LASKUHARJOITUS VIIKOT $1-2$ MALLIRATKAISUT, MATRIISILASKENTA

1. MATLAB-ohjelmointiin johdatus (mukaanlukien kotitehtävä viikko 1)

Kotitehtävä viikko 1 (deadline 24.2.) Suorita omatoimisesti MATLAB Onramp-opetuskurssi (kesto noin 2 tuntia), osoitteella `https://fi.mathworks.com/ learn/tutorials/matlab-onramp.` Sinun ei tarvitse opetuskurssia varten ladata mitään ohjelmistoa tietokoneellesi erikseen, vaan kurssin voi suorita ihan nettiselaimessasi. Kun olet suoritanut opetuskurssin, lataat sertifikaatin MyCoursesiin (Kotitehtävät > MATLAB OnRamp)

Tehtävä 2. Yksi matriisilaskennan pääteemoista on lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen tutkiminen matriisien avulla.

a) Lämmittelynä, ratkaise paperilla ja kynällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 3 \\ x_1 - 2x_2 & = -1 \end{cases},$$

jossa $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

b) Kirjoita tämän jälkeen Matlabiin:

```
A = [2 1; 1 -2]
b = [3 ; -1]
x = A\b
```

Tarkista, että x on yhtä kuin $[x_1; x_2]$, jossa x_1 ja x_2 ovat a)-osan vastaukset.

Matriisin A luvut $[2\ \ 1; 1\ \ -2]$ ovat yhtälöryhmän vasemman puolen kertoimet (jossa eri yhtälöt on eritetty puolipisteellä) ja *vektorin b* luvut $[3; -1]$ ovat yhtälöryhmän oikean puolen vakiot.

c) Ratkaise seuraava (viiden yhtälön ja viiden muutujan) yhtälöryhmä, samalla muodolla kuin b)-osassa.

$$\begin{cases} 35x_1 & & +14x_3 & +16x_4 & +2x_5 & = 67 \\ 27x_1 & +7x_2 & +14x_3 & +4x_4 & -7x_5 & = 45 \\ -13x_1 & -2x_2 & +6x_3 & +10x_4 & +8x_5 & = 9 \\ 30x_1 & -x_2 & -12x_3 & +7x_4 & +11x_5 & = 13 \\ 7x_1 & +14x_2 & +7x_3 & -3x_4 & -10x_5 & = 15 \end{cases}$$

Älä vielä huolehdi, jollet ymmärrä mitä koodisi “tarkoittaa”, vaan käytä b)-osa ihan “reseptinä”.

Ratkaisu.

a) Oletetaan, että reaaliluvut x_1 ja x_2 toteuttavat yhtälön

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 &= -1. \end{cases}$$

Kertomalla ensimmäinen yhtälö puolittain luvulla 2 saamme yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 &= -1. \end{cases}$$

Lisäämällä yhtälöt puolittain yhteen saadaan $5x_1 = 5$, josta saamme $x_1 = 1$. Sijoittamalla tämä esimerkiksi yhtälöön $2x_1 + x_2 = 3$ saamme $2 + x_2 = 3$, josta seuraa $x_2 = 1$. Siis jos luvut x_1 ja x_2 toteuttavat yhtälöryhmän, niin tällöin $x_1 = x_2 = 1$. Sijoittamalla nämä alkuperäiseen yhtälöryhmään nähdään, että nämä tosiaan ovat yhtälöryhmän ratkaisut:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ 1 - 2 \cdot 1 = -1. \end{cases}$$

b) Kirjoitetaan haluttu koodi Matlabiin:

```
>> A = [2 1; 1 -2];
>> b = [3 ; -1];
>> x = A\b;
>> x
x =
    1
    1
```

Siis x on vektori $(1, 1)$, joka oli a-kohdan ratkaisu.

c) Ratkaistaan yhtälöryhmä Matlabin avulla samalla tavalla kuin b-kohdassa. Matriisiin A tulee yhtälöryhmän tuntemattomien kertoimet ja vektoriksi b tulee yhtälöryhmän oikeanpuoleiset vakiot. Yhtälöryhmä ratkaistaan tällöin komennolla A\b.

```
>> A = [
    35 0 14 16 2;
    27 7 14 4 -7;
    -13 -2 6 10 8;
    30 -1 -12 7 11;
    7 14 7 -3 -10
    ];
>> b = [67; 45; 9; 13; 15];
>> A\b
ans =
    0.6237
    -0.0282
    0.6237
    2.4527
    -1.4021
```

Yhtälöryhmällä näyttää olevan yksi ratkaisu. Ratkaisu on $x_1 = 0.6237, x_2 = -0.0282, x_3 = 0.6237, x_4 = 2.4527, x_5 = -1.4021$.

