

MS-A0201
Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
Luento 10: Muuttujanvaihto
Napa-, sylinteri- ja pallokoordinaatit

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos¹
Aalto-yliopisto

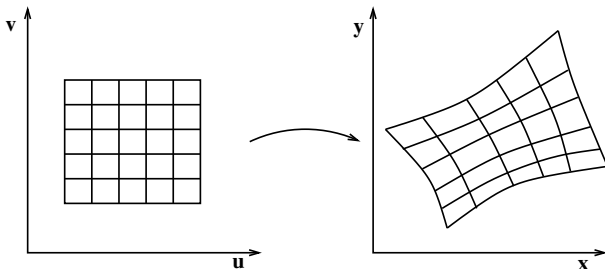
Kevät 2023

¹Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 1/5

Tutkitaan funktiota $\mathbf{F}: G \rightarrow D$, missä D ja G ovat \mathbb{R}^2 :n osajoukkoja. Oletetaan, että funktion \mathbf{F} kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

Lisäksi oletetaan, että \mathbf{F} on bijektio: Jokaista pistettä $(x, y) \in D$ vastaa yksikäsitteinen piste $(u, v) \in G$, jolle $\mathbf{F}(u, v) = (x, y)$. Tällöin erityisesti $D = \mathbf{F}(G)$.



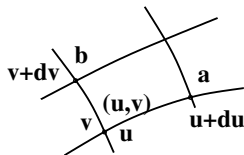
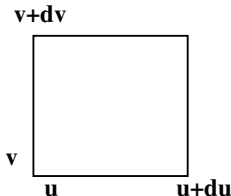
$$(x(u, v), y(u, v)) = \mathbf{F}(u, v).$$

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 2/5

Tutkitaan aluksi muuttujanvaihtoa tasointegraalin tapauksessa:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G ??? du dv.$$

Tarvitaan tieto siitä, miten pinta-ala skaalautuu funktiossa $(x, y) = \mathbf{F}(u, v)$.



Kuvassa **a** (vast. **b**) sijaitsee käyrällä, jolla v (vast. u) on vakio. Koska funktiolla \mathbf{F} on jatkuvat osittaisderivaatat, käyrät ovat sileitä.

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 3/5

Ketjusäännöllä

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \text{ ja } dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Edettäessä vektorin \mathbf{a} suuntaan (x, y) -koordinaateissa, koordinaatti v on vakio ja siten $dv = 0$. Saadaan

$$\mathbf{a} \approx \frac{\partial x}{\partial u} du \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} du \mathbf{j}.$$

Samaan tapaan voidaan päätellä, että

$$\mathbf{b} \approx \frac{\partial x}{\partial v} dv \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} dv \mathbf{j}.$$

Tässä \mathbf{i} ja \mathbf{j} ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset yksikkövektorit.

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 4/5

Approksimaatiokaava pinta-alaelementin dA muutokselle siis on

$$dA = dx dy \approx |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \end{array} \right\|$$

Käytetään merkintää (huom. neliömatriiseille $\det A = \det A^T$)

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right\| du dv := |\det D\mathbf{F}(u, v)| du dv.$$

Determinantti $\det D\mathbf{F}(u, v)$ on funktion $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Jacobin determinantti. Sille käytetään myös merkintää

$$\det D\mathbf{F}(u, v) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \text{ kun } (x, y) = \mathbf{F}(u, v).$$

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 5/5

Jacobin determinantin itseisarvo $|\det D\mathbf{F}(u, v)|$ kertoo paikallisen pinta-alan muutoksen kuvattaessa (u, v) -koordinaattien infinitesimaalinen pinta-ala $du dv$ vastaavalle (x, y) -koordinaateissa lausutulle pinta-alalle $dx dy$ funktion $(x, y) = \mathbf{F}(u, v)$ välityksellä.

Tasointegraalin muuttujanvaihtokaavaksi siis saadaan

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G g(u, v) |\det D\mathbf{F}(u, v)| du dv$$

missä $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ ja $D = \mathbf{F}(G)$.

