathbf{u}(t)$  on skalaari  $u(t)$  ja  $\mathbf{y}(t)$  skalaari  $y(t)$ , niin kyseessä on SISO-järjestelmä - huolimatta vektorin  $\mathbf{x}(t)$  dimensiosta.

## Esimerkki 7. Virtausjärjestelmän tilaesitys

- Virtausprosessissa sekoitetaan pakkasnestettä (laimeaa liuosta, jonka kemikaalipitoisuus on  $C_1$  väkevään liuokseen, jonka pitoisuus on  $C_2$ ).
- Tavoitteena on saada haluttu tuotantomäärä (virtaus  $F$ ) annetut spesifikaatit täyttävää tuotetta (pitoisuus  $C$ ) käyttämällä ohjauksina virtauksia ( $F_1$  ja  $F_2$ ).
- Sekoitussäiliöstä on vapaa purkautuminen ilmanpaineeseen => poistovirtaus on verrannollinen pinnankorkeuden neliöjuureen:

$$F(t) = k\sqrt{h(t)}$$



## Esimerkki 7. Virtausjärjestelmän tilaesitys

- Muodostetaan massatase (yksinkertaistuu tilavuustaseeksi) ja osainetase pitoisuuksille

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = A \frac{dh(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - F(t) \\ \frac{dC(t)V(t)}{dt} = C_1 F_1(t) + C_2 F_2(t) - C(t)F(t) \end{cases}$$

$$\frac{dC(t)V(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt} V(t) + C(t) \frac{dV(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt} V(t) + C(t)(F_1(t) + F_2(t) - F(t))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \frac{dh(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - k\sqrt{h(t)} \\ \frac{dC(t)}{dt} Ah(t) = (C_1 - C(t))F_1(t) + (C_2 - C(t))F_2(t) \end{cases}$$

## Esimerkki 7. Virtausjärjestelmän tilaesitys

- Saadaan yksinkertainen yhtälöryhmä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöistä

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}(F_1(t) + F_2(t) - k\sqrt{h(t)}) \\ \frac{dC(t)}{dt} = \frac{1}{Ah(t)}((C_1 - C(t))F_1(t) + (C_2 - C(t))F_2(t)) \end{cases}$$

- Valitaan tiloiksi  $h$  ja  $C$ , ohjauksiksi  $F_1$  ja  $F_2$  sekä lähtösuureiksi  $F$  ja  $C$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t) \\ C(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ C(t) \end{bmatrix}$$

- Näillä muuttujavalinnoilla voidaan tilaesitys kirjoittaa suoraan standardimuodossa.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

## Esimerkki 7. Virtausjärjestelmän tilaesitys

- Saadaan systeemi yhtälö:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A}(u_1(t) + u_2(t) - k\sqrt{x_1(t)}) \\ \frac{1}{Ax_1(t)}((C_1 - x_2(t))u_1(t) + (C_2 - x_2(t))u_2(t)) \end{bmatrix}$$

- Lähtökuvausta varten tarkastellaan lähtömuuttujien riippuvuutta tilamuuttujista

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\sqrt{h(t)} \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\sqrt{x_1(t)} \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Lähtökuvaus:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ g_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\sqrt{x_1(t)} \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

## Esimerkki 7. Virtausjärjestelmän tilaesitys

- Virtausprosessin tilaesitykseksi saadaan

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{A}(u_1(t) + u_2(t) - k\sqrt{x_1(t)}) \\ \frac{1}{Ax_1(t)}((C_1 - x_2(t))u_1(t) + (C_2 - x_2(t))u_2(t)) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} k\sqrt{x_1(t)} \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Tässä esimerkissä tilojen valinta oli helppoa, koska sopivat tilamuuttujat saatiin suoraan systeemin mallista. Tarkastellaan muita menetelmiä tilojen valintaan lineaarisen tilaesityksen yhteydessä.

