MS-A0002
Matriisilaskenta

Ragnar Freij-Hollanti

16. helmikuuta 2023

Opettajat ja opiskelijat

- **Luennoitsija:**
  Ragnar Freij-Hollanti, Y242b, `ragnar.freij@aalto.fi`
- **Pääassistentti:**
  Teemu Lundström, M330b , `teemu.lundstrom@aalto.fi`
- Tämä kurssitoteutus on tarkoitettu kaikille Aallon perustieteiden korkeakoulun suomenkielisille opetusohjelmoille (poislukien TFM).

Aikataulu

- **Luennot:** Tiistai 8-10, A ja Torstai 8-10, A.
- **Laskuharjoitukset:**

Ryhmä	Opettaja				
1	Juho Lahti	Ma 8	U119	Pe 8	U119
2	Eelis Eklund	Ma 10	Y229a	To 10	Y307
3	Elias Pelo	Ma 14	Y228b	Pe 14	Y307
4	Niklas Kostiander	Ti 14	Y307	To 14	U410b
5	Tuomas Laiho	Ke 8	Y308	Pe 10	Y307a
6	Seela Saartoala	Ke 12	Y228b	Pe 10	Y228b
7	Faeq Qanezadeh	Ma 14	U406a	Pe 14	U406a
8	Eetu Rintala	Ti 14	Y228b	To 14	Y228b
9	Teemu Lundström	Ti 16	Y347	To 16	U405a

- **Laskutupa:**
  Y190c; Ma–To 10–18; Pe 10–16

Kurssin suorittaminen

- Vaihtoehto 1 (suositeltu):
  - **Loppukoe (60%):** Kirjallinen, 24.2. tai 19.4.
    Apuvälineenä yksi sivu (A4, kirjoitettu vain toiselle puolelle, merkattu opiskelijan nimellä) opiskelijan itse käsin kirjoittamia muistiinpanoja.
  - **Kotitehtävät (40%):**
    - 1× MATLAB OnRamp (suoritetaan omatoimisesti, sertifikaatti palautetaan MyCoursesiin)
    - 5× Raportoidaan suullisesti lukuviikkojen 2–6 toisessa laskuharjoituksessa.

    Toisten opiskelijoiden tehtävien vertaisarviointin on osa tehtävää, joten pisteiden saaminen vaatii läsnäoloa. Tehtävät julkistetaan kotisivulla edeltävänä perjantaina.
    Viisi parasta kotitehtävätulosta (kuudesta) lasketaan yhteen.
- Vaihtoehto 2: Kurssikoe 24.2. tai 19.4. tai 7.6. (100%).

Materiaalit

- **Kurssikirja:** Gilbert Strang: *Introduction to Linear Algebra (5. ed)*.
- **Luentokalvot:** Julkistettu kurssisivulla jonka luennon jälkeen.

- **Täydentävä kurssikirja:** Robert Adams ja Christopher Essex: *Calculus, a complete course*.
- Matemaatinen sanakirja (eng-fin-swe).
- Pikku-M (Lukiomatematiikan kertaamiseen)
- MATLAB OnRamp (johdatuskurssi MATLAB-ohjelmointiin)

Kurssin sisältö

Lineaarinen algebra ja lineaarinen geometria

- Kompleksiluvut
- Vektorilaskenta
  - Vektorilaskennan perusteet
  - Kompleksiluvut
  - 3-ulotteinen geometria
  - Lineaarikuvaukset
- Matriisilaskenta
  - Matriisitulot
  - Lineaariset yhtälöryhmät
  - Käänteismatriisit
  - Determinantit
- Matriisihajotelma
  - Ominaisarvot
  - Kannanvaihto
  - Singulaariarvot

Kompleksiluvut

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ovat luonnollinen joukko aloittaa laskeminen.
- Jos halutaan ratkaista muotoa $x + n = m$, $n, m \in \mathbb{N}$, olevat yhtälöt, kaipaa lukujen joukko kuitenkin laajennusta kokonaislukujen joukoksi:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

- Tämäkään ei riitä muotoa $nx = m$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, olevien yhtälöiden ratkaisemiseen, vaan tarvitaan laajennus rationaalilukuihin:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Kompleksiluvut

- Rationaalilukujenkaan joukosta ei löydy ratkaisua yhtälölle $x^2 = 2$. Tätä varten tehdään vielä laajennus, otetaan mukaan myös irrationaaliluvut, jolloin saadaan reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.
- Onko kaikki nyt hyvin?
- Mikä on yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisu?

Kompleksiluvut

- Määritellään *imaginääriyksikkö* i olemaan luku, jolle pätee

$$i^2 = -1.$$

- Imaginääriyksikköä i voitaisiin siis tavallaan kutsua myös -1:n neliöjuureksi.

Määritelmä

- *Kompleksiluku* on muotoa

$$a + bi$$

oleva esitys, jossa a ja b ovat reaalilukuja ja i imaginääriyksikkö.
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on kompleksilukujen joukko.

Kompleksiluvut

- Samaistetaan koordinaattipari $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja kompleksiluku $x + y \in \mathbb{C}$, eli

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \{(x,y) : \ x, y \in \mathbb{R}\} \\ \cong \mathbb{C} &= \{x + yi : \ x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Esimerkki

Piirrä kompleksiluvut $1+2i$, $2-i$, i, -2 ja $-3-2i$ koordinaatistoon.

- Tulkitsemalla kompleksiluvut tason vektoreiksi nähdään heti, miten niiden yhteenlasku pitää suorittaa.

Kompleksiluvut

- Olkoot $z = x + yi$ ja $w = a + bi$ kompleksilukuja.
- Tällöin lukujen w ja z summa on

$$\begin{aligned} w + z &= (a + bi) + (x + yi) \\ &= (a + x) + (b + y)i, \end{aligned}$$

- erotus

$$\begin{aligned} w - z &= (a + bi) - (x + yi) \\ &= (a - x) + (b - y)i, \end{aligned}$$

- ja tulo

$$\begin{aligned} wz &= (a + bi)(x + yi) \\ &= ax + ayi + bxi + byi^2 \quad \text{(Muista: } i^2 = -1!) \\ &= (ax - by) + (ay + bx)i. \end{aligned}$$

Kompleksiluvut

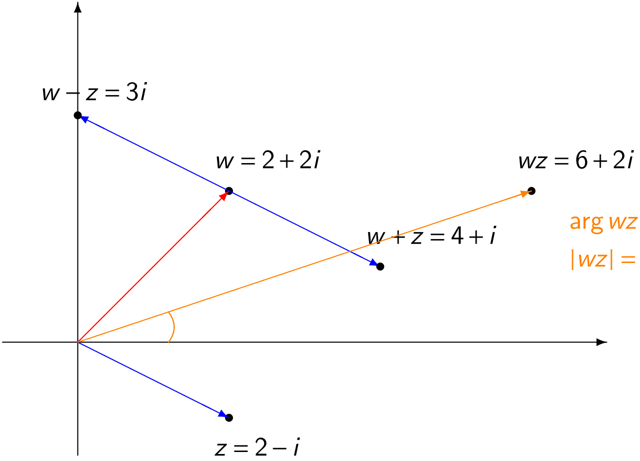
Esimerkki

- Olkoot $w = 2+2i$ ja $z = 2-i$. Laske $w+z$, $w-z$ ja wz. Tarkista piirtämällä kuvat.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
w+z &= (2+2)+(2-1)i = 4+i,\\
w-z &= (2-2)+(2-(-1))i = 3i,\\
wz &= ((2)(2)-(2)(-1))+((2)(-1)+(2)(2))i = 6+2i.
\end{aligned}$$

Kompleksiluvut



$\arg wz = \arg w + \arg z$

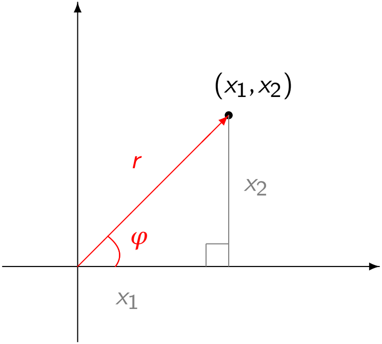
$|wz| = |w||z|$

Kompleksiluvut

Määritelmä

- Luvun $z = z_1 + i\ z_2 \in \mathbb{C}$ *reaaliosa* on $\mathrm{Re}(z) := z_1 \in \mathbb{R}$ ja *imaginaariosa* on $\mathrm{Im}(z) := z_2 \in \mathbb{R}$.
- Luku $\bar{z} = z_1 - i\ z_2 = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$ on luvun z *kompleksikonjugaatti* (eli liittoluku).

Napakoordinaatit tasossa $\mathbb{R}^2$



$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{x_2}{x_1}$$

$$x_1 = r\cos\varphi$$

$$x_2 = r\sin\varphi$$

Napakoordinaatit

- Jos $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\mathbf{x} = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r\,(\cos(\varphi), \sin(\varphi)),$$

  missä
  - $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ on pisteen etäisyys origosta
  - $\varphi = \arg(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ on $\mathbf{x}$*:n argumentti* eli kulma $\mathbf{x}$:n paikkavektorin ja vaaka-akselin välillä.
- Luvut

$$\begin{cases} r = |\mathbf{x}| & \in [0, \infty), \\ \varphi = \arg(\mathbf{x}) & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

  ovat $\mathbf{x}$*:n napakoordinaatit*.

Napakoordinaatit

Huom.

- $\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi)$ ja $\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi)$, joten argumentti on monikäsitteinen (kulmaan voi lisätä 2π-monikertoja)!
  Usein halutaan, että $\arg(\mathbf{x}) \in [0, 2\pi)$ tai $\arg(\mathbf{x}) \in (-\pi, \pi]$.
- Jos $x_1 \neq 0$, niin

$$\tan(\arg(\mathbf{x})) = \frac{x_2}{x_1} \text{ “eli” } \arg(\mathbf{x}) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

- Origon vaihekulma $\arg(0)$ on “epämääräinen”.

Napakoordinaatit

Esimerkki

- Mitkä ovat karteesisissa koordinaateissa ilmoitetun pisteen $\mathbf{x} = (\sqrt{3}, 1)$ napakoordinaatit?
- **Ratkaisu:**

$$\begin{cases} r = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \\ \varphi = \arg(\mathbf{x}) = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6. \end{cases}$$

- Napakoordinaateissa siis $x = (2, \pi/6)$.
- (Tarkistus: $2\cos(\pi/6) = \sqrt{3}$, $2\sin(\pi/6) = 1$.)

Napakoordinaatit $\mathbb{C}$:ssä

Määritelmä

- Luvun $z = z_1 + i\ z_2 \in \mathbb{C}$ *reaaliosa* on $\mathrm{Re}(z) := z_1 \in \mathbb{R}$ ja *imaginaariosa* on $\mathrm{Im}(z) := z_2 \in \mathbb{R}$.
- Luku $\bar{z} = z_1 - i\ z_2 = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$ on luvun z *kompleksikonjugaatti* (eli liittoluku).

Määritelmä (Itseisarvo ja argumentti)

Jos $z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}$, olkoon

$$|z| := \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad \text{ja} \quad \arg(z) := \arg((z_1, z_2)).$$

Kompleksiluvut

Esimerkki

- Nyt $|\bar{z}| = |z|$ ja $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$, joten $\bar{z}z = |z|^2$.
- Tarkistus:

$$\bar{z}z = (z_1 - iz_2)(z_1 + iz_2) = (z_1^2 + z_2^2) + i(z_1 z_2 - z_2 z_1) = |z|^2.$$

- Jos $0 \neq z \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned} z &= |z|\left(\frac{z_1}{|z|} + i\ \frac{z_2}{|z|}\right) \\ &= |z|\left(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi)\right) \end{aligned}$$

missä $\varphi = \arg(z)$.

Käänteisluku

- Kompleksiluvun $z = x + iy$ käänteisluvulle saadaan laskusääntöjen avulla muoto

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2},$$

  jos $z \neq 0$.

- Yleisemmin kompleksiluku w/z voidaan sieventää muotoon $a + ib$ laventamalla se nimittäjän liittoluvulla $\bar{z}$:

$$\frac{w}{z} := w\frac{1}{z} = w\bar{z}/|z|^2.$$

- Siis $|w/z| = |w|/|z|$ ja $\arg(w/z) = \arg(w) - \arg(z)$.

Kompleksiluvut

Esimerkki

$$\frac{2+3i}{4-5i} = \frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)} = \frac{-7+22i}{41} = -\frac{7}{41} + \frac{22}{41}i.$$

Polaarimuoto

- Taylorin sarjakehitelmien avulla (jos olette opiskelleet DiffInt 1):

$$\begin{aligned}
\cos\theta + i\sin\theta &= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots) \\
&= (1 + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \cdots) + (i\theta + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} - \cdots) \\
&= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots \\
&= e^{i\theta}.
\end{aligned}$$

- Siispä kompleksiluvut voidaan kirjoittaa ns. polaarimuodossa $z = re^{i\theta}$.
- Tämä on varsinkin tavallista tekniikassa.
- Erityisesti huomataan Eulerin kaava:

$$-1 = \cos(\pi) + i\sin\pi = e^{i\pi}$$

Napakoordinaatit

- Nyt kompleksilukujen kertolasku voidaan tutkita geomeetrisesti:
- Jos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ja $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, niin

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

- Kahden kompleksilukujen tulon pituus on niidän pituuksien tulo, ja tulon argumentti on argumenttien summa.
- Tapauksessa $z = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ saadaan **de Moivren kaava:**

$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Kompleksiluvut

Esimerkki

- Mitkä kompleksiluvut toteuttavat yhtälön $z^3 = 1$?
- **Vastaus:** Ratkaise kirjoittamalla luvut polaarimuodossa $z = re^{i\varphi}$, $1 = 1e^{in2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Tällöin yhtälö saa muodon

$$(re^{i\varphi})^3 = r^3 e^{i3\varphi} = 1e^{in2\pi},$$

josta $r^3 = 1$ ja $3\varphi = n2\pi$. Yhtälön toteuttavat siis pisteet, joille $r = 1$ ja $\varphi = n\frac{2}{3}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, eli

$$z = 1, z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ ja } z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Kompleksiluvut

Lause ((Reaali- tai kompleksi-) algebran peruslause)

- *Olkoon* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *polynomi eli*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

  missä $a_k \in \mathbb{C}$ *ja* $a_n \neq 0$.
- *Jos* $n \geq 1$, *niin* $p(w) = 0$ *jollakin* $w \in \mathbb{C}$.

- "Lisäämällä $\mathbb{R}$-joukkoon polynomin $z^2 + 1 = 0$ yhden ratkaisun, lisätään automaatisesti kaikille muillekin polynomiyhtälöille ratkaisun.."

Kompleksiluvut

Seuraus: Jos polynomi p on kuten edellä, niin

$$p(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_n),$$

missä $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$.

Esimerkki

$$p(z) = z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$$

eli polynomin p juuret ovat $-i, i \in \mathbb{C}$ (eivät reaalisia!).

Esimerkki

Etsi polynomi, jolla on sekä reaalisia että imaginäärisiä juuria.

Kompleksiluvut

Esimerkki

- Etsi polynomin $p(z) = z^2 + (1-5i)z - (4+4i)$ juuret.
- **Ratkaisu:** Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{-(1-5i) \pm \sqrt{(1-5i)^2 - 4(-4(1+i)}}{2} \\
&= \frac{5i - 1 \pm \sqrt{1 - 10i - 25 + 16i + 16}}{2} \\
&= \frac{5i - 1 \pm \sqrt{-8 + 6i}}{2}
\end{aligned}
$$

Kompleksiluvut

Esimerkki (Jatkuu)

- Neliöjuuri voidaan laskea seuraavasti:

$$\sqrt{-8+6i} = x + yi \iff -8+6i = x^2 + 2xyi - y^2.$$

- Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

ja saadaan ratkaisuiksi $x = 1,\ y = 3$ ja $x = -1,\ y = -3$, eli

$$\sqrt{-8+6i} = \pm(1+3i).$$

Kompleksiluvut

Esimerkki (Jatkuu)

- Etsi polynomin $p(z) = z^2 + (1-5i)z - (4+4i)$ juuret.
- $$z = \frac{5i - 1 \pm \sqrt{-8+6i}}{2}.$$
- $$\sqrt{-8+6i} = \pm(1+3i).$$
- Näin ollen polynomin nollakohdat ovat

$$z = \frac{5i-1-(1+3i)}{2} = -1+i \text{ ja } z = \frac{5i-1+(1+3i)}{2} = 4i.$$

Kompleksiluvut

Esimerkki (Jatkuu)

- Huom: Neliöjuuri voitaisiin laskea myös samalla idealla kuin kompleksiluvun potenssi aiemmin, eli muuntamalla $-8+6i$ polaarimuotoon, ottamalla sitten neliöjuuri ($\sqrt{re^{i\varphi}} = r^{1/2}e^{i\varphi/2}$) ja muuntamalla lopuksi takaisin kompleksimuotoon.

Sarakevektorit

- Reaalinen *n*-ulotteinen avaruus on joukko

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \ R\}.$$

- Sen alkiot merkitään tällä kurssilla *pystyvektoreina* tai *sarakevektoreina*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Sarakevektorit

- Määritellään kaksi laskutoimitusta joukossa $\mathbb{R}^n$:
  - Yhteenlasku $\mathbf{x}, y \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

  - Skalaarilla kertominen, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Sarakevektorit

- Vektori $\mathbf{0}$, jonka kaikki alkiot ovat nollia, on *nollavektori*.
- Kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$$

ja

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

jossa

$$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = (-1)\mathbf{x}.$$

Sarakevektorit

Esimerkki

Olkoon

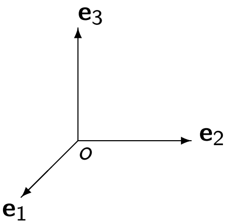
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Laske

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y}$
2. $\frac{1}{\pi}\mathbf{y} - \mathbf{x}$
3. $\mathbf{x} + 2\mathbf{z}$

Vektorit

- Koordinaatisto muodostetaan kiinnittämällä origo ja kantavektorit.
- Kolmiulotteisessa avaruudessa siis esim. karteesinen koordinaatisto $\{o, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, missä yksikkövektorit $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$ muodostavat ortonormaalin positiivisesti suunnistetun kannan.