Harjoitustehtävät viikko 1

Tehtävä 1. Esitä seuraavat lausekkeet muodossa $a + bi$:

a) $\overline{12 + 7i}$
b) $(7 + i)(3 - 2i)$
c) $\frac{7+i}{3-2i}$
d) i^3
e) $\sqrt{-25}$
f) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$
g) $\frac{3}{4-3i}$
h) $e^{\frac{\pi i}{2}}$
i) $e^{2+\frac{2\pi}{3}i}$
j) $(1 + i)^{10}$ (Vinkki: napakoordinaatisto)

Ratkaisu.

a) $12 - 7i$
b) $23 - 11i$
c) $19/13 + (17/13)i$
d) $-i$
e) $\pm 5i$
f) ± 6
g) $\frac{12}{25} + \frac{9}{25}i$
h) $\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)i = i$
i) $e^2(\cos(2\pi/3) + \sin(2\pi/3)i) = -e^2/2 + (e^2\sqrt{3}/2)i$
j) Napakoordinaateissa $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)i)$ joten

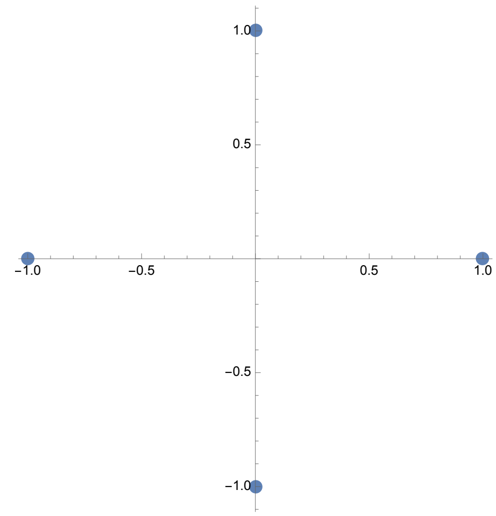
$$\begin{aligned}(1 + i)^{10} &= \sqrt{2}^{10}(\cos(10\pi/4) + \sin(10\pi/4)i)\\ &= (\sqrt{2}^2)^5(\cos(5\pi/2) + \sin(5\pi/2)i)\\ &= 32\cos(\pi/2) + 32\sin(\pi/2)i\\ &= 32i.\end{aligned}$$

Tehtävä 2. Etsi seuraavat juuret ja esitä ne kompleksitasossa:

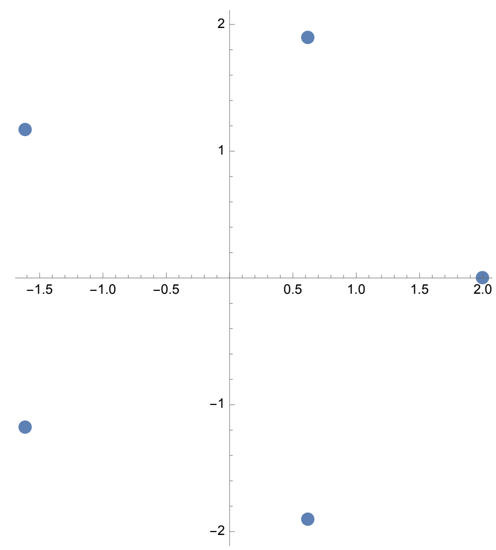
a) Yhtälön $x^4 = 1$ kaikki ratkaisut.
b) Yhtälön $x^5 = 32$ kaikki ratkaisut.
c) Yhtälön $x^3 = i$ kaikki ratkaisut.
d) Yhtälön $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ kaikki ratkaisut.

Ratkaisu. Kohdat a-c voidaan ratkaista napakoordinaattien avulla. Yleisesti yhtälö $x^n = c$, missä $c \in \mathbb{C}$, voidaan ratkaista kirjoittamalla $x = re^{\alpha i}$ ja kirjoittamalla vakio c myös napakoordinaateissa, $c = se^{\beta i}$. Tällöin $x^n = c$ jos ja vain jos $r^n = s$ ja $n\alpha = \beta + k2\pi$, missä $k \in \mathbb{Z}$. Näistä voidaan ratkaista r ja α.