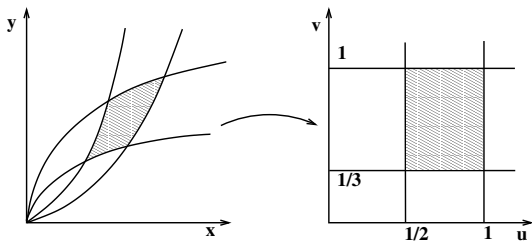
- Tässä \mathbf{F} on integroimisalueiden D ja G välinen bijektio.
- Jacobin determinantin etumerkki kertoo, onko \mathbf{F} suunnistuksen säilyttävä vai kääntävä. Itseisarvo tarvitaan, jotta positiivisen funktion integraali ei muuttuisi negatiiviseksi eräillä \mathbf{F} .

Esimerkki 2 1/3

Lasketaan neljän paraabelin $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ ja $x = 3y^2$ rajoittamaan alueen D pinta-ala.

Huomataan, että integroimisalue kuvautuu suorakulmioksi $G = [1/2, 1] \times [1/3, 1]$ muunnoksella

$$\mathbf{G}(x, y) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad u(x, y) = \frac{x^2}{y}, \quad v(x, y) = \frac{y^2}{x}.$$



Suorakulmion yli on paljon helpompi integroida.

Esimerkki 2 2/3

Halutaan kuitenkin käänteiskuvaus $\mathbf{F} = \mathbf{G}^{-1}: G \rightarrow D$, joka vie koordinaatit (u, v) käyräviivaisille (x, y) -koordinaateille.

Lineaarialgebran perusteella

$$\det D\mathbf{F}(u, v) = \frac{1}{\det D\mathbf{G}(x, y)}.$$

Lasketaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Saadaan myös

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x}.$$

Esimerkki 2 3/3

Lasketaan edelleen

$$\det D\mathbf{G}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -x^2 \\ y & \frac{2y}{x} \end{vmatrix}$$
$$= 4 - 1 = 3, \text{ eli } |\det D\mathbf{F}(u, v)| = \frac{1}{3}.$$

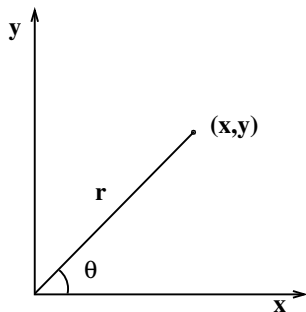
Tulokseksi siis saadaan

$$\iint_D 1 \, dx \, dy = \iint_G \frac{1}{3} \, du \, dv = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}.$$

Yleensä ei käy niin onnellisesti, että sama koordinaatistomuunnos vie integroitavan alueen suorakulmiolle samalla kun integroitava funktio menee vakioksi.

Napakoordinaatit 1/2

Piste $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ voidaan kirjoittaa muodossa (r, θ) , missä $r \geq 0$ ja $0 \leq \theta < 2\pi$. Napakulma θ on yksikäsitteinen jos $r > 0$.



Alkeisgeometriasta saadaan kaavat

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = y/x. \end{cases}$$

Vrt. kompleksiluvun **polaarimuoto** $x + iy = re^{i\theta}$.

Napakoordinaatit 2/2

Koordinaatistomuunnoksen $(r, \theta) \mapsto (x, y)$ Jacobin determinantille saadaan kaava

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Siten muuttujanvaihtokaavaa varten saadaan pinta-alan venytys

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = r dr d\theta.$$

Piirrä kuva!

Tasointegraali napakoordinaateissa

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G g(r, \theta) r dr d\theta,$$

missä $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Esimerkki 1

Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

Lasketaan napakoordinaateissa integraali

$$I = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_1^2 \frac{dr}{r} \\ &= 2\pi \ln r \Big|_{r=1}^2 = 2\pi \ln 2. \end{aligned}$$

Esimerkki 2 1/2

- Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

on erittäin tärkeä mm. todennäköisyyslaskennassa ja tilastotieteessä.