- Huom: Fysiikkassa käytetään joskus notaatio

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1\,, \mathbf{j} = \mathbf{e}_2\,, \mathbf{k} = \mathbf{e}_3.$$

Vektorit

- Tasossa: Jos $\mathbf{a}$ kiertyy $\mathbf{b}$:n päälle vastapäivään lyhintä reittiä, on pari $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ suunnistettu positiivisesti.
- Avaruudessa: Jos kolmikko $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ toimii oikean käden säännön $\{P, E, K\}$ mukaisesti, se on positiivisesti suunnistettu.

Vektorit

- Olkoon tasossa koordinatisto $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ kiinnitetty, ja olkoon $P = (x_1, x_2)$ tässä koordinaatistossa. Tällöin

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- Erityisesti,

$$\mathbf{e}_1 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Siispä tason geometriset vektorit vastaavat $\mathbb{R}^2$:n sarakevektoreihin, *kun koordinaatisto on kiinnitetty*.

Vektorit

- Vastaavasti, Olkoon kolmiulotteisen avaruuden koordinatisto $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ kiinnitetty, ja olkoon $P = (x_1, x_2, x_3)$ tässä koordinaatistossa. Tällöin

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- Erityisesti,

$$\mathbf{e}_1 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Siispä kolmiulotteisen avaruuden vektorit vastaavat $\mathbb{R}^3$:n sarakevektoreihin, *kun koordinaatisto on kiinnitetty*.

Pituusfunktio

Määritelmä (Etäisyyskaava)

- Vektorin $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *pituus* on $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$.

- Tämä on ainoa mahdollinen määritelmä, jos halutaan että kaikkien kantavektoreiden pituudet $\|\mathbf{e}_i\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$, ja että Pythagoran lause pätee.

Pituusfunktio

Määritelmä (Etäisyyskaava)

- Vektorin $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *pituus* on $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$.

Esimerkki

Lasketaan vektorin $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ pituus.

Skalaaritulo

- Jos **u** ja **v** ovat samansuuntaisia, niin $\|u+\mathbf{v}\| = \|u\| + \|v\|$, joten
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$
- Jos **u** ja **v** ovat vastakkaissuuntaisia, niin $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = |\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\||$,joten
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$
- (Pythagoran lause / ortogonaalisuuden määritelmä): Jos **u** ja **v** ovat ortogonaaleja, niin
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$
- Joten luku
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2\right)$$
kertoo "minkä verran **u** ja **v** ovat samansuuntaisia".

Skalaaritulo

Määritelmä

Vektoreiden **u** ja **v** *skalaaritulo* (eli sisätulo, eli pistetulo) on

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2\right).$$

- ...mutta miten tämä lasketaan?
- Huom: kaikille verktoreille **u** pätee

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2.$$

Skalaaritulo

- Etäisyyskaava:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (u_1+v_1)^2+\cdots+(u_n+v_n)^2\\ &= (u_1^2+v_1^2+2u_1v_1)+\cdots+(u_n^2+v_n^2+2u_nv_n)\\ &= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2+2(u_1v_1+\cdots+u_nv_n).\end{aligned}$$

- Skalaaritulo:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{v}\|^2\right)\\ &= (u_1v_1+\cdots+u_nv_n).\end{aligned}$$

- Siispä skalaaritulot voidaan helpostikin laskea vektoreille $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$.

Kosinilause

Lause (Kosinilause)

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \begin{cases} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{b}), & \text{jos } \mathbf{a}\neq \mathbf{0}, \mathbf{b}\neq \mathbf{0} \\ 0, & \text{jos } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ tai } \mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases}$$

- Huom: Vektorit $\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ ovat siis kohtisuorassa jos ja vain jos $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, merkitään $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.
- Lukiossa lienette nähneet kosinilause eri muodossa, jossa se kertoo jotakin kolmion kolmannen sivun pituudesta jos kahden sivun pituudet ja yksi kulma on jo tiedossa.
- Nämä kaksi muotoilua ovat kuitenkin yhtäpitävät. (Tarkistakaa jos huvittaa!)

Skalaaritulo

Lause (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö)

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = \|u\|\|v\||\cos(\theta)| \leq \|u\|\|v\|$$

- Koordinaattimuodolla:

$$u_1v_1 + \cdots + u_nv_n \leq \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

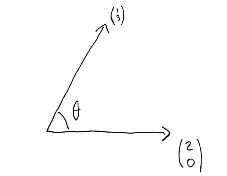
Esimerkki

- $$4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \leq \sqrt{16+9+4+1}\sqrt{1+4+9+16}.$$

Skalaaritulo

Esimerkki

- Mikä on vektoreiden $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ välinen kulma?



- $$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

- $$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 71.6°.$$

Skalaaritulo

Lause (Skalaaritulojen lineaarisuus)

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
- $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

- Seuraa heti skalaaritulojen kaavasta

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Vektoritulo

- Vektoritulo ("vektori × vektori = vektori") voidaan (järkevästi) muodostaa vain kolmiulotteisessa avaruudessa.

Määritelmä

Olkoot $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ kolmiulotteisia vektoreita. *Vektori- eli ristitulo* on vektori $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, jolle pätee:

1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$
3. vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ muodostavat oikeakätisen systeemin

- Jos $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ tai $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, on $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Vektoritulo

Esimerkki

Vektorien $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ vektoritulo $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, sillä

$$|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2| \sin \measuredangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\pi/2) = 1,$$

$\mathbf{e}_3$ on kohtisuorassa kumpaakin vektoria vastaan, ja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ muodostavat oikeakätisen systeemin.

Vektoritulo

Vektoritulo **ei** ole

- vaihdannainen: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- liitännäinen: $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$, mutta $\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Sille kuitenkin pätee

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- $(\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Vektoritulo

Kannassa $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vetoritulo saa nasevan muodon: Olkoon

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{b} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Tällöin voidaan suoralla laskulla osoittaa, että

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_3.$$

Myöhemmin tällä kurssilla opimme determinantin käsitteen ja näemme, että yo. voidaan kirjoittaa lyhyesti muodossa

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Vektoritulo

Esimerkki

Olkoon $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Laske

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
2. $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$

Ratkaisu:

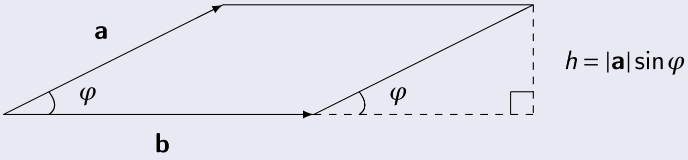
1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \times (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) =$
$-\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} + 2\mathbf{e}_3 - (-\mathbf{e}_3) + \mathbf{0} = 3\mathbf{e}_3$
2. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -2\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = -2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1$
3. $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = 2\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1$

Vektoritulo

Lause

Vektoreiden $\mathbf{a}$ *ja* $\mathbf{b}$ *virittämän suunnikkaan ala on* $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

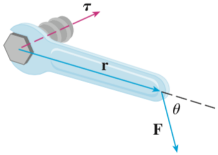
Todistus.



$$\text{Ala} = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$ □

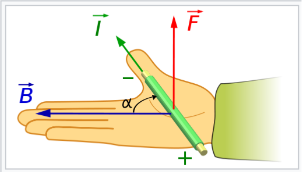
Vektoritulot fysiikassa

- Vivun vääntömomentti.
- $\mathbf{r}$ on pyörimisakselista menevä vektori pisteeseen, johon vaikuttaa voima F.
- Oikeakierteinen ruuvi muuttaa vääntömomentin seinään meneväksi voimaksi $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.



Vektoritulot fysiikassa

- Magneettikentän Lorentzin voima:
- Virta I. (Hiukkaustasolla, $I = q\mathbf{v}$, jossa q on lataus ja $\mathbf{v}$ on nopeus).
- B magneettikenttä.
- $F = I \times B$ "johtoa vetäävä" Lorentzin voima.



Vektoriavaruuden aksioomat

Määritelmä

Olkoon V joukko, olkoot $+ : V \times V \to V$ ja $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ operaatiot, ja olkoon $\mathbf{0} \in V$ alkio siten, että kaikille $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ pätee:

- $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
- $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
- $(ab)\mathbf{u} = a(b\mathbf{u})$

Tällöin V kutsutaan *vektoriavaruudeksi* (yli $\mathbb{R}$).

Vektoriavaruudet

Esimerkki

Seuraavat joukot moudustavat vektoriavaruuksia:

- Geometristen vektorien joukko Eukliidisessa tasossa.
- Geometristen vektorien joukko Eukliidisessa avaruudessa.
- Sarakevektorien joukko $\mathbb{R}^n$. (jokaiselle n).
- Polynomien (yli $\mathbb{R}$) joukko.

Lineaarikombinaatiot

- Vektorien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *lineaarikombinaatio*, tai *lineaariyhdistely* on muotoa
$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$
esitettävä vektori.

Esimerkki

- Vektorien $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ lineaarikombinaatio on muodolla
$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + a_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$
esitettävä vektori.
- Siispä kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit ovat *kantavektorien* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$

Lineaarikombinaatiot

Esimerkki

- Vektorien $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ lineaarikombinaatio on muodolla

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$$

  esitettävä vektori.

- Toisin sanoen, nämä ovat kaikki vektorit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ joille pätee

$$z = 0.$$

Lineaarikombinaatiot

Esimerkki

- Vektorien $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ lineaarikombinaatio on muodolla

$$\mathbf{v} = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a+b\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

  esitettävä vektori.

- Toisin sanoen, nämä ovat kaikki vektorit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ joille pätee

$$x + z = y.$$

Lineaarinen riippuvuus

- Joukko vektoreita $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ on *lineaarisesti riippuva*, jos on olemassa reaaliluvut $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, eivät kaikki 0, siten, että
$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$
- Jos yhtälön
$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$
ainoa ratkaisu on $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, niin joukko $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ on *lineaarisesti riippumatton*.

Lineaarinen riippuvuus

Esimerkki

- Vektorit $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ ovat lineaarisesti riippumattomat, sillä yhtälöllä

$$\mathbf{0} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

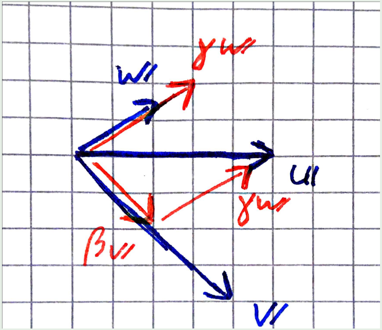
  on ainoana ratkaisuna $a = b = 0$.
- Kaksi rinnakkaista vektoria $\mathbf{v}$ ja $\alpha\mathbf{v}$ ovat aina lineaarisesti riippuvat.
- Vektorit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippuvat, sillä

$$\mathbf{0} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lineaarinen riippuvuus

Esimerkki

- Kolme vektoria tasossa ovat aina lineaarisesti riippumattoimia:



Lineaarinen riippuvuus

Esimerkki

- "Algebrallisemmin": Vektorit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippuvat, sillä:
  - $$\mathbf{0} = (cf - de)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (be - af)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + (ad - bc)\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$
  - Ainakin yksi kertoimista on $\neq 0$, paitsi jos kaikki vektorit ovat rinnakkaisia.

Lineaarinen riippuvuus

- Seuraava lause tosistetaan myöhemmin kurssissa.

Lause

- *Olkoot vektorit* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ *lineaarisesti riippumattomat.*
- *Tällöin näiden lineaarikombinaatiot muodostavat* $\mathbb{R}^n$*:n ala-avaruuden* $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$*, jonka määrittää* $n - m$ *yhtälöä.*

- Erityisesti, $\mathbb{R}^n$:ssä on korkeintaan n lineaarisesti riippumatonta vektoria.
- Jos valitaan n vektoria satunnaisesti $\mathbb{R}^n$:stä, niin ne ovat *melkein varmasti* (mitä se nyt tarkoittaakaan) lineaarisesti riippumatonta.

Lineaarinen riippuvuus

Esimerkki

- $$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \right\}$$
- $$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + z = y \right\}$$
- $$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y = z \right\}$$

Lineaarikuvaukset

- Lineaarikuvaukset ovat "vektoreille luonnollisia" funktioita.
- Tutkitaan taloustieteessa, tietotieteessa, tietokonegrafiikassa, sähkömagnetiikassa...

Määritelmä

Funktio $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ on *lineaarinen* (eli lineaarikuvaus), jos

(i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$ kaikille $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$

(ii) $T(c\mathbf{u})=cT(\mathbf{u})$ kaikille $c\in\mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$.

- Erityisesti, mielivaltaiselle $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ pätee

$$T(\mathbf{0})=T(0\mathbf{u})=0\,T(\mathbf{u})=\mathbf{0}.$$

Lineaarikuvaukset

Esimerkki (Tason venytys)

 $\longrightarrow$ 

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ y \end{pmatrix}$$

Esimerkki (Tason kierto eli rotaatio)

 $\longrightarrow$ 

$$r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \mapsto r\begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Lineaarikuvaukset

Esimerkki (Tason peilaus)

 $\longrightarrow$ 

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Esimerkki (Tason projekio)

 $\longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineaarikuvaukset

Kaikki tason lineaarikuvaukset (eli kuvaukset $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ovat)

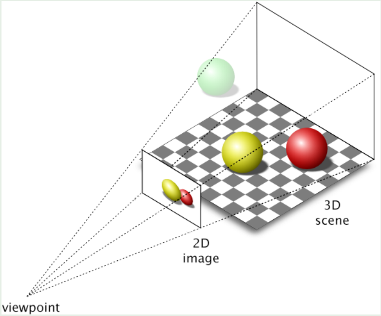
- venytyksiä
- peilauksia
- kiertoja
- projektioita

tai näiden yhdisteitä.

Lineaarikuvaukset

Esimerkki (Avaruuden projektio tasolle)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - z \\ y - z \end{pmatrix}$$



Lineaarikuvaukset

Määritelmä

Funktio $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ on *lineaarinen* (eli lineaarikuvaus), jos

(i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$ kaikille $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$

(ii) $T(c\mathbf{u})=cT(\mathbf{u})$ kaikille $c\in\mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$.

- Ehdot voidaan (induktioperiaatteen nojalla) lausua myös yhdessä:

$$T(c_1\mathbf{u_1}+\ldots+c_k\mathbf{u_k})=c_1T(\mathbf{u_1})+\ldots+c_kT(\mathbf{u_k})$$

kaikille $k\in\mathbb{N}$, kaikille $c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{R}$ ja kaikille $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k\in\mathbb{R}^n$.

- *Lineaarikuvaus säilyttää lineaarikombinaatiot.*

Lineaarikuvaukset

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *suora* on joukko

$$\{\mathbf{u} + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n,$$

missä $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ on eräs suoran piste ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ on suoran suuntavektori.

Lause

Lineaarikuvaus kuvaa suoran suoraksi.

Todistus.

Luentoharjoitus. □

Lineaarikuvaukset

- Kuvaus joka “ei näytä samalta kaikialla” ei ole lineaarinen.

Esimerkki (Ei lineaarikuvausta)

 $\longrightarrow$ 

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

- Lineaarikuvauksen ja translaation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ yhdistetty kuvaus on *affiinikuvaus*.

Esimerkki (Affiinikuvaus)

Funktio $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-4$, ei ole lineaarinen, vaan affiini.

Lineaarikuvaukset

- Olkoon

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \in V.$$

- Jos $T : R^n \to U$ on lineaarikuvaus, niin

$$T(\mathbf{v}) = T(v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n) = v_1 T(\mathbf{e}_1) + \cdots + v_n T(\mathbf{e}_n).$$

- Joten kuvaus T on yksikäsittäisesti määritelty, jos tiedämme

$$[T(\mathbf{e}_1), \cdots, T(\mathbf{e}_n)].$$

Matriisit

Määritelmä

Olkoon $T : \mathbb{R}^n \to U$ lineaarikuvaus, ja olkoon $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ avaruuden V kanta. Vektorijono

$$[T(\mathbf{e}_1), \cdots, T(\mathbf{e}_n)]$$

kutsutaan kuvauksen T *matriisiesitys* (luonnollisessa kannassa $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$).

- Jos $U = \mathbb{R}^m$, niin jokainen $f(\mathbf{e}_i)$ on m-ulotteinen sarakevektori.
- Tällöin matriisi T on m rivin ja n sarakkeen taulukko

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

- Tällainen taulukko kutsutaan $m \times n$-matriisiksi.

Matriisit

Esimerkki (Tason venytys)

 $\longrightarrow$ 

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Matriisiesitys: $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriisit

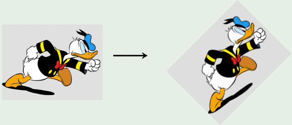
Esimerkki (Tason peilaus)


$\longrightarrow$


- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Matriisiesitys: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriisit

Esimerkki (Tason kierto)



- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
- Matriisiesitys: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriisit

Esimerkki (Tason kierto)

 $\longrightarrow$ 

- Kulma θ (vastapäivään)
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$
- Matriisiesitys: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Lineaarikuvaukset

- Käytetään kuvauksen f matriisiesitys

$$\left[\ f(\mathbf{e}_1)\cdots f(\mathbf{e}_n)\ \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

laskemaan $f(\mathbf{v})$ mielivaltaiselle vektorille $\mathbf{v}$.

-

$$f\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + v_n f(\mathbf{e}_n) = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 a_{11} + \cdots + v_n a_{1n} \\ \vdots \\ v_1 a_{m1} + \cdots + v_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriisien kertolasku

Määritelmä

Matriisin $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ja sarakevektorin $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tulo on sarakevektori

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_{11} + \cdots + v_n a_{1n} \\ \vdots \\ v_1 a_{m1} + \cdots + v_n a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

- Matriisin ja vektorin tulo on määritelty ainoastaan jos matriisin sarakkeiden määrä on yhtä kuin vektorin rivien määrä.

Matriisien kertolasku

Esimerkki

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ -1\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esimerkki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+0+0 \\ 0+y+0 \\ 0+0+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriisien kertolasku

- Mielenvaitaiselle n, neliömatriisi

$$I_n = \mathbf{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ & 0 & & \cdots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \cdots & & 0 & \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(jossa n riviä ja n saraketta) on identiteettikuvauksen

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$$

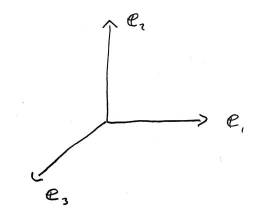
matriisiesitys.
- Tämä kutsutaan (n-ulotteiseksi) *identiteettimatriisiksi*.