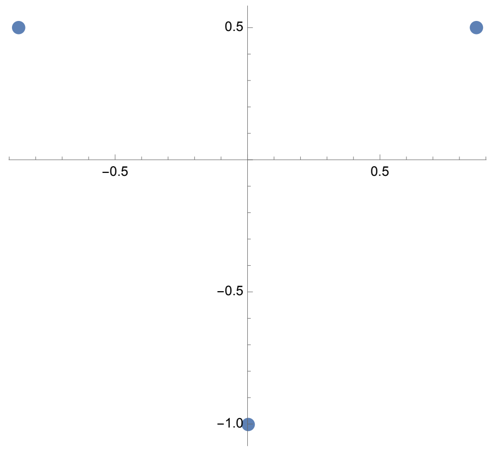
a) $r = 1$ ja $\alpha \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. Kompleksitasoon piirrettynä saadaan seuraavat pisteet.



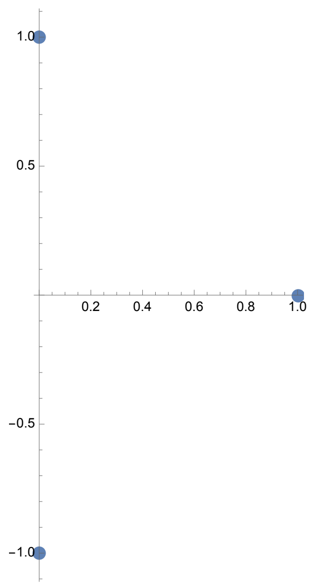
b) $r = 2$ ja $\alpha \in \{0, 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5\}$. Kompleksitasossa näitä vastaavat seuraavat pisteet



c) $r = 1$ ja $\alpha \in \{\pi/6, 5\pi/6, 9\pi/6\}$. Kompleksitasossa näitä vastaavat seuraavat pisteet.



d) Huomaa $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2+1)(x-1)$. Siten ratkaisujouko on $\{1, -i, i\}$. Komplesitasoon piirrettynä saadan seuraavat pisteet.



Tehtävä 3. Mitkä seuraavista lausekkeista ovat vektoreita? Mitkä ovat reaalilukuja? Mitkä näistä ovat järjettömiä? Perustele.

a) $\|\mathbf{a}\|(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$
b) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{c}$
c) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$
d) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$
e) $\|\mathbf{a}\|(\mathbf{b}+\mathbf{c})$
f) $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$

Ratkaisu.

a) Reaalilukujen tulo, eli kyseessä on reaaliluku.
b) Reaaliluku plus vektori. Kyseessä on järjetön lauseke.
c) Reaaliluku kertaa vektori. Kyseessä on vektori.

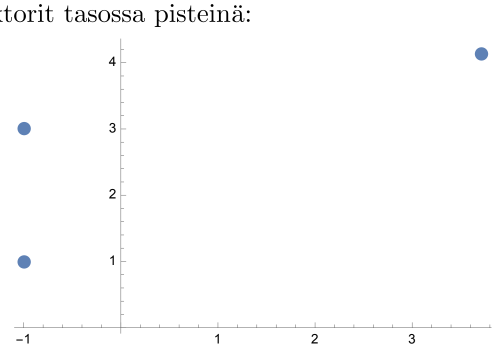
d) Reaaliluku pistetulo reaaliluvun kanssa. Järjetön lauseke.
e) Reaaliluku kertaa vektori. Kyseessä on vektori.
f) Vektori kertaa reaaliluku. Jos vektoreita kerrotaan reaaliluvuilla tulee reaaliluku kirjoittaa vasemmalle puolelle. Tämä lauseke on järjetön.

Tehtävä 4. Laske summat $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ja skalaaritulot (pistetulot) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Piirrä vektorit, jotka ovat tasossa, ja varmista, että vastaukset ovat järkeviä.

a) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\ \pi\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}e\\ 1\end{pmatrix}$.
b) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$.
c) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}$.
d) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.
e) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\ \frac{1}{3}\\ 1\end{pmatrix}$.

