

MS-A0201  
Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)  
Luento 9: Tasointegraali  
Epäoleelliset integraalit

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos<sup>1</sup>  
Aalto-yliopisto

Kevät 2023

---

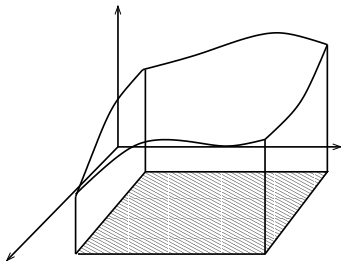
<sup>1</sup>Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

# Tasointegraali

- Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^2$  joukko tasossa ja  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  skalaarikenttä. Halutaan määrittellä *tasointegraali*

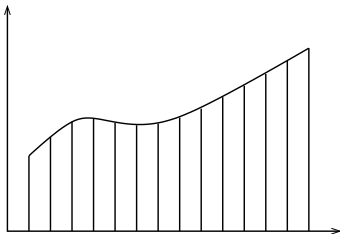
$$\iint_D f(x, y) dA.$$

- Integraalin arvo on pinnan  $z = f(x, y)$  ja  $xy$ -tason väliin jäävän alueen tilavuus.
- Tutkitaan aluksi erikoistapausta  $D = [a, b] \times [c, d]$ :



# Yhden muuttujan tapaus

- Yhden muuttujan tapauksessa integraali saadaan *Riemannin summien* raja-arvona



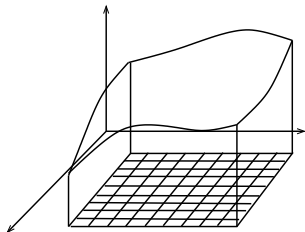
- Formaalisti

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x,$$

missä  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$  on välin  $[a, b]$  tasavälinen jako ja  $\Delta x$  on jakovälin pituus.

## Usean muuttujan tapaus (tasointegraali, $\mathbb{R}^2$ )

- Jaetaan tason osajoukko  $D = [a, b] \times [c, d]$  tasavälisesti ruudukoksi niin, että kummallakin akselilla on  $n$  jakopistettä:



- Nyt voidaan määritellä

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y,$$

missä  $\Delta x$  ja  $\Delta y$  vastaavat jakovälien pituutta  $x$  ja  $y$ -suunnassa:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = \frac{d-c}{n}.$$

## Usean muuttujan tapaus (avaruusintegraali $\mathbb{R}^3$ )

- Tason tapauksessa edellä määriteltyä integraalia kutsutaan *tasointegraaliksi*.
- Samaan tapaan voidaan määritellä *avaruusintegraali*:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

kun  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$  ja  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Tässä

$$\Delta x = \frac{b_1 - a_1}{n}, \quad \Delta y = \frac{b_2 - a_2}{n} \text{ ja } \Delta z = \frac{b_3 - a_3}{n}.$$

- Vieläkin useamman muuttujan funktioita  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , missä  $n \geq 2$ , voi integroida samaan tapaan.

# Huomautuksia

- Yhden muuttajan tapauksessa integraaleille pätee *Analyysin peruslause*:

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f(t) dt, \text{ kun } c, x \in [a, b]$$

ja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva funktio.

- Analyysin peruslauseesta seuraa, että integrointi ja derivointi ovat toistensa vastaoperaatiota, mikä johtaa moniin integroinnissa hyödyllisiin kaavoihin.
- Valitettavasti Analyysin peruslauseelle ei ole yksikäsitteistä, selkeää vastinetta usean muuttujan tapauksessa.

# Moninkertainen integraali

- Monen muuttujan integraaleja voidaan usein kuitenkin laskea moninkertaisina integraaleina.
- Kaksiulotteinen tapaus (integrointialue suorakaide)

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy, \text{ kun } D = [a, b] \times [c, d].$$

- Kolmiulotteinen tapaus (integrointialue suorakulmainen särmiö)

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx dy dz,$$

kun  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ .

- Mikäli funktio  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) on jatkuva, niin integroimisjärjestyksellä ei ole väliä integraalin arvon kannalta.

Laskujen helpouden kannalta väliä kuitenkin on.

## Esimerkki 4

Olkoon  $f(x, y) = xy^2$ . Lasketaan

$$\iint_D f(x, y) dA, \text{ missä } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Aluksi kirjoitetaan tasointegraali kaksinkertaisena integraalina, ja lasketaan

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 dA &= \int_0^1 \int_0^1 xy^2 dx dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{x^2 y^2}{2} \right]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy = \left[ \frac{y^3}{6} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$



## Esimerkki 5

Olkoon  $f(x, y, z) = xye^z$ . Lasketaan

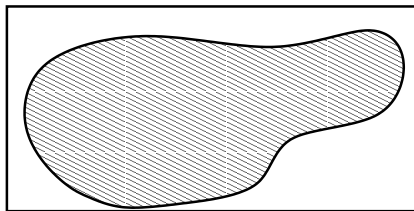
$$\iiint_D f(x, y, z) dV, \text{ missä } D = [0, 2] \times [0, 1] \times [-1, 1].$$

Kirjoitetaan avaruusintegraali kolminkertaisena integraalina. Lasketaan

$$\begin{aligned} \iiint_D xye^z dV &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^2 xye^z dx dy dz \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \frac{x^2 ye^z}{2} \Big|_{x=0}^2 dy dz = \int_{-1}^1 \int_0^1 2ye^z dy dz \\ &= \int_{-1}^1 y^2 e^z \Big|_{y=0}^1 dz = \int_{-1}^1 e^z dz \\ &= e^z \Big|_{z=-1}^1 = e - e^{-1}. \end{aligned}$$

# Integrointi yleisemmissä alueissa 1/2

- Tutkitaan funktiota  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , joka on määritelty tason (tai avaruuden) osajoukossa  $D$ .
- Tähän asti on oletettu, että  $D$  on suorakaide (vast. suorakulmainen särmiö). Yleisemmässä tapauksessa voidaan tarkastella suorakulmiota  $\hat{D}$ , jolle  $D \subset \hat{D}$ .
- Jotta integraali olisi määritelty, täytyy joukon  $D$  olla "siisti" (esim. riittää, että reuna on paloittain sileä).