Matriisien kertolasku

Esimerkki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ y-z \end{pmatrix}.$$

- Tämä on sama projektio $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ kuten ennen.
- "Piiretään 3-ulotteinen kanta paperiarkkiin."

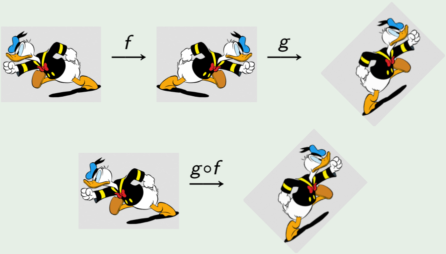


Yhdistetty lineaarikuvaus

- Olkoot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ lineaarikuvauksia.
- Niiden yhdistelmä $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ on myös lineaarinen.
- $g \circ f(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{v}))$

Esimerkki

- Peilauksen ja kierron yhdiste.



Yhdistetty lineaarikuvaus

Lause

- *Olkoot* $f : U \to V$ *ja* $g : V \to W$ *lineaarikuvauksia.*
- *Niiden yhdistelmä* $g \circ f : U \to W$ *on myös lineaarinen.*
- $g \circ f(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{v}))$

Todistus.

- Olkoot $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$, $c \in \mathbb{R}$. Then

$$\begin{aligned} g \circ f(\mathbf{u} + c\mathbf{u}') &= g(f(\mathbf{u} + c\mathbf{u}')) \\ &= g\left(f(\mathbf{u}) + cf(\mathbf{u}')\right) && f \text{ lineaarinen} \\ &= g(f(\mathbf{u})) + cg(f(\mathbf{u}')) && g \text{ lineaarinen} \\ &= g \circ f(\mathbf{u}) + cg \circ f(\mathbf{u}) && \square \end{aligned}$$

Yhdistetty lineaarikuvaus

Esimerkki (Jatkuu)

- Peilauksen ja kierron yhdiste:

- Kuvauksen f matriisiesitys: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Kuvauksen f matriisiesitys: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- Mikä on kuvauksen $g \circ f$ matriisi?

Yhdistetty lineaarikuvaus

Esimerkki (Jatkuu)

- Kuvauksen f matriisiesitys: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Kuvauksen f matriisiesitys: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- Mikä on kuvauksen $g \circ f$ matriisi?
- $$(g \circ f(\mathbf{e}_1) \; g \circ f(\mathbf{e}_2)) = (g(-\mathbf{e}_1) \; g(\mathbf{e}_2)) = \begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Yhdistetty lineaarikuvaus

Esimerkki (Jatkuu)

- Kierron ja peilauksen yhdiste:

- Mikä on kuvauksen $f \circ g$ matriisi? (Huom: $f \circ g \neq g \circ f$.)
- $$\begin{aligned}(f \circ g(\mathbf{e}_1)\ f \circ g(\mathbf{e}_2)) &= \left(f\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}\ f\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix}-\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Yhdistetty lineaarikuvaus

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ kuvauksen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ matriisi.
- $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix}$ kuvauksen $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ matriisi.
- Mikä on kuvauksen $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ matriisi?
- $$(g \circ f(\mathbf{e}_1) \ \cdots \ g \circ f(e_n)) = \left(g \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdots \ g \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

Yhdistetty lineaarikuvaus

- Kuvauksen $g \circ f$ matriisi on

$$\left(g\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdots\ g\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right).$$

- Muistakaa matriisin ja vektorin kertolasku:

$$g\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \cdots + b_{1m}v_m \\ \vdots \\ b_{k1}v_1 + b_{k2}v_2 + \cdots + b_{km}v_m \end{pmatrix}.$$

Yhdistetty lineaarikuvaus

- Siispä kuvauksen $g \circ f$ matriisi on

$$\begin{pmatrix} B\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} & \cdots & B\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + \cdots + b_{1m}a_{m1} & \cdots & b_{11}a_{1n} + \cdots + b_{1m}a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}a_{11} + \cdots + b_{km}a_{m1} & \cdots & b_{k1}a_{1n} + \cdots + b_{km}a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

- *Määritelemme* kaavalla (1) matriisien B ja A tulo BA.
- Matriisin $C = BA$ alkio c_{ij} on matriisin B rivin i ja matriisin A sarakkeen j skalaaritulo.

Matriisien kertolasku

- Matriisin $C = BA$ alkio c_{ij} on matriisin B rivin i ja matriisin A sarakkeen j skalaaritulo.
- Matriisitulo ei todellakaan ole vaihdannainen: $AB \neq BA$ (yleensä).

Esimerkki

- $$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot2+2\cdot3 & 3\cdot1+2\cdot2 \\ 1\cdot2+4\cdot3 & 1\cdot1+4\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}.$$
- $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot3+1\cdot1 & 2\cdot2+1\cdot4 \\ 3\cdot3+2\cdot1 & 3\cdot2+2\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

Matriisien kertolasku

- Matriisin $C = BA$ alkio c_{ij} on matriisin B rivin i ja matriisin A sarakkeen j skalaaritulo.
- Tämä vaatii että B:n sarakkeiden määrä on yhtä kuin A:n rivien määrä.
- Muistisääntö: $(n \times m)(m \times k) = (n \times k)$

Esimerkki

- $$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 14 \\ 14 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$
- Tulo
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$
ei ole olemassa.

Transpoosi

- Notaatio: Matriisin

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix}$$

transpoosi on

$$B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix}.$$

Matriisien kertolasku

- Olkoon A $(n \times m)$-matriisi, ja B, C $(m \times k)$-matriiseja.
- Jos $t \in \mathbb{R}$, niin tA on $(n \times m)$-matriisi jossa paikassa (i, j) on a_{ij}.
- $B + C$ on $(m \times k)$-matriisi jossa paikassa (i, j) on $b_{ij} + c_{ij}$. Huom: matriiseilla B ja C on samat dimensiot.
- Nyt pätee (tarkista!)
  - $(AB)^T = B^T A^T$.
  - $(tA)B = A(tB) = t(AB)$ jos $t \in \mathbb{R}$.
  - $A(B + C) = AB + AC$.

Matriisien kertolasku

- Jos $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $h:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, niin

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = (h \circ g) \circ f(x).$$

- Jos kuvauksien f, g, h matriisit ovat A, B, C, tästä seuraa matriisien kertolaskun *liitännäisyys*

$$C(BA) = (CB)A.$$

Matriisien kertolasku

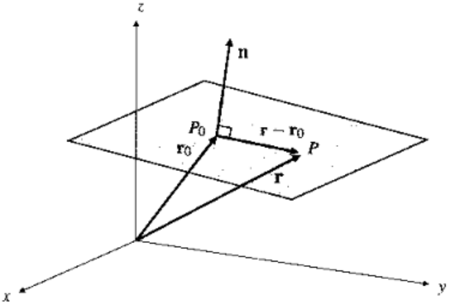
Esimerkki

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Geometrisesti: Projisoidaan ensin y-akseliin matriisilla $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tämän jälkeen projisoidaan x-akseliin matriisilla $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, jolla y-akseli projisoidaan nollaan.

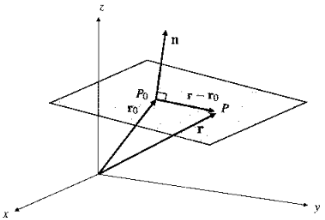
- Siistpä tulo AB voi olla nolla, vaikka kumpikaan matriisi ei olisi nollamatriisi!

Normaalivektori

- Olkoon $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ piste avaruudessa, ja olkoon $\mathbf{n}$ geometrinen vektori.
- Pisteet P, jolle pätee $\vec{P_0P} \perp \mathbf{n}$, muodostavat *tason* Π.
- $\mathbf{n}$ on tämän tason *normaali*.



Tason yhtälö



- Jos normaali $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, ja $P = (x, y, z)$ niin saadaan yhtälö

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \vec{P_0 P} \perp \mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Tason yhtälö

- Yhtälö

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \vec{P_0 P} \perp \mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

voidaan kirjoittaa muodolla

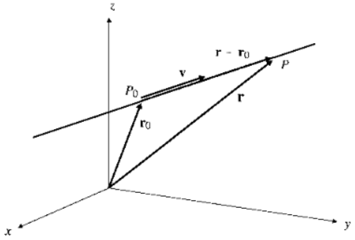
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

eli

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 =: d$$

Suoran parametrisointi

- Olkoon $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ piste avaruudessa, ja olkoon $\mathbf{v}$ geometrinen vektori.



- Pisteet P, jolle pätee $\vec{P_0 P} \parallel \mathbf{v}$ muodostavat *suoran* L.
  - **Notaatio:**

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \alpha \mathbf{v} \text{ jollekin } \alpha \Leftrightarrow \mathbf{u} \text{ ja } v \text{ ovat yhdensuuntaiset}$$

- $\mathbf{v}$ on tämän suoran *suuntavektori*.

Suoran parametrisointi

- Olkoon $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ piste avaruudessa
- Olkoon L P_0:n läpi menevä suora, jolla on suuntavektori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
- Tällöin suoran L *parametrimuodossa* on

$$\{(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Suoran parametrisointi

Esimerkki

- Olkoon L suora pisteiden $(1,1,0)$ ja $(4,-1,-2)$ läpi.
- Mikä on tämän yhtälö parameterimuodossa?
- Sen *suuntavektori on* $\begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-1 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- *Sen parametrisointi on siis*

$$\{(1+3t, 1-2t, 0-2t) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1+3t, 1-2t, -2t) : t \in \mathbb{R}\}$$

Suoran parametrisointi

Esimerkki

- Olkoon $L = \{(1+3t, 1-2t, -2t) : t \in \mathbb{R}\}$ kuten viime esimerkissä.
- Olkoon Π taso pisteen $(2,0,1)$ läpi, ja vastakohtainen L:ia vastaan.
- Mikä on tason yhtälö?

Suoran parametrisointi

Esimerkki

- $L = \{(1+3t, 1-2t, -2t) : t \in \mathbb{R}\}$, $P_0 = (2,0,1)$.
- Suoran L *suuntavektori* $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ on tason Π *normaali*.
- Yhtälö on siis
$$ax + by + cz = 3x - 2y - 2z = d$$
jollekin d.
- Tiedetään, että yhtälö pätee kun $(x,y,z) = (2,0,1)$, joten
$$d = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 4.$$
- **Vastaus:**
$$3x - 2y - 2z = 4.$$

Projektio tasoon

- Olkoon $P = (x_0, y_0, z_0)$ piste, ja olkoon Π taso, jolla on yhtälö

$$ax + by + cz = d.$$

- Mikä on pisteen P *projektio*, eli lähin piste, tasossa Π?
- Olkoon projektio Q. Tällöin $\vec{QP} \perp \Pi$, joten

$$\vec{QP} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ jollekin } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Jos $Q = (x, y, z) = (x_0 + \alpha a, y_0 + \alpha b, z_0 + \alpha c)$, saadaan siis yhtälö

$$a(x_0 + \alpha a) + b(y_0 + \alpha b) + c(z_0 + \alpha c) = d$$

(muuttujalla α).

Etäisyys tasoon

- Olkoon $P = (x_0, y_0, z_0)$ piste, ja olkoon Π taso, jolla on yhtälö
$$ax + by + cz = d.$$
- Mikä on pisteen P *etäisyys*? tasoon Π?
- Etäisyys on $\|\vec{QP}\|$, jossa Q on P:n projektio tasoon.
- $\vec{QP} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, jossa

$$\begin{aligned} d &= a(x_0 + \alpha a) + b(y_0 + \alpha b) + c(z_0 + \alpha c) \\ &= ax_0 + by_0 + cz_0 + \alpha(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= ax_0 + by_0 + cz_0 + \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\|^2. \end{aligned}$$

- Perinteisesti yhtälöryhmät ratkaistaan lisäämällä ja vähentämällä yhtälöitä toisistaan, jollakin kertoimilla painotettuina.
- Tämä ei muuta ratkaisujen joukko.
- Esimerkkiksi, yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} 2x + 2y + z + w & = 0 \\ x + y & = 1 \end{cases} \tag{2}$$

on samat ratkaisut kuin yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} z + w & = -2 \\ x + y & = 1 \end{cases}, \tag{3}$$

joka saadaan ryhmästä (2) vähentämällä kaksi kertaa toista yhtälöä ensimäisestä yhtälöstä
- Yhtälöryhmät (2) ja (3) ovat *yhtäpitävät*.

Lineaariset yhtälöryhmät

Esimerkki

- Ratkaistaan seuraava yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ \quad\;\; y + 2z = 3 \\ 2x \quad\;\; + z = 6 \end{cases}$$

- Vähennetään kaksi kertaa ensimmäistä yhtälöä kolmannesta.
- $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ \quad\;\; y + 2z = 3 \\ \quad - 4y - 5z = -18 \end{cases}$$

Lineaariset yhtälöryhmät

Esimerkki

- $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ \phantom{x +{}} y + 2z = 3 \\ - 4y - 5z = -18 \end{cases}$$
- Lisätään neljä kertaa toista yhtälöä kolmanteen.
- $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ \phantom{x +{}} y + 2z = 3 \\ \phantom{x + 2y +{}} 3z = -6 \end{cases}$$

Lineaariset yhtälöryhmät

Esimerkki

- $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ y + 2z = 3 \\ 3z = -6 \end{cases}$$
- Jaetaan kolmas yhtälö kolmella.
- Vähennetään kaksi kertaa kolmasta yhtälöä toisesta.
- $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ y = 7 \\ z = -2 \end{cases}$$

Lineaariset yhtälöryhmät

Esimerkki

- $$\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ y = 7 \\ z = -2 \end{cases}$$
- Vähennetään kolme kertaa kolmasta yhtälöä ja kaksi kertaa toista yhtälöä ensimmäisestä.
- $$\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \\ z = -2 \end{cases}$$

- Tämä on *Gaussin eliminaatio*; mekaaninen algoritmi ratkaisemaan minkä tahansa lineaarinen yhtälöryhmä.

Yhtälöryhmä matriisimuodossa

- Seuraavaksi tulkitaan lineaariset yhtälöryhmät matriisien avulla.
- Tarkastellaan esimerkkinä lineaarista yhtälöparia

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

- Matriisimuodossa tämä kirjoitetaan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Yhtälöryhmä matriisimuodossa

- **Tulkinta 1:** kumpikin yhtälöparin yhtälö kuvaa suoraa tasossa $\mathbb{R}^2$, ja mahdollinen ratkaisu $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ on suorien leikkauspiste.
- **Tulkinta 2:** matriisi $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ määrittelee *kuvauksen* (= funktion) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Halutaan löytää vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, jolle $A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Yhtälöryhmä matriisimuodossa

- **Yleisesti:** Lineaarinen yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä annettuina ovat $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, ja halutaan ratkaista $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Yhtälöryhmä matriisimuodossa

- **Tulkinta 1:** kukin rivi $a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$ $(1 \le k \le m)$ on yhtälö *hypertasolle* avaruudessa $\mathbb{R}^n$. (Suora, kun $n = 2$; taso, kun $n = 3$.) Mahdollinen ratkaisu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on kaikille hypertasoille (m kpl) yhteinen piste.
- **Tulkinta 2:** Matriisi A määrittelee kuvauksen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Etsitään vektoria $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, joka kuvautuu vektoriksi $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Yhtälöryhmä matriisimuodossa

Esimerkki

Tarkastellaan yhtälöryhmän eri tulkintoja seuraavissa kahdessa tapauksessa.

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Liittomatriisi

- Matriisiyhtälö

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

voidaan kirjoittaa kompaktimmin *liittomatriisina*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Gaussin eliminaatio

- *Gaussin eliminaatio* on lineaarisen yhtälöryhmän manipulointi

$$[A \mid \mathbf{b}],$$

  manipulointi *rivioperaatioilla*, jotka eivät muuta ratkaisujen joukkoa:
  - lisäämällä yhtälön toiselle, jollakin kertoimilla painotettuina.
  - vaihtamalla kahden yhtälön järjestys.
  - kertomalla yhtälön vakiolla $c \neq 0$
- Muistathan, että liittomatriisin *rivit* ovat yhtälöryhmän *yhtälöt*.

Gaussin eliminaatio

Esimerkki

- Ratkaistaan (uudelleen) yhtälöryhmä:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 12 \\ & & y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & & & + & z & = & 6 \end{array}\right.$$

- Matriisimuodolla kirjoitetaan:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&|&12\\0&1&2&|&3\\2&0&1&|&6\end{pmatrix}\begin{array}{l}-2\\ \\ +\end{array} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&|&12\\0&1&2&|&3\\0&-4&-5&|&-18\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 4\\ +\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&2&3&|&12\\0&1&2&|&3\end{pmatrix} \qquad \sim \begin{pmatrix}1&2&3&|&12\\0&1&2&|&3\end{pmatrix}\begin{array}{l}+\\ +\end{array}$$

Gaussin eliminaatio

Esimerkki (Jatkuu)

$$\cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 12 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 18 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

- Ratkaisut ovat siis:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \\ z = -2 \end{cases}$$

Gaussin eliminaatio

Esimerkki

- Etsi yhtälöryhmän kaikki ratkaisut, kun

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 10x_4 & = 6 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 11x_3 & + & 14x_4 & = 7 \end{array}\right. \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- **Ratkaisu:** Kirjoitetaan yhtälö matriisimuotoon $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, eli

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 11 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Gaussin eliminaatio

- Ennen kuin sijoitamme liittomatriisiin oikealle puolelle vektorin $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, suoritetaan eliminaatioaskeleet yleisellä $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & b_2 \\ 3 & 6 & 11 & 14 & b_3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right)$$

Gaussin eliminaatio

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_3 - b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

- Jotta viimeiselle riville ei syntyisi ristiriitaa, on pädettävä

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0.$$

  Tämä on *konsistenssiehto*.
- Annetulla vektorilla $7 - 6 - 1 = 0$, joten ristiriitaa ei synny.

Gaussin eliminaatio

- Palataan sitten annettuun vektoriin **b**, jolloin saadaan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 6-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 7-6-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow\!\urcorner\, + \\ |:2 \;\lrcorner\, -3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriisi A on nyt saatettu *redusoituun porrasmuotoon*. Tämä tarkoittaa muotoa, jossa jokaisen rivin ensimmäinen nollasta poikkeava alkio on 1 ja alemmalla rivillä on alussa nollia aina useampi kuin ylemmällä.