## Lineaarinen tilaesitys

- Edellinen esimerkki (esimerkki 7) kuvasi epälineaarista tilaesitystä. Jos tarkasteltava systeemi on lineaarinen, niin sen muuttujat ja parametrit voidaan koota erillisiksi vektoreiksi ja matriisiksi, jolloin saadaan standardimuotoinen lineaarinen tilaesitys.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

- Parametrimatriisia  $\mathbf{A}$  kutsutaan systeemimatriisiksi,  $\mathbf{B}$ :tä ohjausmatriisiksi,  $\mathbf{C}$ :tä lähtömatrisiksi ja  $\mathbf{D}$ :tä suoravaikutusmatriisiksi. Usein  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , jolloin koko suoravaikutus katoaa tilaesityksestä. (tämä tapahtuu vahvasti aidoilla – strictly proper – systeemeillä).

## Lineaarinen tilaesitys

- Differentiaaliyhtälöryhmä
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m \end{cases}$$

- Voidaan esittää matriisiyhtälönä

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

eli:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$

## Sähköpiirin tilaesitys

- Tarkastellaan esimerkin 3 sähköpiiriä ja kehitetään sille tilaesitys

$$\begin{cases} \frac{dv_1(t)}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right)v_1(t) + \left(\frac{1}{R_2C_1}\right)v_2(t) + \left(\frac{1}{R_1C_1}\right)v_0(t) \\ \frac{dv_2(t)}{dt} = \left(\frac{1}{R_2C_2}\right)v_1(t) - \left(\frac{1}{R_2C_2}\right)v_2(t) \end{cases}$$

- Luonnollinen valinta tilasuureille on kondensaattorien jännitteet (koska niistä on valmiit ensimmäisen kertaluokan differentiaaliyhtälöt). Valitaan nyt lähtösuureksi pelkästään jälkimmäisen kondensaattorin jännite  $v_2$ .

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = v_0(t), \quad y(t) = v_2(t)$$

- Näillä valinnoilla saadaan

## Sähköpiirin tilaesitys

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right)x_1(t) + \frac{1}{R_2C_1}x_2(t) + \frac{1}{R_1C_1}u(t) \\ \frac{1}{R_2C_2}x_1(t) - \frac{1}{R_2C_2}x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = x_2(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

- ja edelleen

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right) & \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(t) + 0 u(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \end{cases}$$

## Tilaisityksen muodostaminen

- Miten tilaesitys muodostetaan systemaattisesti?
  - Valitaan fysikaalisesti järkevät tilamuuttujat malliyhtälöistä (kuten aikaisemmissa esimerkeissä)
  - Derivointi-operaattorin  $p$  avulla
  - Kanonisten muotojen avulla
- Fysikaalisesti järkevät tilamuuttujat
  - Usein helpoin tapa
- Derivointi-operaattorin avulla
  - Voidaan muodostaa esim. ohjattava tai havaittava kanoninen muoto tai joissain tapauksissa myös diagonaalinen muoto
- Kanonisten muotojen avulla
  - Kaavaan sijoittaminen

## Tilaesityksen muodostaminen

- Tarkastellaan mekaanista järjestelmää (esimerkki 2)

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

- Fysikaalisesti järkevät tilamuuttujat

- Valitaan paikka  $x$  ja nopeus  $v = dx/dt$ 

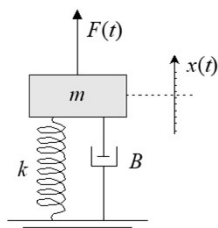
$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = \dot{x}(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x(t) = x_1(t), \quad u(t) = F(t)$$

- Määritetään valittujen tilamuuttujien derivaatat

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -\frac{B}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}F(t) = -\frac{B}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$



## Tilaesityksen muodostaminen

- Toinen tapa: käytetään derivointiopeeraattoria  $p$ 
  - Kirjoitetaan alkuperäinen yhtälö käyttäen derivointiopeeraattoria

$$\ddot{x}(t) + \frac{B}{m}\dot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}F(t) \Rightarrow p\{p\{x(t)\} + \frac{B}{m}x(t)\} = -\frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}F(t)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = p\{x(t)\} + \frac{B}{m}x(t) = \dot{x}(t) + \frac{B}{m}x_1(t) \\ p\{x_2(t)\} = \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}F(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{B}{m}x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) = x(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

## Tilaesityksen muodostaminen

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y^{(1)}(t) + a_n y(t) = b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1} u^{(1)}(t) + b_n u(t)$$