- Tämä integraali on vaikea, koska integraalifunktiota ei ole mahdollista kirjoittaa alkeisfunktioiden avulla.
- Integraali on kuitenkin mahdollista laskea seuraavan tempun avulla:
Huomataan aluksi, että

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Esimerkki 2 2/2

Laskemalla epäoleellinen tasointegraali napakoordinaateissa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\infty} r e^{-r^2} \, dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} \, dr = -\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R (-2r) e^{-r^2} \, dr \end{aligned}$$

jossa viimeinen askel on ovela.

Nyt $\frac{d}{dr} e^{-r^2} = -2r e^{-r^2}$, joten integraali saadaan **analyysin peruslauseella** antiderivaatan hypystä integroimisväliä:

$$\int_0^R (-2r) e^{-r^2} \, dr = e^{-R^2} - 1$$

Viemällä $R \rightarrow \infty$ tulee $I = \pi$ ja siitä alkuperäisen integraalin arvo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{I} = \sqrt{\pi}.$$

Miksi tempu toimi?

Muuttujanvaihto avaruusintegraalissa (kertaus)

- Muunnoskaavat $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases}$$

- Tällöin

$$dx \, dy \, dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw,$$

missä

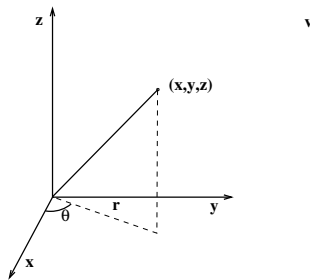
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

- Jos siis $g(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, niin

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_G g(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw.$$

Sylinterikoordinaatit 1/2

Koordinaatit (r, θ, z) , missä $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. Suoralla $r = 0$ (eli z -akselilla) napakulma θ ei ole yksikäsitteinen.



Sylinterikoordinaateissa on helppo esittää pyörähdyskappaleita z -akselin ympäri muodossa

$$r = f(z), \quad \text{jossa } z \in [a, b] \text{ ja } \theta \in [0, 2\pi),$$

missä f on ei-negatiivinen funktio.

Sylinterisymmetriset tehtävät!

Sylinterikoordinaatit 2/2

Muunnoskaavat $(r, \theta, z) \mapsto (x, y, z)$:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

Muunnoksen Jacobin determinantiksi saadaan

$$dx \, dy \, dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| dr \, d\theta \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz.$$

Esimerkki 3

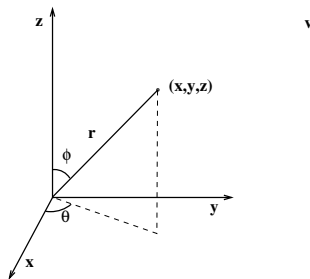
Lasketaan funktion f määrämän pyörähdyskappaleen Ω tilavuus

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \int_a^b \left(2\pi \cdot \frac{1}{2} f(z)^2 \right) dz = \pi \int_a^b f(z)^2 dz,\end{aligned}$$

mikä lienee tuttu kaava.

Pallokoordinaatit 1/2

Koordinaatit (r, θ, ϕ) , missä $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.



Kulmaa $\pi/2 - \phi$ kutsutaan **korotus-** eli **napakulmaksi**, ja sitä käytetään usein ϕ :n sijasta.

Atsimuuttikulma θ ja korotuskulma ovat yksikäsitteisiä jos pisteen etäisyys z-akselista > 0 .

Pallosymmetriset ja eräät sylinterisymmetriset tehtävät!