Gaussin eliminaatio

- Jaetaan muuttujat
  a) kiinnitetyiksi (x_1, x_3)
  b) vapaiksi (x_2, x_4)
- Miksi nämä nimet?
- Vapaat voi korvata parametreilla ja ratkaista kiinnitetyt niiden avulla.
- Olkoon $x_2 = s$, $x_4 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$. Ratkaistavana on siis

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ s \\ x_3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gaussin eliminaatio

- Helpoiten loppu onnistuu kirjoittamalla ongelma takaisin yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} x_1 + 2s + t = -5 \\ x_3 + t = 2 \end{cases}.$$

- Tästä saadaan ratkaistua kiinnitetyt muuttujat x_1 ja x_3 vapaiden avulla:

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2s - t \\ x_3 = 2 - t \end{cases}.$$

Gaussin eliminaatio

- Saatiin siis yhtälöt

$$\begin{cases} x_1 = -5 - 2s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = 2 - t \\ x_4 = t \end{cases},$$

missä $s, t \in \mathbb{R}$.

- Toisin sanoen, kaikki muotoa

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

olevat vektorit toteuttavat siis alkuperäisen yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, eli ratkaisuita on ääretön määrä.

Gaussin eliminaatio

- **Huom.** Vapaiden muuttujien kerroinvektorit $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ratkaisevat yhtälön $A\mathbf{x} = 0$, eli samaa matriisia vastaavan homogeenisen yhtälön. Myös kaikki niiden lineaarikombinaatiot ratkaisevat homogeenisen yhtälön.
- Sanotaankin, että matriisin A *ydin* on yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = 0$ ratkaisuiden joukko, eli tässä tapauksessa

$$\mathcal{N}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \;\; \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

Gaussin eliminaatio

Esimerkki

Etsi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

kaikki ratkaisut.

Vastaus: $\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$

Riviekvivalenssi

- Jos lineaarisesta yhtälöstä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saadaan rivioperaatioin $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, merkitään
$$[A \mid \mathbf{b}] \quad \sim \quad [C \mid \mathbf{d}].$$
- Tällöin liittomatriisit $[A \mid \mathbf{b}]$ ja $[C \mid \mathbf{d}]$ ovat *riviekvivalenttejä*.
- Huom: Jos liittomatriisit ovat riviekvivalenttejä, niin niillä on samat ratkaisut.

Redusoitu porrasmatriisi

- Jokainen matriisi A on riviekvivalentti jonkin *redusoituun porrasmatriisin* kanssa.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \color{red}{1} & * & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & * & \cdots & 0 & * \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \color{red}{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right)$$

- Symboli $*$ tarkoittaa mielivaltainen alkio joukossa $\mathbb{R}$.
- Punaiset alkiot kutsutaan *tukialkioiksi* (“pivotal elements”).
- Rivi jolla ei ole tukialkiota vastaa yhtälöön $0 = *$.
- Siispä yhtälöryhmällä on ratkaisuja jos ja vain jos joikaisen sellaisen rivin oikeakin puoli on 0.

Redusoitu porrasmatriisi

- Redusoitu porrasmatriisi:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & * & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right)$$

- Jokaisella rivillä (joka ei koostu pelkästään nolloista) on tukialkio 1.
- Tukialkiosta vasemalla, kaikki alkiot ovat 0.
- Alemmalla rivillä on alussa nollia aina useampi kuin ylemmällä.
- Tukialkiot ovat sarakkeensa ainoat nollasta poikkeavat alkiot.

Redusoitu porrasmatriisi

- Redusoitu porrasmatriisi:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & * & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right)$$

- Sarake, jolla ei ole tukialkiota, vastaa yhtälöryhmän vapaan muuttujaan.
- Jos porrasmatriisilla on rivi $(0 \cdots 0 | *)$, jossa $* \neq 0$, niin yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja.
- Muuten, ratkaisujoukon dimensio on yhtä kuin ei-tukialkio-sarakkeiden lukumäärä.

Yhtälöryhmä geometrisena

- Matriisin A *ydin* (tai nolla-avaruus)

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- Matriisin A *kuva-avaruus* (tai sarakeavaruus)

$$\mathcal{C}(A) = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

  Jos ratkaisua ei ole olemassa, tulkitaan, että $\mathbf{b} \notin \mathcal{C}(A)$.

- Huom: Sekä $\mathcal{C}(A)$ että $\mathcal{N}(A)$ ovat vektoriavaruudet. Erityisesti pätee $\mathbf{0} \in \mathcal{N}(A)$ ja $\mathbf{0} \in \mathcal{C}(A)$.

Yhtälöryhmä geometrisena

- Ratkaisuja voi olla
  - 0 kpl: Yhtälöiden määritämät hypertasot eivät leikkaa, eli $\mathbf{b} \notin \mathscr{C}(A)$, eli redusoidussa porrasmuodossa on rivi $(0|*)$, jossa $* \neq 0$.
  - 1 kpl: Yhtälöiden määritämät hypertasot leikkaavat yhdessä pisteessä, eli $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ on riippumaton ja $\mathbf{b} \in \mathscr{C}(A)$, eli jokaisessa redusoidun porrasmatriisin sarakkeessa on tukialkio.
  - ∞ kpl: Hypertasot leikkaavat pitkin suoraa/tasoa, eli "A:n ydin $\mathscr{N}(A)$ on ei-triviaali"ja $\mathbf{b} \in \mathscr{C}(A)$, eli redusoidussa porrasmatriisissa on sarake ilman tukialkiota.

Gaussin eliminaatio

Esimerkki

- Eräs yksinkertainen talous koostuu hiili-, sähkö- ja terässektoreista.
- Sähkösektorin tuotannosta myydään 40% hiilisektorin käyttöön, 50% terässektorin käyttöön ja loput jää omaan käyttöön.
- Hiilisektorin tuotannosta sähköteollisuus ostaa 60% ja terästeollisuus 40%.
- Terässektorin tuotannosta puolestaan 60% myydään hiilisektorin käyttöön, 20% sähkösektorille ja loput omaan käyttöön.
- Merkitään sähkösektorin vuosituotannon arvoa p_s, hiilisektorin p_h ja terässektorin p_t. Etsi tasapainotila, jossa kunkin sektorin tulot ja menot vastaavat toisiaan.

Gaussin eliminaatio

Ratkaisu: Tasapainotilassa hiilisektorin vuosituotannon arvo p_h on yhtä suuri kuin sen menot. Menot koostuvat siitä, että ostetaan 40% sähkösektorin tuotannosta ja 60% terässektorin tuotannosta. Siis:

$$p_h = 0.40p_s + 0.60p_t.$$

Vastaavasti sähkö- ja terässektoreille:

$$\begin{aligned} p_s &= 0.60p_h + 0.20p_t + 0.10p_s \\ p_t &= 0.50p_s + 0.40p_h + 0.20p_t. \end{aligned}$$

(Huomaa, että näillä sektoreilla osa tuotannosta menee omaan käyttöön!) Saadaan siis yhtälöryhmä:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} p_h & -0.40p_s & -0.60p_t & = 0 \\ -0.60p_h & +0.90p_s & -0.20p_t & = 0 \\ -0.40p_h & -0.50p_s & +0.80p_t & = 0 \end{array} \right.$$

Gaussin eliminaatio

Kirjoitetaan tämä matriisimuodossa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.40 & -0.60 \\ -0.60 & 0.90 & -0.20 \\ -0.40 & -0.50 & 0.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_h \\ p_s \\ p_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaussin eliminaatiolla saadaan (pyöristettynä kahden luvun tarkkuudelle)

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.40 & -0.60 & | & 0 \\ -0.60 & 0.90 & -0.20 & | & 0 \\ -0.40 & -0.50 & 0.80 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.94 & | & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

joten yleinen ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} p_h \\ p_s \\ p_t \end{pmatrix} \approx p_t \begin{pmatrix} 0.94 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_t \in \mathbb{R}.$$

Gaussin eliminaatio

Esimerkki

Fotosynteesissä kasvi muuttaa auringonvalosta saamallaan energialla hiilidioksidia CO_2 ja vettä H_2O hapeksi O_2 ja glukoosiksi $C_6H_{12}O_6$. Reaktion kemiallinen yhtälö on siis

$$x_1 CO_2 + x_2 H_2O \;\rightarrow\; x_3 O_2 + x_4 C_6H_{12}O_6$$

Etsi kertoimet x_1, x_2, x_3, x_4.

Vastaus: Hiili-, vety- ja happiatomien lukumäärien täytyy pysyä vakioina, joten yhtälön kummallakin puolella niitä kutakin on sama määrä. Tästä saamme yhtälöryhmän, joka ratkaistaan Gaussin eliminaatiomenetelmällä. Vastaukseksi saadaan $x_1 = x_2 = x_3 = 6t$, $x_4 = t$, $s \in \mathbb{R}$.

Käänteisfunktiot

- $f : U \to V$ on *käännettävä* jos kaikille $\mathbf{v} \in V$ on **yksikäsitteinen** $\mathbf{u} \in U$ siten, että $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.
- Funktio $f : U \to V$ on käännettävä jos ja vain jos se on:
  - Injektio: $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}') \implies \mathbf{u} = \mathbf{u}'$.
  - Surjektio: Kaikille $\mathbf{v} \in V$ on olemassa $\mathbf{u} \in U$ siten, että $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.
- Käännettävällä funktiolla $f : U \to V$ on *käänteisfunktio* $f^{-1} : V \to U$ siten, että
$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \iff \mathbf{u} = f^{-1}(v).$$
- Jos $f^{-1} = g$, niin $g^{-1} = f$, ja
$$f \circ g = \mathrm{id}_V \text{ sekä } g \circ f = \mathrm{id}_U.$$

Käänteisfunktiot

Esimerkki

- Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ projektio "xy-tasoon", jolla on matriisi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ "tason upotus avaruuden xy-tasoksi", jolla on matriisi $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
  joten $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
- B on matriisin A "oikeanpuoleinen käänteismatriisi".

Käänteisfunktiot

Esimerkki

- Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ projektio "xy-tasoon", jolla on matriisi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ "tason upotus avaruuden xy-tasoksi", jolla on matriisi $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
  joten $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Käänteisfunktiot

Lause

- *Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineaarikuvaus.*
- *Jos* f *on injektio, niin* $n \leq m$.

Todistus.

- Kuvauksella f on $(m \times n)$-matriisiesitys A.
- f injektio $\Rightarrow$ Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on yksikäsitteinen ratkaisu.
- Ei vapaata muuttujaa $\Rightarrow$ matriisin A porrasmuodossa on tukialkio kaikissa sarakkeissa.
- Vain yksi tukialkio per rivi, joten riviä on ainakin yhtä monta kuin sarakkeita: $n \leq m$. $\square$

Käänteisfunktiot

Lause

- *Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineaarikuvaus.*
- *Jos* f *on surjektio, niin* $n \geq m$.

Todistus.

- Kuvauksella f on $(m \times n)$-matriisiesitys A.
- f surjektio $\Leftrightarrow$ Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ on ratkaisu kaikille $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$.
- Matriisin A porrasmuodossa ei ole nollariviä $\Rightarrow$ tukialkio kaikissa riveissä.
- Vain yksi tukialkio per sarake, joten sarakkeita on ainakin yhtä monta kuin rivejä: $m \leq n$. $\square$

Käänteisfunktiot

Lause

- *Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineaarikuvaus.*
- *Jos f on injektio, niin $n \leq m$.*
- *Jos f on surjektio, niin $n \geq m$.*

- Siispä, jos f on käännettävä, niin $n = m$.
- Funktio $f \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on käännettävä

$$\Leftrightarrow$$

f injektio

$$\Leftrightarrow$$

f surjektio

$$\Leftrightarrow$$

funktion f matriisi on riviekvivalentti identiteettimatriisin I_n kanssa.

Käänteisfunktiot

Lause

- *Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineaarikuvaus, ja olkoon* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *funktion* f *oikeanpuolinen käänteisfunktio (eli* $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$*).*
- *Tällöin pätee* $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$*, eli* g *on funktion* f *käänteisfunktio.*

Todistus.

- $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \implies f$ surjektio $\implies f$ injektio edellisen lauseen mukaan.
- Kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee $f(g(x)) = x$, joten $g(x)$ on *ainoa* (kun f on injektio) alkukuva $f^{-1}(x)$ of x.
- Siispä $g = f^{-1}$. $\square$

- Eli jos etsimme funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ käänteisfunktiota, niin riittää löytää oikeanpuolisen käänteisfunktion.

Käänteisfunktiot

- Jos A on käännettävän funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ matriisiesitys, niin käänteisfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ matriisiesitykselle A^{-1} pätee

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

- A on $(n \times n)$-neliömatriisi.
- Miten lasketaan $X = A^{-1}$?
- Ratkaistaan yhtälö $AX = I_n$.

Käänteismatriisit

- Ratkaistaan yhtälö

$$A\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = AX = I_n = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix}$$

- Tämä on matriisiyhtälöiden $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ ryhmä.
- Nämä matriisiyhtälöt ratkaistaan *yhtä aikaa* Gaussin eliminaatiomenetelmällä.
  - Rivioperaatiot riippuu matriisista A, eikä yhtälöiden oikeasta puolesta.
- Jos $(A|I_n) \sim (I_n|B)$, niin $B = A^{-1}$.
- Jos $A \sim I_n$ ei päde, niin A ei ole käännettävää.

Käänteismatriisit

Esimerkki

- Laske matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi.
- Tehdään Gaussin eliminaatio liittomatriisille $(A|I_3)$:

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\end{array}
\begin{array}{l} -2 \\ \\ + \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ 4 \\ + \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right)
$$

Käänteismatriisit

Esimerkki (Jatkuu)

$$
\ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \quad + \\ -1 \quad -\frac{2}{3} \quad |/3 \end{array}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{4}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ -2 \\ \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)
$$

Käänteismatriisit

Esimerkki (Jatkuu)

- Laske matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi.
- Tehtiin Gaussin eliminaatio liittomatriisille $(A|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

- Joten $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Käänteismatriisit

Esimerkki

- Tarkistetaan: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = I_3$:
- $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+8-6 & -2-10+12 & 1-4+3 \\ 0+4-4 & 0-5+8 & 0-2+2 \\ 2+0-2 & -4+0+4 & 2+0+1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3. \end{aligned}$$

Säännöllisyys, eli ei-degeneroituneisuus

Lause

- *Olkoon A $(n \times n)$-matriisi. Seuraavat väiteet ovat yhtäpitäviä:*
  - *A on käännettävä.*
  - *A on riviekvivalentti identiteettimatriisin kanssa.*
  - *Matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat.*
  - *Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on yksikäsitteinen ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
  - *Yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu jokaiselle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.*

Kanta

Määritelmä

- Jos avaruuden V jokainen vektori on *yksikäsitteisesti* esitettävissä vektorien $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ lineaarikombinaationa, niin joukko $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ on avaruuden V *kanta*.
- Jos $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}$ on avaruuden V kanta, ja

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n,$$

niin luvut $a_1, \ldots, a_n$ kutsutaan vektorin $\mathbf{v}$ *koordinaatit* kannassa E.

- Jokaisella vektoriavaruudella on monta mahdollista kantaa.
- Kanta on aina lineaarisesti riippumaton.

Kanta

Esimerkki

- Vektorit

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{e}_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{e}_2}, \dots, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}^{\mathbf{e}_n}$$

  muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta. Tämä on avaruuden $\mathbb{R}^n$ *kanoninen* tai *luonnollinen* kanta.

- Jos

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

  niin $v_1, \dots, v_n$ ovat vektorin $\mathbf{v}$ koordinaatit luonnollisessa kannassa.

Kanta

Esimerkki

- $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta. Tämä on *ortonormaali*, eli jokaisen kantavektorin pituus on 1, sekä kantavektorit ovat kohtisuorat.
- $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ on toinen kanta $\mathbb{R}^3$:lle.
- Nimittäin, vektori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (b-c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Kanta F ei ole ortonormaali.

Kanta

Esimerkki

- $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta.
- $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ on toinen kanta $\mathbb{R}^3$:lle.
- $G = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ on ortonormaali (muttei luonnollinen) kanta $\mathbb{R}^3$:lle.
- Kaikki nämä kannat E, F, G koostuvat kolmesta vektorista. Tämä ei ole sattuma, vaan tarkoitta sen, että avaruuden $\mathbb{R}^3$ *dimensio* on 3.

Kanta

Lause (Vaihtoehtoinen määritelmä)

Joukko $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ *on vektoriavaruuden* V *kanta jos ja vain jos vektorit* $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ *ovat riippumatomat ja* $\langle \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n \rangle = V$*.*

Todistus.

- Jokainen $v \in V$ on vektorien $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ lineaarikombinaationa esitettävissä jos ja vain jos $\langle \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n \rangle = V$
- "$\Rightarrow$": Oleta, että jokainen $v \in V$ on *yksikäsiteisesti* esitettävissä $\mathbf{v}_i$-vektorien lineaarikombinaationa.
- Tällöin nollavektorin $\mathbf{0} \in V$ *ainoa* esitys

$$\mathbf{0} = x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n$$

  on $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Siispä vektorit $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ ovat riippumatomat.

Kanta

Lause (Vaihtoehtoinen määritelmä)

Joukko $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ *on vektoriavaruuden* V *kanta jos ja vain jos vektorit* $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ *ovat riippumatomat ja* $\langle \mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n \rangle = V$.

Todistus.

- Toisaalta, oleta, että on olemassa $v \in V$ joka on esitettävissä kahdella eri tavalla (eli *ei* yksikäsitteisesti):

$$y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n.$$

- Tällöin

$$\mathbf{0} = (x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n,$$

ja ainakin jokin kertoimista on $\neq 0$. Siispä vektorit $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ *eivät* ole riippumatomat. □

Dimensio

- Olkoon $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ avaruuden V kanta.
- Tällöin löytyy *käännettävä lineaarikuvaus* $V \leftrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$V \ni \mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

- "Esitetään vektoriavaruus V kannassa $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$."