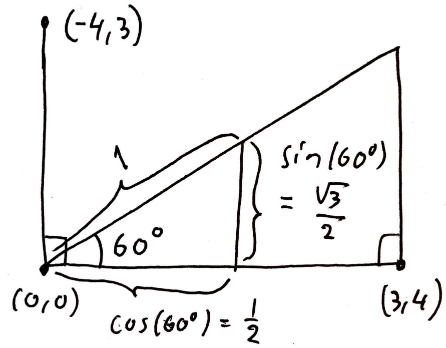
Ratkaisu.
a) $\begin{pmatrix}1+e\\ \pi+1\end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix}8/3\\ 4/3\\ 3\end{pmatrix}$

a,b ja c-kohtien vektorit tasossa pisteinä:



Tehtävä 5. Etsi vektori, jonka pituus on 1 siten, että sen ja vektorin $\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$ välinen kulma on $60°$.

Ratkaisu. Etsitään aluksi vektori, joka on kohtisuorassa vektoria $(3,4)$ vasten. Voidaan valita esimerkiksi $(-4,3)$ sillä $(3,4)\cdot(-4,3)=0$. Tarkastellaan nyt seuraavanlaista kuvaa.



Haluttu vektori on tässä pienemmän suorakulmion hypotenuusalla. Tähän vektoriin päästään kulkemalla ensin $1/2$ verran vektorin $(3,4)$ suuntaan ja sen jälkeen $\sqrt{3}/2$ verran vektorin $(-4,3)$ suuntaan. Tarkemmin sanottuna jos v_1 on vektori $(3,4)$ normalisoituna ja v_2 on vektori $(-4,3)$ normalisoituna, on kysytty vektori

$$\frac{1}{2}v_1+\frac{\sqrt{3}}{2}v_2.$$

Koska $\|(3,4)\|=\|(-4,3)\|=5$, on $v_1=(3/5,4/5)$ ja $v_2=(-4/5,3/5)$. Näin ollen kysytty vektori on

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}-4/5\\3/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3-4\sqrt{3}}{10}\\\frac{4+3\sqrt{3}}{10}\end{pmatrix}.$$

Perehdyttävä tehtävä viikko 2

Oletuksena on, että opiskelet perehdyttävät tehtävät ENNEN viikon ensimmäistä luentoa. Perehdyttävien tehtävien ratkaisuja käsitellään osittain luennoilla. On erittäin suositeltavaa, että pohditte perehdyttäviä tehtäviä ryhmissä. Näin opitte myös uusia ajatustapoja matematiikkaan liittyen.

Tehtävä 1. Joukko vektoreita $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ on *lineaarisesti riippuva*, jos on olemassa reaaliluvut $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, eivät kaikki 0, siten että

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

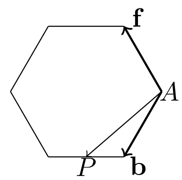
Esimerkkiksi vektorit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippuvat, sillä

$$2\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

a) Vakuuta itsesi siitä, että kaksi geometristä vektoria ovat riippuvat jos ja vain jos ne ovat yhdensuuntaiset.
b) Näytä, että mitkä tahansa kaksi reaalilukua (t.s. vektoria avaruudessa $\mathbb{R}^1$) ovat lineaarisesti riippuvat.
c) Näytä, että mitkä tahansa kolme vektoria avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ovat lineaarisesti riippuvat.
d) Osaatko sanoa mikä voisi olla b) ja c) kohdan havaintojen yleistys
e) Anna esimerkki kolmesta avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorista, jotka ovat lineaarisesti riippumattomat.
f) Anna esimerkki kolmesta avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorista, jotka ovat lineaarisesti riippuvia.
g) Luulisitko että "suurin osa" (mitä tämä sitten tarkoittaakaan) avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorikolmikkoista ovat lineaarisesti riippumattomia vai riippuvia?

Kotitehtävät viikko 2

Kotitehtävä 1. Olkoon $ABCDEF$ säännöllinen kuusikulmio, ja olkoon P sivun BC keskipiste. Olkoon $\mathbf{b}$ vektori $\vec{AB}$ ja olkoon $\mathbf{f}$ vektori $\vec{AF}$. Esitä vektori $\vec{AP}$ vektorien $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{f}$ lineaarikombinaattiona.



Ratkaisu. Olkoon O kuusikulmion keskipiste. Nyt siis $\vec{BO} = \mathbf{f}$ ja $\vec{OC} = \mathbf{b}$. Täten $\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} = \mathbf{f} + \mathbf{b}$. Koska P on sivun BC keskipisteessä, on $\vec{BP} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{f} + \mathbf{b})$. Näin ollen $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{f} + \mathbf{b}) = \frac{3}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{f}$.