Pallokoordinaatit 2/2

Muunnoskaavat:

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta, \\ y = r \sin \phi \sin \theta, \\ z = r \cos \phi. \end{cases}$$

Muunnoksen Jacobin determinantiksi saadaan

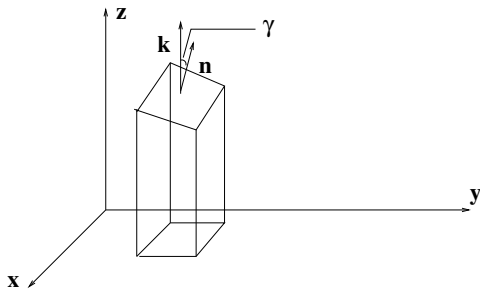
$$dx \, dy \, dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| dr \, d\theta \, d\phi = r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

Esimerkki 4

Lasketaan R -säteisen pallon $\mathbb{B}^3(R)$ tilavuus:

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{B}^3(R)} 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} -r^2 \cos \phi \Big|_{\phi=0}^{\pi} \, d\theta \, dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r^2 \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^R 4\pi r^2 \, dr = \frac{4\pi r^3}{3} \Big|_{r=0}^R = \frac{4\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$

Kaksiulotteinen pinta-ala avaruudessa 1/3



- Tutkitaan kaksiulotteista **kaareutuvaa** pintaa S , joka on (piirtämisen helpottamiseksi) xy -tason yläpuolella avaruudessa \mathbb{R}^3 .
- Tarkastellaan aluksi xy -tason neliön yläpuolelle jäävän osan pinta-ala. Se on ilmeisesti suurempi tai yhtäsuuri kuin vastaavan neliön pinta-ala.

Kaksiulotteinen pinta-ala avaruudessa 2/3

- Tästä johtuen pinta-aladifferentiaali dS on suurempi tai yhtäsuuri kuin kuin $dx dy$. Itseasiassa $dx dy$ saadaan, jos dS projisoidaan xy -tasoon.
- Projektio voidaan kirjoittaa kaavana

$$dx dy = \cos \gamma dS,$$

missä γ on pinnan S normaalivektorin \mathbf{n} ja z -akselin suuntaisen yksikkövektorin \mathbf{k} välinen kulma.

- Toisaalta pistetulon määritelmästä saadaan

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{k}\| \cos \gamma,$$

ja siis

$$dS = \frac{1}{\cos \gamma} dx dy = \frac{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{k}\|}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}} dx dy.$$

Kaksiulotteinen pinta-ala avaruudessa 3/3

- Aikaisemmin on johdettu pinnan (ylöspäin suunnatulle) normaalivektorille esitys

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

- Saadaan

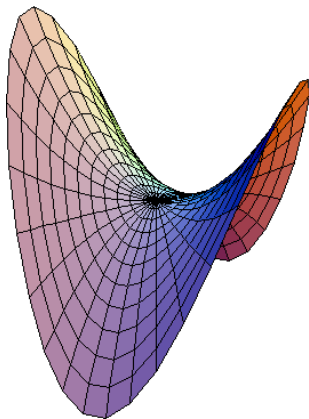
$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

- Lisäksi $\|\mathbf{k}\| = 1$ ja $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 1$, joten

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Kaarevuuden huomioiva korjaustekijä yleistää tasointegraalin pintaintegraaliksi.

Esimerkki 5 1/3



- Tarkastellaan sylinterin $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ leikkaamaa palasta hyperbolisesta paraboloidista $z = x^2 - y^2$. Mikä on palasen pinta-ala?

Esimerkki 5 2/3

- Lasketaan

$$\frac{\partial}{\partial x} z = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y} z = -2y.$$

- Siten pinta-aladifferentiaaliksi saadaan

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta, \end{aligned}$$

napakoordinaateissa ilmaistuna.

Esimerkki 5 3/3

- Lasketaan nyt integraali napakoordinaateissa:

$$\begin{aligned} \text{Ala}(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^a 8r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \\ &= \frac{\pi}{4} \Big|_{r=0}^a \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{3/2} = \frac{\pi}{6} [(1 + 4a^2)^{3/2} - 1]. \end{aligned}$$