Dimensio

Esimerkki

- Olkoon $P_2 \leq 2$-asteisten polynomien avaruus, luonnollisine kantoineen $\{1, x, x^2\}$.
- Tässä kannassa, polynomin $ax^2 + bx + c$ esittää vektori $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$.
- Samalla tavalla, vektori $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ esittää polynomin

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in P_n$$

luonnollisessa kannassa $\{1, x, x^2, \ldots x^n\}$.

Dimensio

- Olkoon $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ ja $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ avaruuden V kaksi eri kantaa.
- Tällöin löytyy *käännettävät lineaarikuvaukset* $\mathbb{R}^n \leftrightarrow V \leftrightarrow \mathbb{R}^m$, nimittäin V:n esittäminen kannoissa $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{e}$.
- Näiden yhdistetty kuvaus on käännettävä lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^m$.
- Mutta todistetiin äsken, että sellainen on olemassa jos ja vain jos $n = m$.
- Siispä kaikkien avaruuden V kannat ovat yhtä suuret.

Säännöllisyys, eli ei-degeneroituneisuus

Lause

- *Olkoon A $(n \times n)$-matriisi. Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*
  - *A on käännettävä.*
  - *A on riviekvivalentti identiteettimatriisin kanssa.*
  - *Matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat.*
  - *Matriisin A sarakkeet ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta.*
  - *Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on yksikäsitteinen ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
  - *Yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu jokaiselle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.*

Dimensio

- Kuten todistettiin, avaruuden V kaikki kannat ovat yhtä suuret.

Esimerkki

- Avaruudella $\mathbb{R}^3$ on kantana

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ sekä } \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

- Avaruudella P_2 (joka koostuu polynoomeista, jonka aste on ≤ 2) on kantana

$$\left\{1,x,x^2\right\} \text{ sekä } \left\{1,1+x,1+x^2\right\}.$$

- Avaruudella $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$ on kantana

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} \text{ sekä } \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Dimensio

- Kuten todistettiin, avaruuden V kaikki kannat ovat yhtä suuret.
- Tämä on avaruuden V *dimensio*, tai *ulottuvuus* $\dim V$.
- $$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Esimerkki

- Avaruudet $\mathbb{R}^3$, P_2, ja $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ ovat kaikki 3-ulotteisia.

Vektoriavaruuden määrittäminen

- Vektoriavaruus $V \subseteq \mathbb{R}^n$ voidaan määritä (ainakin) kahdella eri tavalla:
- "Parametrimuodolla":
  - Vektoreille $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$,

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle = \{x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots x_m \mathbf{v}_m\}$$

    on vektoriavaruus.
  - Jos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ ovat lineaarisesti riippumattomat, niin avaruuden dimensio on m.
- "Yhtälömuodolla":
  - Jos U on vektoriavaruus ja $f : \mathbb{R}^n \to U$ on lineaarikuvaus, niin

$$\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

    on vektoriavaruus.

Vektoriavaruuden määrittäminen

Esimerkki

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Määritelmä

Olkoon A $m \times n$-matriisi. Matriisin A *ydin*, tai *nolla-avaruus* on joukko

$$\mathcal{N}(A) = \ker A = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Esimerkki

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$$

Ydin

Määritelmä

Olkoon A $m \times n$-matriisi. Matriisin A *ydin*, tai *nolla-avaruus* on joukko

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- Matriisin ydin on aina vektoriavaruus, sillä jos $A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, niin $A(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = \mathbf{0}$.
- Huom: jos $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, niin joukko

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

ei ole vektoriavaruuta.

Riviavaruus sekä sarakeavaruus

Määritelmä

- Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_m \end{pmatrix}$$

  $(m \times n)$-matriisi, jossa $\mathbf{w}_i$ ovat rivivektorit ja $\mathbf{v}_i$ ovat sarakevektorit.
- Matriisin A *sarakeavaruus* on

$$\mathscr{C}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \subseteq \mathbb{R}^m.$$

- Matriisin A *riviavaruus* on

$$\mathscr{R}(A) = \mathscr{C}(A^T) = \left\langle \mathbf{w}_1^T, \ldots, \mathbf{w}_m^T \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Riviavaruus sekä sarakeavaruus

Esimerkki

- Olkoon
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
-
$$\mathscr{C}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2,$$
-
$$\mathscr{R}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Ydin

Esimerkki

- Olkoon
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
- $$\ker A = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{ccccc} x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & = 0 \\ x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 + & 4x_4 & = 0 \end{array} \right\}.$$
- Miten kirjoitetaan avaruus $\mathcal{N}(A)$ parametrimuodolla?
- Toisin sanoen, miten löydän avaruuden $\mathcal{N}(A)$ kannan?

Ydin

Esimerkki (Jatkuu)

- Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- $\mathcal{N}(A)$ koostuu yhtälöryhmän

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \text{ ratkaisuista.}$$

- $x_4 = t$ ja $x_3 = s$ vapaat muuttujat.
- $x_2 = -2s - 3t$ ja $x_1 = s + 2t$.

Ydin

Esimerkki (Jatkuu)

- $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A)$ jossa
  - $x_4 = t$ ja $x_3 = s$ vapaat muuttujat.
  - $x_2 = -2s - 3t$ ja $x_1 = s + 2t$.
- Vektorille $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A)$ pätee

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s+2t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Siispä

$$\mathcal{N}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Rivioperaatiot ja matriisin perusavaruudet

- Jos $A \sim B$, niin
$$\mathscr{R}(A) = \mathscr{R}(B).$$
- Matiisin A rivit ovat matriisin B rivien lineaarikombinaatiot, ja toisinpäin.
- $$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff B\mathbf{x} = 0,$$
joten
$$\ker A = \ker B.$$

Rivioperaatiot ja matriisin perusavaruudet

Esimerkki

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$
- $$\mathscr{R}(A) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\right\} = \mathscr{R}(B).$$
- $$\ker A = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = x_2 - x_3 = 0\right\} = \ker B.$$
- $$\mathscr{C}(A) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\} \neq \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\right\} = \mathscr{C}(B).$$

Rivioperaatiot ja matriisin perusavaruudet

- Sarakejoukko matriisissa A on lineaarisesti riippumaton jos ja vain jos se on lineaarisesti riippumaton matriisissa B.
- Siispä $\dim(\mathscr{C}(A)) = \dim(\mathscr{C}(A'))$.

Esimerkki

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$
- $$\dim(\mathscr{C}(A)) = 2 = \dim(\mathscr{C}(B)).$$

Rivioperaatiot ja matriisin perusavaruudet

- Olkoon B porrasmatriisi:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & * & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & * & \cdots & 0 & * \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \color{red}{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rivit, jossa on tukialkio, ovat riviavaruuden $\mathscr{R}(B)$ kanta.
- Sarakkeet, jossa on tukialkio, ovat sarakeavaruuden $\mathscr{C}(B)$ kanta.
- Joten $\dim(\mathscr{C}(B)) = \dim(\mathscr{R}(B))$!

Rivioperaatiot ja matriisin perusavaruudet

- Mielivaltainen matriisi A on riviekvivalentti porrasmatriisin B kanssa:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & * & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & * & \cdots & 0 & * \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \color{red}{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Joten

$$\dim(\mathscr{C}(A)) = \dim(\mathscr{C}(B)) = \dim(\mathscr{R}(B)) = \dim(\mathscr{R}(A)).$$

- Tämä on matriisin A *aste* (tai joskus *rangi*, englanniksi *rank*) $\mathrm{rk}(A)$.

Rivioperaatiot ja matriisin perusavaruudet

- Olkoon B porrasmatriisi:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & * & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & * & \cdots & 0 & * \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \color{red}{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rivistä, jossa *ei* ole tukialkiota, tulee nolla-avaruuteen $\mathcal{N}(B)$ vapaa muuttuja.
- Joten $\dim(\mathcal{N}(B)) = n - \dim(\mathcal{R}(B)) = n - \mathrm{rk}(B)$!

Säännöllisyys, eli ei-degeneroituneisuus

Lause

- *Olkoon A $(n \times n)$-matriisi. Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*
  - *A on käännettävä.*
  - *A on riviekvivalentti identiteettimatriisin kanssa.*
  - *A on sarakeekvivalentti identiteettimatriisin kanssa.*
  - *Matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat.*
  - *Matriisin A rivit ovat lineaarisesti riippumattomat.*
  - *Matriisin A sarakkeet ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta.*
  - *Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on yksikäsitteinen ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
  - *Yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu jokaiselle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.*

Aste

- Dimensio
$$\dim(\mathscr{C}(A)) = \dim(\mathscr{R}(A)).$$
on matriisin A *aste*, tai joskus *rangi*.
- "Mitä pienempi aste, sitä helpompi matriisilasku".
- Ison matriisin approksimaatio matriiseilla, joilla on pieni aste, on perustekniikka monissa sovelluksissa:
  - Koneoppiminen
  - Tilastotiede
  - Teoreettinen fysiikka
  - ...

Ortogonaalisuus

- Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aliavaruus.
- Sen *ortogonaalikomplementti* on

$$U^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \perp \mathbf{u} \text{ kaikille } \mathbf{u} \in U\}.$$

Esimerkki

$$U = \text{“x-akseli”} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U^\perp = \text{“yz-taso”} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Ortogonaalisuus

- Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aliavaruus.
- Sen *ortogonaalikomplementti* on

$$U^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \perp \mathbf{u} \text{ kaikille } \mathbf{u} \in U\}.$$

Esimerkki

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \text{(suora)}$$

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \text{(taso)}$$

Ortogonaalisuus

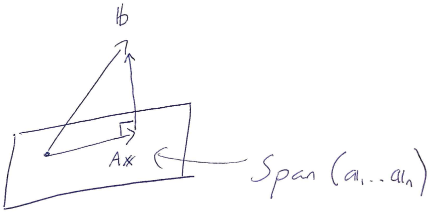
Esimerkki

$$
\begin{aligned}
U &= \mathscr{R}(A) && (m \times n)\text{-matriisille A} \\
U^\perp &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{ax} = 0 \text{ kaikille matriisin riville } \mathbf{a}\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = 0\} && = \mathscr{N}(A).
\end{aligned}
$$

- Kaikki vektoriavaruudet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ voidaan esittää jonkin $(m \times n)$-matriisin riviavaruutena.
- Kaikille avaruudelle $U \subseteq \mathbb{R}^n$ pätee $\dim U + \dim U^\perp = n$.
- Siispä $(U^\perp)^\perp = U$.

Ortogonaaliprojektio

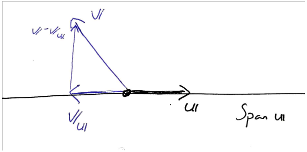
- Olkoon $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aliavaruus.
- Usein on syytä löytää vektorin $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ lähin vektori $\mathbf{v}_U \in U$ (*"projisoida vektori* $\mathbf{v}$ *avaruuteen* U).



- $$\mathbf{v}_U \in U \text{ ja } (\mathbf{v} - \mathbf{v}_U) \perp U.$$

Ortogonaaliprojektio

- Ensin: Projisoidaan **v** suoraan $\mathrm{Span}(\mathbf{u})$.



- $\mathbf{v_u} = t\mathbf{u}$ jollekin t.
- $(\mathbf{v} - \mathbf{v_u}) \perp \mathbf{u}$, joten

$$0 = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - t\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - t\|\mathbf{u}\|^2.$$

- Siispä $t = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}$, joten

$$\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}.$$

Ortogonaaliprojektio

Esimerkki

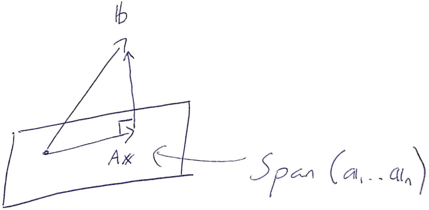
- Mikä on tasossa $\mathbb{R}^2$ olevan pisteen (a, b) lähin piste suorassa $x = y$?
- Suoralla $x = y$ on suuntavektori $\mathbf{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $$\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} = \frac{1a + 1b}{1^2 + 1^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{a + b}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
- Pisteen (a, b) projektio on $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$.

Ortogonaaliprojektio

- Projisoidaan vektori $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ avaruuteen

$$U = \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = \mathscr{C}(A),$$

  jossa A on $(n \times m)$-matriisi.
- Projektio on $\mathbf{b}_U = A\mathbf{x}$ jollekin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.



- Etsimme siis $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ siten että $\mathbf{b} - A\mathbf{x} \perp \mathscr{C}(A)$.

Ortogonaaliprojektio

- Etsimme siis $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ siten että $(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_i = 0$ kaikille matriisin A sarakkeelle $\mathbf{a}_i$.
- ...eli kaikille matriisin A^T *riville* $\mathbf{a}_i$.
- Nämä m yhtälöä kirjoitettuna yhteen on matriisiyhtälö

$$A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Ortogonaaliprojektio

- Etsimme siis $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ siten että
$$A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

- Eli: yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *approksimatiiviset* ratkaisut ovat täsmälleen yhtälöryhmän
$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$
tarkat ratkaisut.

Ortogonaaliprojektio

- Vektorin $\mathbf{b}$ lähin piste avaruudessa $U = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle = \mathscr{C}(A)$ on siis $A\mathbf{x}$, jossa
$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

- Jos vektorit $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ ovat lineaarisesti riippumatomat, eli jos $\mathrm{rk}(A) = m$, eli jos $\dim U = m$, niin $(m \times m)$-matriisi $A^T A$ on käännettävä.
- Tällöin saadan *projektiokaava*:
$$\Pi_U(\mathbf{b}) = A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b},$$
jossa Π_U on projektio vektoriavaruuteen $U = \mathscr{C}(A)$.

Pienin-neliö-menetelmä

Esimerkki

- Erästä kokeesta on saatu tuloksena viisi mittausta

$$(x,y) = (1,3); (2,5); (3,8); (4,10); (5,13).$$

- On syytä uskoa, että mittattu ominaisuus on approksimatiivisesti affiini, eli että

$$y \approx ax + b$$

pätee jollekin (tuntemattomille) $a, b \in \mathbb{R}$.

- "Ratkaistaan" yhtälöryhmä $\begin{cases} a+b &= 3 \\ 2a+b &= 5 \\ 3a+b &= 8 \\ 4a+b &= 10 \\ 5a+b &= 13 \end{cases}$
- Selvästi, tarkkoja ratkaisuja ei ole olemassa.

Pienin-neliö-menetelmä

Esimerkki

- "Ratkaistaan" yhtälöryhmä $\begin{cases} a+b &= 3 \\ 2a+b &= 5 \\ 3a+b &= 8 \\ 4a+b &= 10 \\ 5a+b &= 13 \end{cases}$
- Selvästi, tarkkoja ratkaisuja ei ole olemassa.
- Etsitään vektori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ siten, että "virhe" $\|M\mathbf{v} - \mathbf{y}\|$ on pienin mahdollinen.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Pienin-neliö-menetelmä

Esimerkki

- Pienin-neliö-ratkaisu on seuraavan yhtälörymän ratkaisu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = M^T M\mathbf{v} = M^T\mathbf{v}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

- Saamme

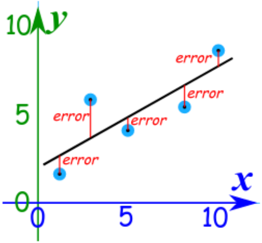
$$\begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 142 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

- Ratkaistaan (esimerkkiksi Gaussin eliminaatiomenetelmällä):

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/10 \end{pmatrix}.$$

Pienin-neliö-menetelmä

- Tämä tapaa sopeutua käyrän parametrit datapisteisiin kutsutaan *pienin-neliö-menetelmäksi*, sillä minimoidaan
$$\|M\mathbf{v}-\mathbf{y}\|^2=\sum_i(M_i\mathbf{v}-y_i)^2=\sum_i(ax_i+b_i-y_i)^2.$$
- Toisin sanoen mittausarvojen y_i ja funktioarvojen ax_i+b erojenn*neliöiden* summa minimoidaan.

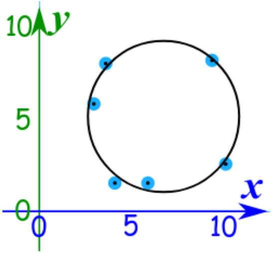


Pienin-neliö-menetelmä

- Menetelmä toimii, ja perustuu matriisilaskentaan, samalla tavalla vaikka sopeutettava funktio ei olisi lineaarinen.
- Esimerkkiksi voisimme löytää parametrit a, b, c siten, että "malli"

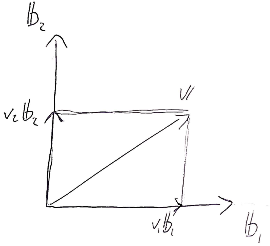
$$c = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

mahdollisimman hyvin selittää datapisteet (x_i, y_i).
- Malli on lineaarinen *parametreissä* a, b, c, eikä muuttujilla x, y.



Suorakulmainen kanta

- Usein matriisilasku on helpompi *suorakulmaisessa* koordinaatistossa, eli kannassa.

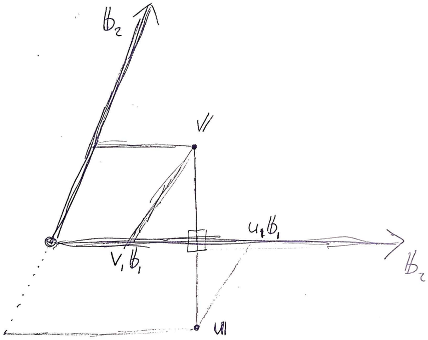


Kuva: Suorakulmainen kanta

- Tällöin vektorin **v** "i-osa" $v_i\mathbf{b}_i$ on tämän projektio kantavektorin **b** viritelmään.

Suorakulmainen kanta

- Jos kanta ei ole suorakulmaista, niin vektorin **v** projektio kantavektoriin $\mathbf{b}_i$ ei määrää tämän kerrointa v_i.



Kuva: Ei-suorakulmainen kanta

Suorakulmainen kanta

- Vektorin $\mathbf{v}$ projektio kantavektorin $\mathbf{b}$ viritelmään on $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b}$.
- Jos $\{\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n\}$ on kanta jolla kaikille kantavektorille pätee $\|\mathbf{b}_i\| = 1$ ja $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0$, niin

$$\mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_n \end{pmatrix}.$$

- Sellainen kanta on *ortonormaali*.