- Käytetään kanonisia muotoja

- Yllä esitetylle yleiselle lineaariselle differentiaaliyhtälölle on johdettu oheiset kanoniset muodot

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_2 \quad b_1] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Ylempi tilaesitys: Ohjattava kanoninen muoto
- Alempi tilaesitys: Havaittava kanoninen muoto

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

## Tilaesityksen muodostaminen

- Käytetään kanonisia muotoja

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{B}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

- Todetaan, että derivointiopeeraattorilla saatiin havaittava kanoninen muoto ja fysikaalisesti valituilla tilasuureilla muodostettu tilaesitys muistuttaa erehdyttävästi ohjattavaa kanonista muotoa

$$\ddot{y}(t) + \frac{B}{m}\dot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0\dot{u}(t) + \frac{1}{m}u(t) \propto \ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_2u(t)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t) \end{cases} \propto \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

## Lineaarisen tilaesityksen dimensio

- Systeemin kertaluku on minimirealisaatiossa systeemiä kuvaavien differentiaaliyhtälöiden kertalukujen summa. Tämä on myös systeemin matriisi  $\mathbf{A}$ :n dimensio.
- Ohjausten eli tulosuureiden lukumäärä on  $n_u$
- Lähtösuureiden lukumäärä on  $n_y$
- Systeemin kertaluku on  $n_s$
- Tällöin lineaarisen tilaesityksen dimensiot ovat:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

$n_s \times 1$     $n_s \times n_s$     $n_s \times 1$     $n_s \times n_u$     $n_u \times 1$   
 $n_y \times 1$     $n_y \times n_s$     $n_s \times 1$     $n_y \times n_u$     $n_u \times 1$

## Linearisointi

- Linearisointi on menetelmä, jonka avulla kehitetään epälinearisesta mallista lineaariaprosimaatio, joka pätee hyvin linearisointipisteen läheisyydessä (lineaariaprosimaatio on Taylorin sarjan nollas ja ensimmäinen termi tarkastelupisteessä)
- Tarkastellaan yleistä matriisiyhtälöä
- Apksimoidaan yhtälöä pisteessä  $\mathbf{z}_0$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{z}) \\ f_2(\mathbf{z}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \approx \mathbf{q}_0 + \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{z}^T}(\mathbf{z}_0) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$$

- Valitaan uudet muuttujat  $\begin{cases} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \\ \Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{q} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{z}^T}(\mathbf{z}_0) \cdot \Delta \mathbf{z}$$

## Linearisointi

- Lineaariaprosimaatioksi saadaan siis

$$\Delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_n \end{bmatrix} \approx \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{z}^T}(\mathbf{z}_0) \cdot \Delta \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dz_1}(\mathbf{z}_0) & \frac{df_1}{dz_2}(\mathbf{z}_0) & \dots & \frac{df_1}{dz_m}(\mathbf{z}_0) \\ \frac{df_2}{dz_1}(\mathbf{z}_0) & \frac{df_2}{dz_2}(\mathbf{z}_0) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{df_n}{dz_1}(\mathbf{z}_0) & & & \frac{df_n}{dz_m}(\mathbf{z}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \vdots \\ \Delta z_m \end{bmatrix}$$

- Jos  $\mathbf{q}$  on skalaari  $q$ , niin linearisointimatriisi supistuu vektoriksi ( $n = 1$ ; yhtälön ylin rivi)
- Jos sekä  $\mathbf{q}$  että  $\mathbf{z}$  ovat skalaareja, niin linearisointi vastaa käyrän korvaamista tangentillaan linearisointipisteessä.

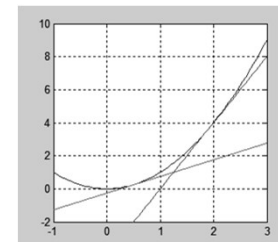
## Linearisointi - esimerkki

- Tarkastellaan epälineaarista yhtälöä  $q(z) = z^2$
- Lasketaan derivaatta  $\frac{dq(z)}{dz} = 2z$ ,  $\frac{dq(z_0)}{dz} = 2z_0$
- Määritetään lineaariaprosimaatio  $\Delta q(z) \approx \frac{dq(z_0)}{dz} \cdot \Delta z = 2z_0 \cdot \Delta z$
- Toimintapiste:  $q_0 = z_0^2$
- Katsotaan, miten lineaariaprosimaatio toimii tarkastelupisteissä  $z_0 = 0.5$  ja  $z_0 = 2$ .