## Integrointi yleisemmissä alueissa 2/2

- Määritellään funktio  $\hat{f}: \hat{D} \rightarrow \mathbb{R}$  seuraavasti:

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{kun } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{kun } (x, y) \in \hat{D} \setminus D. \end{cases}$$

- Nyt voidaan määritellä

$$\iint_D f(x, y) dA := \iint_{\hat{D}} \hat{f}(x, y) dA.$$

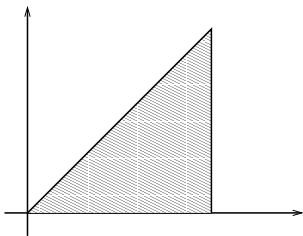
- Samaan tapaan voidaan määritellä myös avaruusintegraali ei-suorakulmaisen integroimisalueen tapauksessa:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV := \iiint_{\hat{D}} \hat{f}(x, y, z) dV,$$

kun  $\hat{D}$  on suorakulmainen särmiö ja  $D \subset \hat{D}$ .

## Esimerkki 6 1/2

Olkoon  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$ . Lasketaan funktion  $f(x, y) = xy$  integraali yli alueen  $D$ .



$$\begin{aligned}\iint_D xy \, dA &= \int_0^1 \left( \int_0^x xy \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^x dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^4}{8} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

## Esimerkki 6 2/2

Integrointi on mahdollista suorittaa myös toisessa järjestyksessä:

$$\begin{aligned}\iint_D xy \, dA &= \int_0^1 \left( \int_y^1 xy \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{x^2 y}{2} \Big|_{x=y}^1 dy = \int_0^1 \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} dy \\ &= \left[ \frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

## Esimerkki 7

Lasketaan funktion  $f(x, y) = e^{x^2}$  integraali Esimerkin 6 alueessa.

$$\iint_D e^{x^2} dA = \int_0^1 \left( \int_0^x e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

Sijoituksella  $t = x^2$ ,  $dt = 2x dx$  saadaan

$$\frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2} e^t \Big|_{t=0}^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}.$$

**Huom.** Integroimisjärjestyksellä on väliä. Integraali

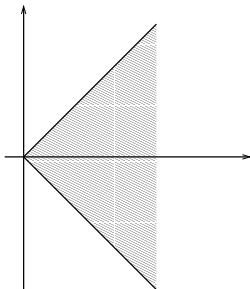
$$\int_0^1 \left( \int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy$$

on “hyvin vaikea” laskea.

## Epäoleelliset integraalit 1/2

Tähän asti integrointi tapahtuu rajoitetussa alueessa rajoitetulle funktiolle (integrandille). Joskus voidaan kuitenkin integroida rajoittamattomia funktioita ja/tai rajoittamattomassa alueessa.

- Tarkastellaan ainoastaan tapausta, jossa funktio  $f$  on ei-negatiivinen eli  $f(\mathbf{u}) \geq 0$  kaikilla  $\mathbf{u} \in D$ .
- Lasketaan funktion  $f(x, y) = e^{-x^2}$  integraali alueessa suorien  $y = \pm x$  rajoittamassa rajoittamattomassa alueessa  $D$ , jossa  $x > 0$ .



## Epäoleelliset integraalit 2/2

Mikäli integraali on suppenee, sen arvo saadaan laskemalla

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-x^2} dA &= \int_0^\infty \int_{-x}^x e^{-x^2} dy dx = \int_0^\infty 2xe^{-x^2} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R 2xe^{-x^2} dx.\end{aligned}$$

Integraalin laskemiseksi huomataan, että  $\frac{d}{dx} e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$ .

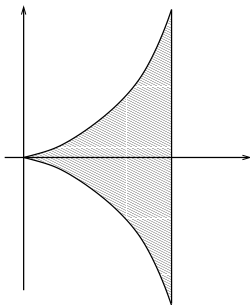
Siten

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R 2xe^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} -e^{-x^2} \Big|_{x=0}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} 1 - e^{-R^2} = 1.$$



## Esimerkki 1 1/2

Olkoon  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| \leq x^2\}$  ja rajoittamaton funktio  $f(x, y) = 1/x^2$ .



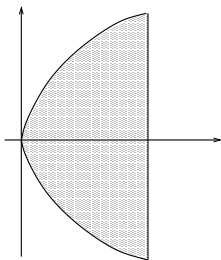
Lasketaan integraali

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \frac{1}{x^2} dA &= \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} \frac{1}{x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 2 dx = 2. \end{aligned}$$

## Esimerkki 1 2/2

Lasketaan saman funktion integraali alueessa

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| \leq \sqrt{x}\}.$$



$$\iint_{D_2} \frac{1}{x^2} dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{x^2} dy dx$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{x} \frac{1}{x^2} dx = \int_0^1 2x^{-3/2} dx = \lim_{R \rightarrow 0^+} \left. \frac{2x^{-1/2}}{-1/2} \right|_{x=R}^1 = \infty.$$

Suppeneminen riippuu integroitavasta funktiosta ja myös alueesta.