Gram-Schmidt ortogonaalisointi

- Muutetaan annettu kanta $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, ortonogonaaliksi.
- Idea: muutetaan yksi vektori $\mathbf{v}_k \rightsquigarrow \mathbf{w}_k$ kerrallaan, niin että

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k)$$

  ja

$$w_k \perp \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{k-1})$$

- Lopuksi normalisoidaan kanta $\mathbf{w}_i \rightsquigarrow \mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$, niin että $\|\mathbf{u}_i\| = 1$.

Gram-Schmidt ortogonaalisointi

Esimerkki

- Ortogonalisoidaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
- $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - c\mathbf{w}_1$ siten, että $\mathbf{w}_2 \perp \mathbf{w}_1$.
- $$0 = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 - c\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 - c\|\mathbf{w}_1\|^2.$$
- Joten $c = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2} = \frac{1}{1} = 1$

Gram-Schmidt ortogonaalisointi

Esimerkki

- Ortogonaalisoidaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
- $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - 1\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Ortogonaali (ja ortonormaali) kanta: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Gram-Schmidt ortogonaalisointi

- Lopputulos riippuu alkuperäisen kannan $\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n$ järjestyksestä:

Esimerkki

- Ortogonaalisoidaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - c\mathbf{w}_1$ siten, että $\mathbf{w}_2 \perp \mathbf{w}_1$.
- $$0 = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 - c\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 - c\|\mathbf{w}_1\|^2.$$
- Joten $c = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{1}{2}$

Gram-Schmidt ortogonaalisointi

Esimerkki

- Ortogonaalisoidaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
- Normalisoidaan: $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gram-Schmidt ortogonaalisointi

- Avaruuden annetun kannan $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ *Gram-Schmidt ortogonalisointi* $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_n$ määritellään seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_n &= \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \cdots - \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1}}{\|\mathbf{w}_{n-1}\|^2}\mathbf{w}_{n-1}
\end{aligned}
$$

- Huomataan, että $\mathbf{w}_k \perp \mathbf{w}_i$ kaikille $i < k$.
- Lopuksi normalisoidaan, $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$ kaikille $i = 1, \ldots, n$.

Gram-Schmidt ortogonaalisointi

Esimerkki

- Etsitään avaruuden $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x - y - z - w = 0 \right\}$ ortonormaali kanta.
- Ensin etsitään kanta $\{\mathbf{v}_i\}$ for V.
- Vektorit
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
ovat lineaarisesti riippumattomat.
- Koska $V \subset \mathbb{R}^4$ on aito aliavaruus, sen dimensio on < 4, joten kolme lineaarisesti riippumatonta vektoria muodostavat kannan.

Gram-Schmidt ortogonaalisointi

Esimerkki (Jatkuu)

Ortogonaalisoidaan:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 && = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 && = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\
& && = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2 && = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1/2}{3/2} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} \\
& && = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Gram-Schmidt ortogonalisointi

Esimerkki (Jatkuu)

- Normalisoidaan:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_1\|}\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_3\|}\mathbf{w}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ on ortonormaali kanta avaruudelle

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x - y - z - w = 0 \right\}.$$

Determinantti

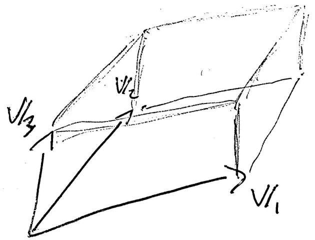
- Matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *determinantti* $\det(A) \in \mathbb{R}$ ilmaisee miten paljon matriisia vastaava lineaarikuvaus "skaalaa ja peilaa" avaruutta $\mathbb{R}^n$.
- Kuution
$$[0,1]^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \ \forall j: \ x_j \in [0,1]\}$$
"*n-tilavuus*" on 1.
    - 1-tilavuus = pituus
    - 2-tilavuus = pinta-ala
    - 3-tilavuus= "tavallinen tilavuus"
    - ...

Determinantti

- Matriisin $A = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_n)$ sarakkeiden virittämän "särmiön"

$$\begin{aligned} A[0,1]^n &= \{Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in [0,1]^n\} \\ &= \{x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ kaikille } i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

n-tilavuus on $|\det(A)|$.



Determinantti

- Matriisin A sarakkeiden virittämän "särmiön"

$$A[0,1]^n = \{Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in [0,1]^n\}$$

  n-tilavuus on $|\det(A)|$.

- Olkoon $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jokin alue, jonka tilavuus on $\mathrm{Vol}(\Omega)$, ja olkoon

$$A\Omega = \{Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in \Omega\}.$$

- Koska lineaarikuvaus A "näyttää samalta kaikialla" pätee myös että

$$\mathrm{Vol}(A\Omega) = |\det A| \, \mathrm{Vol}(\Omega).$$

Determinantti

- Matriisin $A = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sarakkeiden virittämän "särmiön"

  $$A[0,1]^n = \{Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in [0,1]^n\}$$

  n-tilavuus on $|\det(A)|$.
- Determinantin etumerkki kertoo suunnistuksesta.
-
  $$\det A = \begin{cases} \mathrm{Vol}(A[0,1]^n) & \text{jos } (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ positiivisesti suunnistettu} \\ -\mathrm{Vol}(A[0,1]^n) & \text{jos } (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ negatiivisesti suunnistettu} \end{cases}$$

Determinantti

- Olkoon $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Tällöin

$$|\det(AB)| = \mathrm{Vol}(AB[0,1]^n) = |\det(A)|\,\mathrm{Vol}(B[0,1]^n) = |\det(A)||\det(B)|.$$

- Myöskin AB muuttaa suunnistuksen jos ja vain jos joko sekä A että B muuttaa suunnistuksen, tai kumpikaan ei muuta suunnistusta.
- Siispä $\det AB \geq 0$ jos joko sekä $\det A \geq 0$ että $\det B \geq 0$, tai sekä $\det A \leq 0$ että $\det B \leq 0$
- Tästä seuraa, että $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Determinantti

- Determinantin laskemiseen tarvitaan neljä lakia:
- **Laki 1:**

$$\det(I_n) = 1.$$

- Identiteettikuvaus $\mathbf{x} \mapsto I_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ei muuta n-tilavuutta tai suuntia.

Determinantti

- **Laki 2:** Jos matriisin sarake t-kertaistuu, niin determinantti t-kertaistuu.
- "Särmiön n-tilavuus" t-kertaistuu yhden särmän t-kertaistuessa.
- Huom: Tämä pätee myös kun $t < 0$, sillä kun yksi sarake kerrotaan (-1):lla, eli peilataan origossa, niin vektorien suunnistus (eli determinantin etumerkki) vaihtuu.

Determinantti

Esimerkki

$$\det\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} = (-2)(3)\ \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \overset{1}{=} -6.$$

$$\det\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} = (6)(5)(4)\ \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \overset{1}{=} 120.$$

$$\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{pmatrix} = (0)\ \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{pmatrix} = 0.$$

Determinantti

- **Laki 3:** Jos matriisissa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on (ainakin) kaksi samaa saraketta, niin
$$\det(A) = 0.$$
- Tällöin särmiö $A[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ on "litistynyt" ja sen n-tilavuus on 0.

Esimerkki

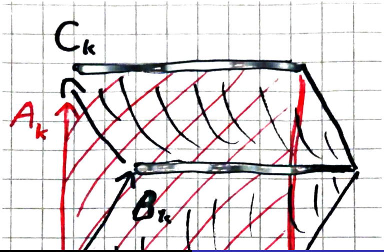
$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 7\\ 3 & 3 & 9\end{pmatrix} = 0, \quad \det\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & 7 & 2\\ 3 & 9 & 3\end{pmatrix} = 0, \quad \det\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 7 & 2 & 2\\ 9 & 3 & 3\end{pmatrix} = 0.$$

Determinantti

- **Laki 4:** Olkoon A_j matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ j:s sarake. Kun $A_k = B_k + C_k$, niin

$$\begin{aligned} & \det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & B_k + C_k & A_{k+1} & \dots & A_n \end{pmatrix} \\ = & \det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & B_k & A_{k+1} & \dots & A_n \end{pmatrix} \\ + & \det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & C_k & A_{k+1} & \dots & A_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Särmiön yhden särmän summaus näkyy n-tilavuudessa summana.



Determinantti

Esimerkki

$$\begin{aligned}
0 &= \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 1,
\end{aligned}$$

joten $\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -1$.

Determinantti

- Determinanttia merkitään myös lyhyesti pystyviivoilla: $|M| = \det(M)$, kun M on matriisi.

Esimerkki

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &\overset{4}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
&\overset{4}{=} \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} \\
&\overset{2}{=} ad|I| + ab\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + cd\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{1\&3}{=} ad + 0 - bc + 0,
\end{aligned}$$

sillä äsken laskettiin $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$.

Determinantti

Esimerkki

- Millä kertoimia $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ koskevalla ehdolla matriisilla $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on käänteismatriisi?
- Mikä silloin on käänteismatriisi A^{-1}?
- Tarkista, että $A^{-1}A = I = AA^{-1}$.

Determinantit

- Laki 3: Jos matriisissa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on (ainakin) kaksi samaa saraketta, niin $\det A = 0$
- Laki 2+4: Lineaarisuus joka sarakkeessa:

$$
\begin{aligned}
& \det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & A_k + cA_1 & A_{k+1} & \dots & A_n \end{pmatrix} \\
= \; & c\det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & A_1 & A_{k+1} & \dots & A_n \end{pmatrix} \\
+ \; & \det\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{k-1} & A_k & A_{k+1} & \dots & A_n \end{pmatrix} \\
= \; & 0 + \det A.
\end{aligned}
$$

- Siispä voidaan lisätä erään sarakkeen monikerta toiseen sakakkeeseen, muuttamatta determinanttia.

Determinantit

- Sarakeoperaatioilla voidaan kirjoittaa neliömatriisi (sarake-)porrasmuodossa.
- Toisaalta, (sarake-)porrasmuodossa olevalla matriisilla on determinantti $\neq 0$ jos ja vain jos ei ole nolla-saraketta, eli jos ja vain jos matriisi on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

jolloin (lait 1+2)

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Determinantti

- Siispä lait 1, 2, 3, 4 ovat ristiriidattomat ja riittävät determinantin laskemiseen.
- Toisaalta, funktio

$$\begin{vmatrix} 1 & 0_{1\times(n-1)} \\ 0_{(n-1)\times 1} & A \end{vmatrix}$$

on myös funktio, jolle säännöt 1, 2, 3, 4 pätevät. Siispä

$$\begin{vmatrix} 1 & 0_{1\times(n-1)} \\ 0_{(n-1)\times 1} & A \end{vmatrix} = |A|,$$

jos A on $(n-1)\times(n-1)$-matriisi.

Determinantti

- Samalla tavalla, jos

$$A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix},$$

jossa B on $(k-1)\times(n-1)$-matriisi ja C on $(n-k)\times(n-1)$-matriisi, niin funktio

$$\begin{pmatrix} 0_{k\times 1} & B \\ 1 & 0_{n\times 1} \\ 0_{(n-k)\times 1} & C \end{pmatrix} \mapsto (-1)^{k+1}|A|$$

on myös funktio, jolle säännöt 1,2,3,4 pätevät. Siispä

$$\begin{vmatrix} 0_{k\times 1} & B \\ 1 & 0_{n\times 1} \\ 0_{(n-k)\times 1} & C \end{vmatrix} = (-1)^{k+1}|A|.$$

Determinantti

- Kirjoittamalla ensimmäisen sarakkeen muodolla

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n1} \end{pmatrix},$$

saamme *alideterminanttisääntö*

$$\det(A) = \sum_k (-1)^k a_{k1} \det(A^{*k1}),$$

jossa A^{*ki} matriisi A, josta on poistettu rivi k ja sarake i.

3×3 determinantti

Esimerkki

- Laske yleisen (3×3)-matriisin determinantti $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.
- Purkataan matriisi alamatriisiin:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$
$$= a(ei - fh) - d(bi - ch) + g(bf - ce).$$

2- ja 3-ulotteisten determinanttien kaavat:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} c & a & b & c & a \\ f & d & e & f & d \\ i & g & h & i & g \end{array} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

Vektoritulo

- Olkoot $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.
- Muistutus: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$.
- Tälle vektorille pätee:
  1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
  2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$
  3. vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ muodostavat oikeakätisen systeemin
- Muodollinen kaava:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{e}_2 & u_2 & v_2 \\ \mathbf{e}_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

Determinantit

- Neliömatriisin A determinantti lasketaan “sarakelaajennuksella”:
-

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ a_{21} & * & * & * \\ a_{31} & * & * & * \\ a_{41} & * & * & * \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ a_{21} & * & * & * \\ a_{31} & * & * & * \\ a_{41} & * & * & * \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ a_{21} & * & * & * \\ a_{31} & * & * & * \\ a_{41} & * & * & * \end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ a_{21} & * & * & * \\ a_{31} & * & * & * \\ a_{41} & * & * & * \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{11} & * & * & * \\ a_{21} & * & * & * \\ a_{31} & * & * & * \\ a_{41} & * & * & * \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}|A^{*11}| - a_{21}|A^{*21}| + a_{31}|A^{*31}| - a_{41}|A^{*41}|,
$$

jossa A^{*ij} on matriisi A, josta on poistettu rivi i ja sarake j.

Permutaatiolaajennus

- Jatkamalla sarakelaajennusta, saamme

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \cdot$$

- Summa on kaikkien matriisien yli, jossa kaikille riville i on täsmälleen yksi sarake j jonka alkio on a_{ij}, ja jossa kaikki muut alkiot ovat nollia.

Permutaatiolaajennus

- Epätriviaalisesti (todistus Strang-kirjassa) pätee, että

$$
|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \cdots
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{43} \\ 0 & 0 & a_{34} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{41} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{34} & 0 \end{vmatrix} + \cdots
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = |A^T|.
$$

Determinantti

Lause

- *Olkoon* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- *Tällöin* $\det(A^T) = \det(A)$.

Lause

- *Olkoon* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- *Tällöin* $\det(AB) = \det(A)\ \det(B)$

Determinantit rivioeraatioilla

- Koska $|A| = |A^T|$, voimme myös laskea determinantit *rivioperaatiolla*.
- Rivin kertominen vakiolla $\neq 0$ ei muutaa tosiasiaa, onko determinantti 0 vai ei.
- Toisin sanoen, ominaisuus $|A| = 0$ säilyy rivioperaatioilla.
- Jokainen (neliö)matriisi on riviekvivalentti redusoitun porrasmariisin kanssa.
- Ainoa porrasmuotoinen neliömatriisi, jolla on determinantti $\neq 0$, on identiteettimatriisi.

Säännöllisyys, eli ei-degeneroituneisuus

Lause

- *Olkoon A $(n \times n)$-matriisi. Seuraavat väiteet ovat yhtäpitäviä:*
    - $|A| \neq 0$.
    - *A on riviekvivalentti identiteettimatriisin kanssa.*
    - *A on sarakeekvivalentti identiteettimatriisin kanssa.*
    - *Matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat.*
    - *Matriisin A rivit ovat lineaarisesti riippumattomat.*
    - *Matriisin A sarakkeet ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta.*
    - *Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on yksikäsitteinen ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
    - *Yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu jokaiselle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.*

Kannan valinta

- Matriisi esittää lineaarikuvausta *annetussa kannassa*.
- Jos $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n\}$ on avaruuden V kanta ja

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + \cdots + v_n\mathbf{b}_n, \text{ niin } \mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

- Kuvauksen $f : V \to V$ matriisiesitys *kannassa* B on

$$(f(\mathbf{b}_1)_B | \cdots | f(\mathbf{b}_n)_B).$$

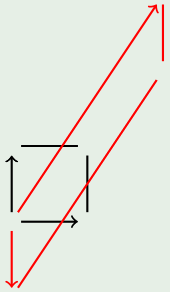
- Tähän asti, olemme esittäneet kuvaukset $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ luonollisessa kannassa $\{\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n\}$.

Kannan valinta

- Joskus kannattaa valita kanta joka sopii annetulle kuvaukselle

Esimerkki

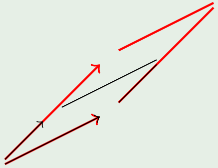
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ esittää lineaarikuvausta f, joka lähettää mustan särmiön punaiseen särmiöön.
- Geometrisesti, tämä on vaikea ymmärtää (esim. kiertojen ja venytyksien yhdisteenä).
- Miten muuten lasketaan potenssit A^2, A^3 jne. tästä matriisista / kuvauksesta?



Kannan valinta

Esimerkki (Jatkuu)

- $$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
- Joten (ei-ortogonaalisen) kannan $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ näkökulmasta, kuvaus f on "venytys tekijällä 2 ensimmäisen kantavektorin suunnassa".



Ominaisvektorit

- Tutkitaan kuvaus sellaisten kantavektorien näkökulmasta, jolle kuvauksen vaikutus on vain "venytys".

Määritelmä

- Olkoon $f : V \to V$ kuvaus avaruudesta itselleen
- Olkoon $\mathbf{v} \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ja $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.
- Tällöin $\mathbf{v}$ on kuvauksen f *ominaisvektori*, *ominaisarvolla* λ.

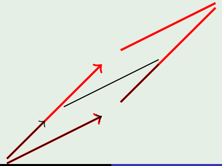
- Jos $V = \mathbb{R}^n$ ja matriisi A on kuvauksen f matriisiesitys, niin λ ja $\mathbf{v}$ ovat myös matriisin A ominaisarvo ja ominaisvektori.

Ominaisvektorit

Esimerkki

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ on matriisin A ominaisvektori, ominaisarvolla 1.
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on matriisin A ominaisvektori, ominaisarvolla 2.



Ominaisvektorit

- Huom: $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0}$ kaikille $\lambda \in \mathbb{R}$, muttemme silti kutsu $\mathbf{0}$ ominaisvektoriksi.
- Jos $\mathbf{v}$ on ominaisvektori jolle pätee $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, niin

$$f(t\mathbf{v}) = tf(\mathbf{v}) = t\lambda \mathbf{v}.$$

- Jos $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat ominaisvektorit joilla on sama ominaisarvo λ, niin

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v}).$$

Ominaisvektorit

- Kirjoitetaan viime kalvon havainto lauseena:

Lause

- *Olkoon λ lineaarikuvauksen $f : V \to V$ ominaisarvo.*
- *Tällöin ominaisvektorit $\mathbf{v} \in V$ jolle $f(V) = \lambda\mathbf{v}$ muodostavat avaruuden V aliavaruus.*

- Tämä avaruus kutsutaan kuvauksen f *ominaisavaruudeksi* ominaisarvolla λ.