$$q(z) \approx q_0 + 2z_0(z - z_0)$$

$$q(z)|_{z_0=0.5} \approx 0.25 + (z - 0.5)$$

$$q(z)|_{z_0=2} \approx 4 + 4(z - 2)$$





## Tilaesityksen linearisointi

- Kun epälineaarinen tilaesitys linearisoidaan, niin linearisointipisteeksi valitaan tavallisesti tasapainotila eli stationääritila (tila, jossa kaikki systeemin derivaatat saadaan nolliksi eli piste, jossa systeemi voi olla levossa – joka voi myös olla epästabiili piste). Stationääritila ei ole muuttuja vaan vakio ja yleensä sitä merkitään alaindeksillä  $S$ .
- Tilayhtälössä tavallisesti linearisoidaan systeemiyhtälö ja lähtökuvauksen erikseen - nämä linearisoidaan tilojen ja ohjausten suhteen, jolloin saadaan suoraan lineaarisen tilaesityksen matriisit  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  ja  $\mathbf{D}$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) \cdot \Delta \mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{u}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) \cdot \Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) \\ \Delta \mathbf{y}(t) = \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) \cdot \Delta \mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) \cdot \Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

## Epälineaarisen tilaesityksen linearisointi

- Linearisoidaan esimerkin 7 virtausjärjestelmän epälineaarinen tilaesitys ja esitetään kehitetty lineaariaprossimaatio yleisessä lineaarisen tilaesityksen standardimuodossa
- Ratkaistaan tasapainotila (aikaderivaatat nolliä)

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{A}(u_{1,s} + u_{2,s} - k\sqrt{x_{1,s}}) \\ \frac{1}{Ax_{1,s}}((C_1 - x_{2,s})u_{1,s} + (C_2 - x_{2,s})u_{2,s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} k\sqrt{x_{1,s}} = u_{1,s} + u_{2,s} \\ (C_1 - x_{2,s})u_{1,s} = -(C_2 - x_{2,s})u_{2,s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,s} = \left(\frac{u_{1,s} + u_{2,s}}{k}\right)^2 \\ x_{2,s} = \frac{C_1 u_{1,s} + C_2 u_{2,s}}{u_{1,s} + u_{2,s}} \end{cases}$$

## Epälineaarisen tilaesityksen linearisointi

- Lasketaan alkuperäisestä systeemiyhtälöstä ja lähtökuvauksesta derivaatat kunkin muuttujan suhteen

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)}{d\mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{-k}{2A\sqrt{x_{1,s}}} & 0 \\ -\frac{(C_1 - x_{2,s})u_{1,s} + (C_2 - x_{2,s})u_{2,s}}{Ax_{1,s}^2} & -\frac{u_{1,s} + u_{2,s}}{Ax_{1,s}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)}{d\mathbf{u}^T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & \frac{1}{A} \\ \frac{C_1 - x_{2,s}}{Ax_{1,s}} & \frac{C_2 - x_{2,s}}{Ax_{1,s}} \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

## Epälineaarisen tilaesityksen linearisointi

$$\frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)}{d\mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{k}{2\sqrt{x_{1,s}}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}, \quad \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)}{d\mathbf{u}^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

- Sijoitetaan tasapainopisteen arvot matriiseihin ja saadaan lineaarinen aprossimaatio, joka pätee pienille muutoksille tasapainopisteen ympärillä

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{-k^{\frac{3}{2}}}{2A(u_{1,s} + u_{2,s})} & 0 \\ 0 & -k \\ & A(u_{1,s} + u_{2,s}) \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & \frac{1}{A} \\ \frac{k(C_1 - C_2)u_{2,s}}{A(u_{1,s} + u_{2,s})^3} & \frac{k(C_2 - C_1)u_{1,s}}{A(u_{1,s} + u_{2,s})^3} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(t) \\ \Delta \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{2(u_{1,s} + u_{2,s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t) \end{cases}$$