Kotitehtävä 2. Etsi yhtälön

$$z^3 + 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}i$$

kaikki kolme ratkaisua. Kirjoita ratkaisu joko napakoordinaatteissa tai reaali- ja imaginaarikoordinaatteissa.

Ratkaisu. Olkoon $c = -4\sqrt{4} + 4\sqrt{2}i$. Etsimme siis ratkaisua yhtälöön $z^3 = c$. Ratkaistaan aluksi kompleksiluvun c napakoordinaatit. Sen normiksi saadaan

$$\sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 \cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{4 \cdot 16} = 8.$$

Normalisoidaan nyt luku c. Kun luku normalisoidaan sen vaihekulma ei muutu ja tällöin on helpompi nähdä mikä luvun c vaihekulma on. Saamme

$$\frac{c}{8} = \frac{-4\sqrt{2}}{8} + \frac{4\sqrt{2}}{8}i = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Nyt koska esimerkiksi

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

voidaan luvun c vaihekulmaksi valita $3\pi/4$. Näin ollen $c = 8e^{3\pi i/4}$. Merkitään nyt $z = re^{\theta i}$ missä $r \geq 0$ ja $\theta \in [0, 2\pi)$. Koska kaksi kompleksilukua ovat samat jos ja vain jos niillä on sama normi ja niiden vaihekulmien erotus on luvun 2π moninkerta, saadaan

$$\begin{aligned} z^3 = c &\iff r^3 e^{3\theta i} = 8e^{3\pi i/4} \\ &\iff r^3 = 8 \quad \text{ja} \quad 3\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff r = 2 \quad \text{ja} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Luku θ on joukossa $[0, 2\pi)$ jos ja vain jos $k \in \{0, 1, 2\}$, jolloin vastaavasti $\theta = \pi/4, \theta = 11\pi/12$ ja $\theta = 19\pi/12$. Täten saadaan kolme ratkaisua:

$$z = 2e^{\pi i/4}, \quad z = 2e^{11\pi i/12}, \quad z = 2e^{19\pi i/12}.$$

Kotitehtävä 3. Laske pisteen $P = (1, 2, 3)$ projektio tasoon

$$\Pi = \{(x, y, z) : x + y + z = 2\}.$$

(Ts: etsi piste Q tasossa Π, siten että etäisyys $\|\vec{PQ}\|$ on pienin mahdollinen.)

Ratkaisu. Tason Π normaali on vektori $(1, 1, 1)$, sillä taso koostuu kaikista pisteistä (x, y, z) joilla $(x, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 2$. Pisteeseen Q päästään kulkemalla ensin pisteeseen P ja sen jälkeen kulkemalla vektorin $(1, 1, 1)$ suuntaan kunnes päädytään tasolle Π. Siten $Q = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$ missä $t \in \mathbb{R}$ on sellainen, jolla $Q \in \Pi$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} Q \in \Pi &\iff (1, 2, 3) + t(1, 1, 1) \in \Pi \\ &\iff (1 + t) + (2 + t) + (3 + t) = 2 \\ &\iff 6 + 3t = 2 \\ &\iff t = -4/3. \end{aligned}$$

Siten

$$Q = (1, 2, 3) + (-4/3)(1, 1, 1) = (-1/3, 2/3, 5/3).$$

Kotitehtävä 4. Olkoon $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kierto θ radiaania vastapäivään origon ympäri, ja olkoon $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kierto σ radiaania vastapäivään origon ympäri. Etsi yhdistetyn kuvauksen $p \circ q$ matriisiesitys:

a) Tulkitsemalla $p \circ q$ geometrisesti kiertona.
b) Matriisikertolaskulla

Olet just todistanut uudelleen pari lukiomatematiikan tärkeimmistä trigonometrialauseista. Mitkät?