Ominaisvektorit

Esimerkki

- Tutkitaan projektio $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, joten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ on ominaisvektori ominaisarvolla 1.
- $f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, joten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ on ominaisvektori ominaisarvolla 0.
- Ominaisarvon 1 ominaisavaruus on kaksi-ulotteinen, ja ominaisarvon 0 ominaisavaruus on yksi-ulotteinen.

Ominaisarvot ja degeneroituneisuus

- 0 on matriisin A ominaisarvo jos yhtälöllä

$$A\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

  on epätriviaalisia ratkaisuja.

Lause

- *Olkoon A $(n \times n)$-matriisi. Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*
  - **0 ei ole matriisin A ominaisarvoa**
  - *Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on yksikäsitteinen ratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*
  - $\cdots$
  - $|A| \neq 0$.

Ominaisarvot ja degeneroituneisuus

- $\lambda \in \mathbb{R}$ on $(n \times n)$ matriisin A ominaiisarvo jos yhtälöllä

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} = \lambda I_n \mathbf{v} \qquad \text{eli} \qquad (A - \lambda I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

  on epätriviaalisia ratkaisuja.
- Tämä tarkoittaa että

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1,n-1} - \lambda & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & & & a_{n,n-1} & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

  on degeneroitunut, eli $|A - \lambda I_n| = 0$.

Karakteristinen polynomi

- $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A ominaisarvo $|A - \lambda I_n| = 0$.
- Determinantti $|A - \lambda I_n|$ on polynomi (jonka muuttuja on λ). Tämä kutsutaan matriisin A *karakteristiseksi polynomiksi*.
- Ominaisarvot löytyvät ratkaisemalla polynomiyhtälö $|A - \lambda I_n| = 0$.
- Etsitään ensin ominaisarvoja, ja vasta tämän jälkeen ominaisvektoreita.

Ominaisarvot

Esimerkki

- Määritä matriisin
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
ominaisarvot ja ominaisvektorit.
- Karakteristinen polynomi:
$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1-\lambda)\lambda(3-\lambda) + 4 + 4 - \lambda - 4(3-\lambda) + 4(1-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Ominaisarvot

Esimerkki (Jatkuu)

- Matriisin A ominaisvektorit ovat polynomin

$$|A-\lambda I| = -\lambda(\lambda-2)^2$$

juuret, eli 0 ja 2.

- Ominaisvektorit löytyy ratkaisemalla yhtälö

$$(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

kun $\lambda = 0$, sekä kun $\lambda = 2$.

Ominaisvektorit

Esimerkki (Jatkuu)

- Vektorilla $\mathbf{v}$ on ominaisarvo $\lambda = 0$ jos $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$:
- Gaussin eliminaatiomenetelmä:

$$
(A|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Ominaisvektorit

Esimerkki (Jatkuu)

- $$(A|\mathbf{0}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Tämä on porrasmuotoinen liittomatriisi, jonka ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_3 = t & \text{vapaa muuttuja} \\ x_2 = -t & \\ x_1 = t & \end{cases}$$

- Siispä ominaisarvon 0 ominaisavaruus on $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

Ominaisvektorit

Esimerkki (Jatkuu)

- Vektorilla $\mathbf{v}$ on ominaisarvo $\lambda = 2$ jos $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:
- Gaussin eliminaatiomenetelmä:

$$
(A - 2I|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Ominaisvektorit

Esimerkki (Jatkuu)

- $$(A-2I|\mathbf{0}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
- Tämä on porrasmuotoinen liittomatriisi, jonka ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_3 = t & \text{vapaa muuttuja} \\ x_2 = 0 \\ x_1 = t \end{cases}$$

- Siispä ominaisarvon 2 ominaisavaruus on $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

Ominaisvektorit

Esimerkki (Jatkuu)

- $$(A-2I|\mathbf{0}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Tämä on porrasmuotoinen liittomatriisi, jonka ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_3 = t & \text{vapaa muuttuja} \\ x_2 = 0 & \\ x_1 = t & \end{cases}$$

- Siispä ominaisarvon 2 ominaisavaruus on $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

Diagonaalisointi

- Jos $(n \times n)$-matriisilla A on n ominaisvektorit $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$, jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$...
- ...niin pätee

$$A\left(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n\right) = \left(\lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdots \lambda_n \mathbf{v}_n\right) = \left(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Diagonaalisointi

- Jos ominaisvektorit $\mathbf{v}_1,\ldots\mathbf{v}_n$ ovat lineaarisesti riippumattomat, niin matriisi $V = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ on käännettävä.
- Voimme kirjoittaa
$$A = V\Lambda V^{-1},$$
jossa
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
- Tällöin matriisi A on *diagonalisoituva*.
- Jos matriisilla A on n eri ominaisarvoa $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, niin se on aina diagonalisoituva.

Lävistäjämatriisi

- Matriisi D, jolle pätee $d_{i,j} = 0$ kaikille $i \neq j$ kutsutaan *lävistäjämatriisiksi*.
- Lävistäjämatriiseja on helppo kertoa keskenään:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & & 0 \\ 0 & a_2 & & \\ & & & 0 \\ 0 & & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & & 0 \\ 0 & b_2 & & \\ & & & 0 \\ 0 & & 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & & \\ & & & 0 \\ 0 & & 0 & a_n b_n \end{pmatrix}$$

- Jos $A = VDV^{-1}$ on diagonalisoituva, niin
  - $A^2 = VD\cancel{V^{-1}V}DV^{-1} = VD^2V^{-1}$.
  - $A^n = VD\cancel{V^{-1}V}D\cancel{V^{-1}} \cdots \cancel{V}DV^{-1} = VD^nV^{-1}$.
- D^n on lävistäjämatriisi jonka lävistäjäalkiot ovat d_{ii}^n.

Fibonacciluvut

Esimerkki

- Fibonaccin lukujono

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$$

määritellään:

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{jos } n \geq 2 \end{cases}$$

- Diagonaalisoinnilla löydetään luvun f_n kaavaa suljettussa muodossa.
- Idea: $(f_{n-1}, f_{n-2}) \mapsto (f_n, f_{n-1})$ on lineaarikuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Fibonacciluvut

Esimerkki (Jatkuu)

- Tutkitaan *Fibonaccivektori* $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$.
- $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ja kun $n \geq 1$

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Halutaan laskea vektorin

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

toinen koordinaatti.

Fibonacciluvut

Esimerkki (Jatkuu)

- Halutaan laskea

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Diagonaalisoidaan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Ensin löydetään ominaisarvot: Karakteristisen polynomin

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

juuret ovat $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Fibonacciluvut

Esimerkki (Jatkuu)

- Matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- Ominaisvektorille $\mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$, jonka ominaisarvo on λ_i, pätee

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = x_i - \lambda_i y_i = 0.$$

- Valitaan $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Siispä

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Fibonacciluvut

Esimerkki (Jatkuu)

- $$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$
- $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$
- $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$
- Joten
$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Fibonacciluvut

Esimerkki (Jatkuu)

- Lasketaan nyt Fibonaccilukujen suljetun muodon kaava:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ -\lambda_2^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Fibonacciluvut

Esimerkki (Jatkuu)

- Siispä

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n + \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

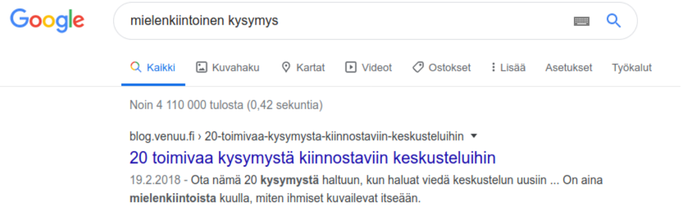
- Joten Fibonaccijonon kasvuvauhti on *kultainen leikkaus*

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

- Todistetiin juuri (jopa huomaamatta) että mutkikaannäköinen luku f_n on kokonaisluku kaikille n. (!)

Page rank

- Yksi tärkeä ominaisvektorien sovellus tietojenkäsittelytieteessä on Googlen Page Rank-algoritmi.



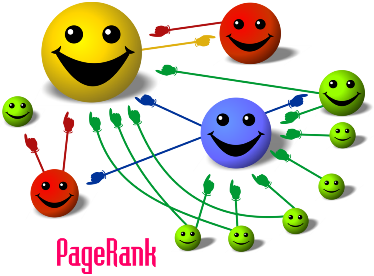
- Motivointikysymys: Miten hakukone päättää mikä on ison verkon "tärkein" sivu?

Page rank

- **Idea 1**: Sivu on tärkeä, jos sinne on linkki monesta muusta sivusta.
- Tämä oli huono idea. Eiköhän sivu jonne on linkki CNN:in ja Amazonin etusivusta täytyy olla tärkeämpi kuin sivu jonne on linkki Mika Meikäläisen ja Kaarelan Kalja-Kallen blogeista?

Page rank

- **Idea 2**: Sivu on tärkeä jos sinne on linkki monesta *tärkeästä* sivusta.



Kuva: Mitä isommat pallot osoittavat palloon P, sitä isompi P itse.

Page rank

- **Idea 2**: Sivu on tärkeä jos sinne on linkki monesta *tärkeästä* sivusta.
- Tämä pirustaa paremmin kuin “Idea 1” sitä, mitä “tärkeä” intuitiivisesti tarkoitaa.
- Määritelmänä, se on kuitenkin järjetön.
- Ei voi tiedä onko eräs sivu tärkeä vai ei, tietämättä ovatko toiset sivut tärkeitä vai ei.

Page rank

- **Idea 3**: Sivu P on tärkeä jos satunnaiselle surffaajalle (kutsutaan hänet vaikka Satu) on todennäköistä päästä sivuun P kun hän jatkuvasti seuraa satunnaisesti valitut linkit.

Kuva: Satunnainen surffaaja

Page rank

- **Idea 3**: Sivu P on tärkeä jos satunnaiselle surffaajalle (kutsutaan hänet vaikka Satuksi) on todennäköistä päästä sivuun P kun hän jatkuvasti seuraa satunnaisesti valitut linkit.
- Tästä määritelmästä seuraa "Idean 2" ominaisuus: jos Sadulle on todennäköistä päästä johonkin sivuun, josta on linkki meidän sivuun, niin Sadulle on myös suhteellisen todennäköistä päästä meidän sivuun.

Page rank

- Koostukoon verkko N sivusta. Todennäkeisyys, että Satu on sivulla i hetkessä t, merkitään $p_t(i)$.
- Olkoon $\mathbf{p}_t = \begin{pmatrix} p_t(1) \\ \vdots \\ p_t(N) \end{pmatrix}$ (jättiläis)vektori, joka kuvaa Sadun sijainti hetkessä t.
- Huom: Vektorin $\mathbf{p}_t$ kaikki alkiot ovat ≥ 0, ja niiden summa on 1
- Jos *tiedetään* että Satu on sivussa i hetkessä t, niin $\mathbf{p}_t = \mathbf{e}_i$.

Page rank

- Jokaisessa hetkessä, todennäkeisyydellä α, Satu lopettaa sessionsa ja aloittaa uudestaan tasaisesti jakautuneessa sivussa.
- Todennäkeisyydellä $1-\alpha$, hän seuraa (tasaisesti jakautunutta) linkkiä sivusta, jossa hän tällä hetkellä on.
- Siispä, jos tiedetään, että Satu on hetkessä t sivussa i ($\mathbf{p}_t = \mathbf{e}_i$), niin

$$p_{t+1}(j) = \begin{cases} \alpha/N & \text{jos ei ole linkkiä } i \to j \\ \alpha/N + (1-\alpha)/L_i & \text{jos on linkki } i \to j \end{cases},$$

jossa L_i on sivusta i lähtevien linkkien määrä.

Page rank

- Jos $\mathbf{p}_t = \mathbf{e}_i$), niin

$$p_{t+1}(j) = \begin{cases} \alpha/N & \text{jos ei ole linkkiä } i \to j \\ \alpha/N + (1-\alpha)/L_i & \text{jos on linkki } i \to j \end{cases},$$

  jossa L_i on sivusta i lähtevien linkkien määrä.
- Olkoon r_{ji} todennäkeisyys, että Satu menee $i \to j$.
- Tällöin

$$\mathbf{p}_{t+1} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix} \mathbf{p}_t.$$

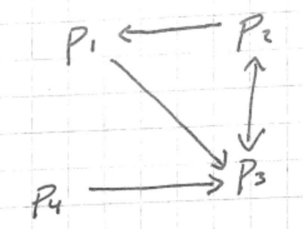
Page rank

- $$\mathbf{p}_{t+1} = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N1} & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix} \mathbf{p}_t = R\mathbf{p}_t.$$
- R on *stokastinen matriisi*:
  - Jokaisen sarakkeen summa on 1.
  - Kaikki alkiot ovat ≥ 0.
- Tutkitaan, mihin Satu pääsee "ajan mittaan", eli todennäkeisyysvektoria
$$\mathbf{p} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{p}_t = \lim_{t\to\infty} R^t \mathbf{p}_0.$$
- **Jos** rajaarvo $\mathbf{p} = \lim_{t\to\infty} R^t \mathbf{p}_0$ on olemassa, niin sillä pätee $R\mathbf{p} = \mathbf{p}$.

Page rank

Esimerkki

- Oleta, että maailmanlaajuinen verkko koostuu neljästä sivusta, jonka välillä on linkkejä kuvan mukaan:

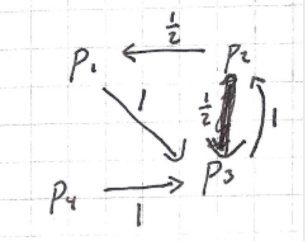


- Yksinkertaisuuden vuoksi valitaan $\alpha = 0$.
  - Satu ei ikinä lopeta sessiotaan, vaan seuraa linkkejä elämänsä loppuun asti.

Page rank

Esimerkki (Jatkuu)

- Todennäkeisyys siirtyä sivusta i sivuun j näkyy kuvassa:



- Eli

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Page rank

Esimerkki (Jatkuu)

- Ratkaistaan yhtälö $(R-I)\mathbf{p}=\mathbf{0}$ Gaussin eliminatiomenetelmällä:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Ratkaisut: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{s}{2} \\ s \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$.

Page rank

Esimerkki (Jatkuu)

- Raja-arvolle

$$\mathbf{p} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{p}_t = \lim_{t\to\infty} R^t \mathbf{p}_0$$

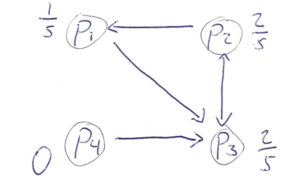
pätee $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{s}{2} \\ s \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ jollekin $s \in \mathbb{R}$.

- $\mathbf{p}$ satunnaisvektori $\Rightarrow$ koordinaatien summa on 1 $\Rightarrow$ $\mathbf{p} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Page rank

Esimerkki (Jatkuu)

- Eli sivujen *tärkeys* on seuraavasti:



- Eli sivut 2 ja 3 ovat yhtä tärkeitä, vaikka sivulle 3 on enemmän linkkejä.

Stokastinen matriisi

- Jos R on stokastinen matriisi, niin jokaisen matriisin $R-I$ sarakkeen summa on 0.
- Siispä matriisin $R-I$ rivien summa on $\mathbf{0}$, joten $R-I$ on degeneroitunut.
- Eli 1 on kaikkien stokastisten matriisien ominaisarvo.
- Topologisista syistä, stokastisella matriisilla on aina *todennäkeisyysvektori* $\mathbf{p}$ ominaisvektorina ominaisarvolla 1.

Stokastinen matriisi

- Stokastisella matriisilla on aina *todennäkeisyysvektori* $\mathbf{p}$ ominaisvektorina ominaisarvolla 1.
- Stokastisen matriisin kaikki ominaisarvot ovat $|\lambda| \leq 1$.
- Tästä seuraa, että

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}_t = \lim_{t\to\infty} R^t \mathbf{p}$$

on olemassa kaikille stokastiselle matriisille R ja kaikille alkuvektorille $\mathbf{p}$, paitsi jos -1 on matriisin R ominaisarvo.

Kolmiomatriisit

- Matriisi A on *alakolmiomatriisi* jos $a_{ij} = 0$ aina kun $j < i$.

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

- Se on *yläkolmiomatriisi* jos $a_{ij} = 0$ aina kun $j > i$.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Kolmiomatriisit

- Kahden alakolmiomatriisien A ja B tulo on aina alakolmiomatriisi:
  - Jos $C = AB$ ja $j < i$, niin

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{im}b_{mj} \\ &= a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ii}b_{ij} + a_{i,i+1}b_{i+1,j} + \cdots + a_{i,m}b_{m,j} \\ &= a_{i1}0 + \cdots + a_{ii}0 + 0b_{i+1,j} + \cdots + 0b_{m,j} = 0. \end{aligned}$$

- Samalla perusteella, kahden yläkolmiomatriisien A ja B tulo on yläkolmiomatriisi:

Rivioperaatiot

- Rivioperaatiolla matriisista A saa matriisitulo RA, jossa matriisilla R on yksinkertainen rakenne:
  item

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & a_{33}-a_{23} & a_{34}-a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Rivioperaatiot

- Olkoon $R_{ij}(\alpha)$ neliömatriisi jolla on ykköset peruslävistäjällä, α paikassa i,j, ja muualla nollat:

$$R_{32}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriisin riviin j lisääminen α kertaa matriisin rivi i on yhtä kuin kertominen matriisilla $R_{i,j}(\alpha)$ *vasemmalta*.
- (Samalla periaatteella, sarakeoperaatiot vastaavat kertomiseen neliömariisilla C *oikealta*)

Rivioperaatiot

- Huom: $R_{ij}(\alpha)R_{ij}(-\alpha) = I_n$, joten $R_{ij}(\alpha)^{-1} = R_{ij}(-\alpha)$.
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$
- Joten, jos saadaan A' matriisilta A lisäämällä α kertaa rivi j riviin i, niin saadaan A matriisilta A' vähentämällä α kertaa rivi j rivistä i
- $A' = R_{ij}(\alpha)A \leftrightarrow A = R_{ij}(-\alpha)A'$

Rivioperaatiot

Esimerkki

Rivioperaatiot

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

vastaavat matriisiyhtälöihin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

jotka ovat kirjoitettavissa muotoon:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rivioperaatiot

Esimerkki (Jatkuu)

Yhtälöistä

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

seuraa, että

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rivioperaatiot

Esimerkki (Jatkuu)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Täten, matriisi on alakolmiomatriisin ja yläkolmiomatriisin tulo.

