VK 2B

M1

a) $(-1,2,1) \longrightarrow (5,4,-2)$

$$\begin{cases} x(t) = -1 + 6t \\ y(t) = 2 + 2t \\ z(t) = 1 - 3t \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

b) $y = x^2$: $(-2,4) \longrightarrow (1,1)$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, \quad t \in [-2,1]$$

c) origokeskinen ympyrä : $R = 3$
vastapäivään : $(3,0) \rightarrow (0,3)$

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

d) nyt vastakkaiseen suuntaan

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(\pi/2 - t) \\ y(t) = 3\sin(\pi/2 - t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

M2

$$x = t^3 + t$$
$$y = 1 - t^3$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 1 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -3t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \left. \frac{-3t^2}{3t^2+1} \right|_{t=1} = -\frac{3}{4}$$

TEHTÄVÄ J1 Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2+1}{4(1-t)}\,\mathbf{i} + \frac{t}{t+1}\,\mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaaka- tai pystysuora.

Ratkaisu: Asymptootit $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$;
pystysuora tangentti pisteissä $(\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1), -1/\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1), 1/\sqrt{2})$.

RATKAISU Suoraviivaiset asymptootit ovat suoria, joita käyrä $\mathbf{r}$ lähestyy, kun $\|\mathbf{r}(t)\| \to \infty$. Koska koordinaattifunktiot

$$x(t) = \frac{t^2+1}{4(1-t)} \quad \text{ja} \quad y(t) = \frac{t}{t+1}$$

ovat rationaalifunktioita, voidaan rajoittaa tarkastelu parametrin t arvoihin, joilla ainakin toisen koordinaattifunktion ~~nimittäjä~~ osoittaja kasvaa rajatta tai ~~osoittaja~~ nimittäjä lähestyy nollaa.

- Havaitaan, että $\lim_{t\to 1^+} x(t) = -\infty$ ja $\lim_{t\to 1^-} x(t) = \infty$. Toisaalta

  $$\lim_{t\to 1} y(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t}{t+1} = \frac{1}{2}.$$

  Näin ollen yksi käyrän asymptooteista on $y = 1/2$.

- Vastaavasti havaitaan, että $\lim_{t\to -1^+} y(t) = \infty$, $\lim_{t\to -1^-} y(t) = -\infty$ ja

  $$\lim_{t\to -1} x(t) = \lim_{t\to -1} \frac{t^2+1}{4(1-t)} = \frac{1}{4}.$$

  Siten käyrällä on myös asymptootti $x = 1/4$.

- Lisäksi $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$ ja $\lim_{t\to -\infty} x(t) = \infty$. Toisaalta

$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{1+1/t} = 1,$$

  joten myös suora $y = 1$ on käyrän asymptootti.

Käyrällä on pystysuora tangentti ainoastaan pisteissä, joissa $x'(t) = 0$ ja $y'(t) \neq 0$. Ratkaistaan tangenttivektorin x-komponentin nollakohdat:

$$x'(t) = \frac{-t^2+2t+1}{4(1-t)^2} = 0 \Leftrightarrow -t^2+2t+1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad t = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Toisaalta y-komponentin derivaatta

$$y'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} \neq 0$$

kaikilla parametrin t arvoilla. Näin ollen käyrällä on pystysuorat tangentit pisteissä

$$\mathbf{r}(1+\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

ja

$$\mathbf{r}(1-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

Vastaavasti vaakasuoran tangentin olemassaolo edellyttäisi, että $y'(t) = 0$. Kuitenkin jo edellä havaittiin, ettei tämä toteudu millään parametrin t arvoista. Tästä seuraa, ettei käyrällä voi olla vaakasuoria tangentteja.

Piirto esim. Maple:

```
plot([(t^2+1)/(4(1-t)), t/(t+1), t = -infinity..infinity])
```

Tehtävä J2

a) Laske pituus ruuviviivankaarelle $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Johda ellipsin kehän pituudelle lauseke

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}\, dt,$$

missä a on ellipsin ison akselin puolikas ja e eksentrisyys. Integraalia ei voida laskea alkeisfunktioiden avulla.

Ratkaisu: a) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

Ratkaisu

a) Tangenttivektoriksi saadaan

$$\mathbf{r}'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}$$

ja tälle normi

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2}\\ &= \sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Kaarenpituus on siten

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

b) Ellipsillä, jonka polttopisteet ovat x-akselilla, on parametrisointi

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j},\ \text{kun } t \in [0, 2\pi],$$ [1]

Lisäksi ellipsin eksentrisyydelle pätee[2]

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \geq 0 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2.$$

[1]Tässä a on puolet ellipsin isoakselin pituudesta ja b puolet pikkuakselin pituudesta.

[2]Voi toki halutessaan myös johtaa: Eksentrisyys määritellään ellipsin polttopisteiden välisen etäisyyden suhteena isoakselin pituuteen.

Ratkaistaan ensin tangenttivektorin normi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= -a\sin t\,\mathbf{i} + b\cos t\,\mathbf{j} \\
\Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{a^2\sin 2t + b^2\cos^2 t} \\
&= a\sqrt{\sin^2 t + (b^2/a^2)\cos^2 t} \\
&= a\sqrt{\sin^2 t + (1-e^2)\cos^2 t} \\
&= a\sqrt{1-e^2\cos^2 t}.
\end{aligned}$$

Siten ellipsin kaarenpituus on

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$$