Ratkaisu. Tehdään aluksi muutama yleinen huomio. Jos $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on kuvaus, joka kiertää tasoa α radiaania vastapäivään saadaan kuvauksen L matriisi (standardikannassa) katsomalla mihin standardikannan vektorit $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ kuvautuvat ja laittamalla nämä matriisin sarakkeiksi. Muistamalla trigonometristen funktioiden yhteys yksikköympyrään nähdään, että vektori $(1, 0)$ kuvautuu vektoriksi

$$(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Vektori $(0, 1)$ saadaan vektorista $(1, 0)$ kiertämällä sitä $\pi/2$ radiaania vastapäivään. Näin ollen $L(0, 1)$ saadaan kiertämällä vektoria $(1, 0)$ ensin $\pi/2$ radiaania vastapäivään, ja sitten α radiaania vastapäivään. Näin ollen $(0, 1)$ kuvautuu vektoriksi

$$(\cos(\pi/2 + \alpha), \sin(\pi/2 + \alpha))$$

joka voidaan kirjoittaa trigonometrisia kaavoja käyttäen muodossa

$$(\cos(\pi/2 + \alpha), \sin(\pi/2 + \alpha)) = (-\sin\alpha, \cos\alpha).$$

Siten kuvauksen L esitysmatriisi on

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan nyt tehtävät.

(1) Kuvaus $p \circ q$ kiertää tasoa $\theta + \sigma$ radiaania vastapäivään. Näin ollen sen esitysmatriisi on alun huomioiden nojalla

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta + \sigma) & -\sin(\theta + \sigma) \\ \sin(\theta + \sigma) & \cos(\theta + \sigma) \end{bmatrix}.$$

(2) Kuvauksen p esitysmatriisi on alun huomioiden nojalla

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ja kuvauksen q esitysmatriisi on

$$B = \begin{bmatrix} \cos\sigma & -\sin\sigma \\ \sin\sigma & \cos\sigma \end{bmatrix}.$$

Tiedetään, että AB on nyt kuvauksen $p \circ q$ esitysmatriisi. Laskemalla matriisitulo saadaan

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\sigma - \sin\theta\sin\sigma & -\cos\theta\sin\sigma - \sin\theta\cos\sigma \\ \sin\theta\cos\sigma + \cos\theta\sin\sigma & -\sin\theta\sin\sigma + \cos\theta\cos\sigma \end{bmatrix}.$$

Toisaalta a-kohdassa näimme, että myös matriisi

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta+\sigma) & -\sin(\theta+\sigma) \\ \sin(\theta+\sigma) & \cos(\theta+\sigma) \end{bmatrix}$$

on kuvauksen $p \circ q$ esitysmatriisi. Näin ollen katsomalla matriisien ensimmäistä saraketta saadaan, että

$$\cos(\theta+\sigma) = \cos\theta\cos\sigma - \sin\theta\sin\sigma$$

ja

$$\sin(\theta+\sigma) = \sin\theta\cos\sigma + \cos\theta\sin\sigma.$$

Harjoitustehtävät viikko 2

Harjoitustehtävä 1. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolle pätee

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}.$$

Laske $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Ratkaisu. $\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}$

Harjoitustehtävä 2. Etsi seuraavien tasojen yhtälöt

a) Pisteiden origon, $(1,0,1)$, sekä $(0,1,0)$ läpi menevä taso.

b) Taso, joka sisältää pisteen $(2,1,0)$, ja jonka normaalivektori on $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

c) Taso, joka sisältää pisteen $(2,1,2)$, ja jolla on suuntavektorit $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Ratkaisu.

a) Esimerkiksi $x - z = 0$. Muitakin löytyy.
b) Esimerkiksi $x + 2y + 3z = 4$.
c) Esimerkiksi $x - y + z = 3$.

Harjoitustehtävä 3. Mitkät seuraavista kuvauksista $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ovat lineaarisia? Lineaarisille kuvauksilla, löydä matriisiesitykset!

a) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x^2\\y^2\end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}$.

Ratkaisu.

a) On lineaarikuvaus. Matriisi:

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

b) Ei ole lineaarikuvaus.
c) On lineaarikuvaus. Matriisi:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

d) Ei ole lineaarikuvaus.

e) On lineaarikuvaus. Matriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Harjoitustehtävä 4. Olkoon $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ matriisin $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ antama projektio, olkoon $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kierto θ radiaania vastapäivään origon ympäri, ja olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ kuvausmatriisin P^T antama kuvaus.

(1) Laske yhdistetyn kuvauksen $f \circ r \circ p$ matriisiesitys.

(2) Lakse $f \circ r \circ p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ratkaisu.

(1) Esitysmatriisi on

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \sin(\theta) - \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & -\sin(\theta) - \cos(\theta) \\ \sin(\theta) - \cos(\theta) & \sin(\theta) + \cos(\theta) & -2\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 2\sin(\theta) \\ -2\cos(\theta) \\ -2\sin(\theta) - 2\cos(\theta) \end{bmatrix}$$