LU-hajotelma

- Jos matriisista A tulee yläkolmiomatriisi U lisäämällä ylempien rivien monikerrat alempiin riveihin (tämä pätee useimille matriisille), niin rivioperaatiot vastaavat hajotelmaan $A = LU$, jossa L on alakolmiomatrisi.
- Tämä hajotelma on käytännöllinen jos tahdomme ratkaista yhtälöryhmää $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:
  - Kolmiomallisia yhtälöryhmiä on helppo ratkaista (sijoituksella).
  - Jos $A = LU$, niin ratkaisemme ensin yhtälöä $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, ja tämän jälkeen ratkaisemme $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

LU-hajotelma

- Halutaessa voimme tehdä niin, että kolmiomatriisien lävistäjissä on pelkästään ykköset 1.
- Jos matriisin

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

levistäjän alkiot $a_{ii} \neq 0$, voimme jakaa *sarakkeet* (oikealta) näillä alkioilla:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & \frac{a_{n2}}{a_{22}} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

LU-hajotelma

- Halutaessa voimme tehdä niin, että kolmiomatriisien lävistäjissä on pelkästään ykköset 1.
- Jos matriisin

$$U = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & b_{3n} \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

levistäjän alkiot $a_{ii} \neq 0$, voimme jakaa *rivit* (vasemmalta) näillä alkioilla:

$$U = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & \frac{b_{1n}}{b_{11}} & \\ 0 & 1 & & \frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

LU-hajotelma

- Koska

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix},$$

kirjoitetaan

$$A = LU = L'DU',$$

jossa D on lävistäjämatriisi, ja L' ja U' ovat ala/yläkolmiomatriisit jonka lävistäjäalkiot ovat ykkösiä.

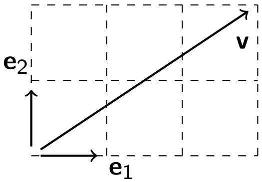
Esimerkki

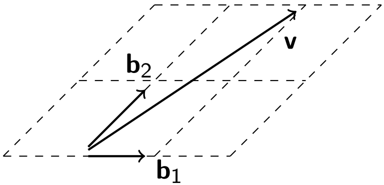
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kannanvaihto

- Olkoon V n-ulotteinen vekoriavaruus, ja olkoon $E = (\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n)$ sen kanta.
- Vektoria
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \in V$$
vastaa sarakevektori $\mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.
- Lineaarikuvausta $f : V \to V$ vastaa neliömatriisi
$$A = f_E = \left(f(\mathbf{e}_1)_E \ \cdots \ f(\mathbf{e}_n)_E \right).$$
- Nämä esitykset riippuvat annetusta kannasta E.

Kannanvaihto





$$\mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ eli } \mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2.$$

$$\mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ eli } \mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2.$$

- $\mathbf{v}_E$ kertoo "miltä $\mathbf{v}$ näyttää Erkin näkökulmasta".
- $\mathbf{v}_B$ kertoo "miltä $\mathbf{v}$ näyttää Bertan näkökulmasta".
- Miten "siirrytään" vektorin $\mathbf{v} \in V$ sarakevektoriesityksesta toiseen $f_E \leftrightsquigarrow f_B$, Erkin ja Bertan kantojen suhteen?

Kannanvaihto

- Tiedetään $\mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, eli $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$.
- Lasketaan $\mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ siten, että $\mathbf{v} = w_1\mathbf{b}_1 + \cdots + w_n\mathbf{b}_n$.
- $$\mathbf{v}_B = v_1\mathbf{e}_{1B} + \cdots + v_n\mathbf{e}_{nB} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{1B} & \cdots & \mathbf{e}_{nB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

  jos $\mathbf{e}_{iB}$ on sarakevektori joka esittää vektorin $\mathbf{e}_i$ kannassa B.

Kannanvaihto

Esimerkki

- Olkoon E avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollinen kanta, ja olkoon B kanta jolle pätee $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1$ ja $\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$.
- Tutkitaan vektori $\mathbf{v} = \mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Laske vektorin $\mathbf{v}$ koordinaatit kannassa B.
- $$\begin{aligned} \mathbf{v}_B = (3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)_B &= 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kannanvaihtomatriisi

- Matriisi

$$E_B = ((\mathbf{e}_1)_B | \cdots | (\mathbf{e}_n)_B)$$

  kutsutaan *kannanvaihtomatriisiksi* kannasta E kantaan B.

- $$\mathbf{v}_B = E_B \mathbf{v}_E. \tag{4}$$

- $$\mathbf{v}_E = B_E \mathbf{v}_B.$$

- Toisaalta E_B on käännettävä (lineaarisesti riippumattomat sarakkeet). Kertomalla (4) vasemmalta matriisilla E_B^{-1}, saamme

$$E_B^{-1} \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_E.$$

- Siispä $E_B^{-1} = B_E$.

Kannanvaihtomatriisi

Esimerkki

- Muodostavatko vektorit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantaa? Jos näin on, niin mikä on vektorin $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ koordinaatit kannassa B?
- n vektoria avaruudessa $\mathbb{R}^n$ muodostavat kantaa jos ja vain jos ne ovat lineaarisesti riippumattomat.

Kannanvaihtomatriisi

Esimerkki (Jatkuu)

- Tarkistetaan että vektorit

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovat lineaarisesti riippumattomat kääntämällä matriisin

$$B_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Käänteismatriisi B_E^{-1} on sitten kannanvaihtomatriisi E_B kannasta E kantaan B.

Kannanvaihtomatriisi

Esimerkki (Jatkuu)

- $$\begin{aligned}(B_E|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & 5/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & 5/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 4/3 & 1/3 \end{array}\right) = (I|E_B).\end{aligned}$$

- So $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}(\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3)$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}(-2\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3)$, and $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3)$.

Kannanvaihtomatriisi

Esimerkki (Jatkuu)

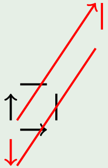
- Mikä on vektorin $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ koordinaatit kannassa
$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)?$$
- $$\mathbf{v}_B = E_B\mathbf{v}_E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-2+1 \\ 4-5-2 \\ -2+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$
- Tarkistetaan että $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2$.

Kannanvaihtomatriisi

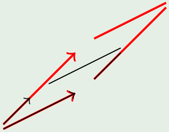
- Nyt tiedetään miten käännetään *vektorien* esitys, Erkin ja Bertan kantojen suhteen?
- Miten "käännetään" *lineaarikuvauksen* $f : V \to V$ matriisiesityksesta toiseen $f_E \leftrightsquigarrow f_B$, Erkin ja Bertan kantojen suhteen?

Esimerkki

$$B_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



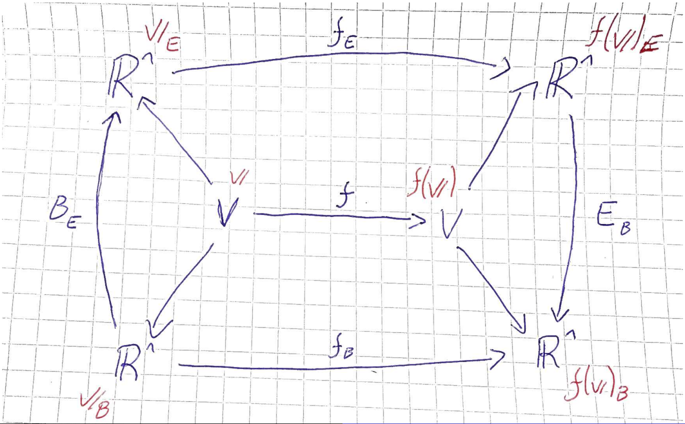
$$f_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$f_E = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Kannanvaihtomatriisi

$$f_B = E_B f_E B_E = B_E^{-1} f_E B_E$$



Kannanvaihtomatriisi

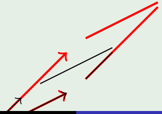
Esimerkki

- Olkoon

$$B_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ja } f_E = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

-

$$f_B = B_E^{-1} f_E B_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Kannanvaihtomatriisi

$$f_E = B_E f_B B_E^{-1}$$

- Diagonalisointi

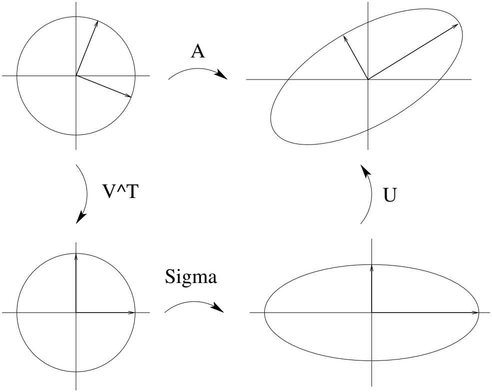
$$A = V \Lambda V^{-1}, \text{ jossa } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  on kannanvaihton erikoistapaus.
- $V = V_E$ on ominaisvektorien muodostama kanta, kirjoitettuna matriisina kannassa E.
- Lineaarikuvauksen matriisiesitys kannassa V on Λ.

Singulaariarvohajotelma

- Singulaariarvohajotelman (Singular Value Decomposition, SVD) ideana on purkaa lineaarikuvaus kolmeen osaan:
  - ortonormaali matriisi ("kierros + peilaus")
  - venytys
  - toinen ortonormaali matriisi
- SVD liittyy läheisesti ns. pääkomponenttianalyysiin.
- Monidimensioisesta datasta etsitään ne komponentit, joilla sen keskeisimmät piirteet voidaan esittää (lineaarisesti) menettämättä oleellista informaatiota.

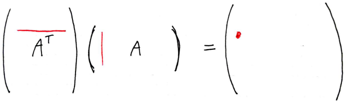
Singulaariarvohajotelma



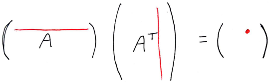
Kuva: A = kierto + venytys + kierto

Symmetrisointi

- Mielivaltaiselle $(n \times m)$-matriisille A, $A^T A$ ja AA^T ovat symmetriset neliömatriisit.
- Matriisin $A^T A$ paikassa (i, j) on matriisin A *rivien* i ja j skalaaritulo.



- Matriisin AA^T paikassa (i, j) on matriisin A *sarakkeiden* i ja j skalaaritulo.



Singulaariarvohajotelma

Lause (Ei todistettu tällä kursilla)

- *Mielivaitaisella symmetrisella matriisilla on aina ominaisvektorit jotka muodostavat ortonormaali kanta.*
- *Matriisien* AA^T *ja* A^TA *ominaisarvot ovat* ≥ 0.

- Olkoon $\mathbf{v}$ matriisin A^TA normitettu (eli $\|\mathbf{v}\| = 1$) ominaisvektori, positiivisella ominaisarvolla $\sigma^2 > 0$.
- Tällöin
$$(AA^T)A\mathbf{v} = A(A^TA)\mathbf{v} = A\sigma^2\mathbf{v} = \sigma^2 A\mathbf{v}.$$

Singulaariarvohajotelma

- $$(AA^T)A\mathbf{v} = A(A^TA)\mathbf{v} = A\sigma^2\mathbf{v} = \sigma^2 A\mathbf{v}.$$
- Matriiseilla A^TA ja AA^T on samat positiiviset ominaisarvot: $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$.
- Tämän lisäksi, 0 on matriisin A^TA $(m-r)$-kertainen ominaisarvo, ja matriisin AA^T $(n-r)$-kertainen ominaisarvo.
- r on matriisin A (ja matriisin A^T) rangi.
- $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}A\mathbf{v}_i$ on matriisin AA^T normitettu ominaisvektori ominaisarvolla σ_i^2.

Singulaariarvohajotelma

- Yhtälöt $A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ kirjoitetaan yhteen matriisiyhtälönä:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}}_{n\times m}\underbrace{\begin{pmatrix} V \end{pmatrix}}_{m\times r} = \underbrace{\begin{pmatrix} U \end{pmatrix}}_{n\times r}\underbrace{\begin{pmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{pmatrix}}_{r\times r}$$

- Jos $\mathbf{v}$ on matriisin $A^T A$ ominaisvektori ominaisarvolla 0, niin

$$A\mathbf{v} \in \mathscr{C}(A) \cap \ker(A^T) = \mathscr{R}(A^T) \cap \ker(A^T) = \{\mathbf{0}\},$$

koska

$$\mathscr{R}(A^T) \perp \mathrm{Null}(A^T).$$

Singulaariarvohajotelma

$$\underset{n\times m}{\begin{pmatrix} \quad A \quad \end{pmatrix}} \underset{m\times r}{\begin{pmatrix} V \end{pmatrix}} = \underset{n\times r}{\begin{pmatrix} U \end{pmatrix}} \underset{r\times r}{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}}$$

- Lisäämällä nolla-ominaisvektorit sarakkeeksi matriiseihin U ja V saamme:

$$\underset{n\times m}{\begin{pmatrix} \quad A \quad \end{pmatrix}} \underset{m\times m}{\begin{pmatrix} \quad V \quad \end{pmatrix}} = \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} U \end{pmatrix}} \underset{n\times m}{\begin{pmatrix} \begin{matrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Singulaariarvohajotelma

$$\underset{n\times m}{\begin{pmatrix} \; A \; \end{pmatrix}} \underset{m\times m}{\begin{pmatrix} \; V \; \end{pmatrix}} = \underset{n\times n}{\begin{pmatrix} \; U \; \end{pmatrix}} \underset{n\times m}{\left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)}$$

- Kirjoitetaan yhtälö matriisihajotelmana: $A = U\Sigma V^{-1}$.
- Matriisin V sarakkeet on ortonormaali kanta, joten $V^{-1} = V^T$.

Singulaariarvohajotelma

Lause (Singulaariarvohajotelma)

- *Olkoon A $(n \times m)$-matriisi. On olemassa ortonormaali neliömatriisit U ja V, sekä $(n \times m)$-ulotteinen lävistäjämatriisi Σ siten, että*

$$A = U\Sigma V^T.$$

- *Lävistäjämatriisin Σ lävistäjäalkiot ovat $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$.*

- Tällaisessa hajotelmassa tekijä Σ on yksikäsittäinen, kun taas matriiseita U ja V eivät välttämättömästi ole.

Singulaariarvohajotelma

- Seuraava *redusoitu singulaariarvohajotelma* on joskus hyödöllinen, ja helpompi laskea.
- (Tämä ei ole kuitenkaan yhtä selkeästi geometrisesti tulkitavissa kuin edellisen lauseen singulaariarvohajotelma.)

Lause (Redusoitu singulaariarvohajotelma)

- *Olkoon A $(n \times m)$-matriisi, jonka aste on r. On olemassa $(n \times r)$-matriisi U, $(r \times r)$-lävistäjämatriisi Σ, sekä $r \times m$-matriisi V^T, siten että:*
  - $$A = U\Sigma V^T$$
  - *Matriisin U sarakkeet ja matriisin V^T rivit ovat ortonormaalit.*
  - *Lävistäjämatriisin Σ lävistäjäalkiot ovat $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$*

Singulaariarvohajotelma

Siispä *redusoitu* SVD voidaan laskea seuraavien tietojen perusteella:

- Matriisin Σ diagonaalialkiot σ_j ovat matriisin $A^T A$ *positiivisten* (eli > 0) ominaisarvojen positiiviset neliöjuuret.
- Matriisin V sarakkeet $\mathbf{v}_j$ (eli V^T:n rivit) ovat matriisin $A^T A$ yksikköpituiset ominaisvektorit ominaisvektorilla σ_j^2.
- Matriisin U sarakkeet ovat $\mathbf{u}_j = A\mathbf{v}_j/\sigma_j$.

Singulaariarvohajotelma

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & U & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \sigma_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & V^T & \\ & & \end{pmatrix}$$

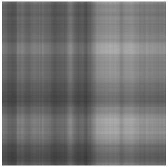
- Lävistäjäalkiot $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ ovat matriisin A *singulaariarvot*.
- Singulaariarvohajotelmalla voidaan kompressoida isoja matriiseja.
- Jos muutetaan kaikki singulaariarvot nolliksi, paitsi k isommat singulaariarvot, niin lopputulos on matriisin A “paras mahdollinen approksimaatio” $(n \times m)$-matriisilla, jonka rangi on $\leq k$.

Singulaariarvohajotelma

Esimerkki

- Testikuvassa on 512×512 pikseliä, eli se voidaan esittää 512×512-matriisilla.
- Tälle matriisille voidaan tehdä singulaariarvohajotelma, ja approksimoida sitten kuvaa ottamalla hajotelmasta k:ta ensimmäistä singulaariarvoa vastaava osuus.
- Huomataan, että vähempikin määrä dataa riittää kuvan esittämiseen tunnistattavasti ja jopa silmämääräisesti riittävän tarkasti.

Singulaariarvohajotelma



(a) $k = 1$

(b) $k = 10$

(c) $k = 20$

(d) $k = 50$

(e) $k = 100$

(f) $k = 200$

(g) $k = 512$

Singulaariarvohajotelma

- Kun alkuperäisen $m \times n$-matriisin sijaan käytetään SVD:stä k ensimmäistä singulaariarvoa, tarvittavien lukujen määrä on

$$k + km + kn,$$

  - k ensimmäistä singulaariarvoa
  - k ensimmäistä sarakevektoria matriisista U.
  - k ensimmäistä rivivektoria matriisista V^T.
- Jos $k < nm/(1 + n + m)$, niin datan määrä pieneni.
- Edellä testikuvalle $n = m = 512$, joten $k < 255$ vähentää datamäärää.

Kurssin sisältö - kertaus

Harjoitustehtävät: Muista määritelmät, ja keksi itse järkevän-näköiset tenttitehtävät. Pystytkö ratkaisemaan niitä? Miten? Miksei?

- Kompleksiluvut
- Vektorilaskenta
  - Skalaaritulot
  - Lineaarinen riippumattomuus
  - Lineaarikuvaukset
- Matriisilaskenta
  - Matriisitulot
  - Lineaariset yhtälöryhmät
  - Käänteismatriisit
  - Perusavaruudet ja projektio
- Matriisihajotelma
  - Ortogonalisointi
  - Determinantit
  - Ominaisarvot ja diagonalisointi
  - LU-hajotelma
  - Singulaariarvot