Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Metsälampi
Harjoitukset, Viikko 3A, 2023

Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita. Mahdolliset vastaukset on siirretty loppuun.

Määritelmistä

TEHTÄVÄ M1 Tarkastellaan funktiota

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}.$$

Onko funktiolla raja-arvo pisteessä $(1,1)$? Voiko funktion määritellä pisteessä $(1,1)$ s.e. se on jatkuva?

TEHTÄVÄ M2 Jatkoa edelliseen: Voiko funktion määrittelyaluetta laajentaa s.e. se on jatkuva koko xy-tasossa?

Johdanto

TEHTÄVÄ J1 Todista, että seuraavilla kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisilla funktioilla on raja-arvo origossa ja määritä tämä:

$$\text{a) } \frac{(1+y^2)\sin x}{x}, \qquad \text{b) } \frac{x\tan y}{y}.$$

TEHTÄVÄ J2 Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $f(0,0) = a$ ja origon ulkopuolella funktiolla on lauseke

$$\frac{x^2 + y^2 - x^3y^3}{x^2 + y^2}.$$

Voidaanko a valita siten, että f on jatkuva origossa?

Kotitehtävät

TEHTÄVÄ K1 Olkoon geometrisessa avaruudessa E^3 määriteltynä reaaliarvoinen funktio

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \neq 0,$$

missä a ja b ovat lineaarisesti riippumattomia vakiovektoreita. Tutki, onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{\mathbf{r} \to \mathbf{o}} f(\mathbf{r}).$$

TEHTÄVÄ K2 Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $f(0,0) = a$ ja origon ulkopuolella funktiolla on lauseke

$$\text{c) } \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{d) } \frac{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} - 1}{x^2 + y^2}, \quad \text{e) } \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Voidaanko a valita siten, että f on jatkuva origossa?

Vastauksia

TEHTÄVÄ J1

Ratkaisu: a) 1; b) 0.

TEHTÄVÄ K1

Ratkaisu: Ei ole.

TEHTÄVÄ K2

Ratkaisu: c) $a = 0$; d) $a = \frac{1}{2}$; e) $a = 1$.