Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Metsälampi
Harjoitukset, Viikko 4B, 2023

Määritelmistä

TEHTÄVÄ M1 Etsi vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion

$$f(x, y, z) = (x^2 + yz,\ 2ze^x,\ x \ln y)$$

Jacobin matriisi. Laske funktion differentiaali pisteessä $(0, 1, -2)$, kun $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1$.

TEHTÄVÄ M2 Mihin suuntiin funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \text{ kun } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0,$$

origossa muodostettu suunnattu derivaatta on olemassa? Onko f differentioituva origossa?

Johdanto

TEHTÄVÄ J1 Laske seuraavien funktioiden suunnatut derivaatat annettuihin suuntiin annetuissa pisteissä:

a) $f(x, y) = e^{x+y}, \quad \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad (0, 0),$
b) $f(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y^2), \quad \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad (1, 2),$
c) $f(x, y, z) = xy^2 z^3, \quad 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad (-3, 2, 1),$
d) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3, \quad \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad (3, -1, 4).$

TEHTÄVÄ J2 Laske kohdassa a) vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion Jacobin matriisi ja kohdassa b) Taylorin polynomi

a) $f(x,y,z) = (xe^{-yz},\ \frac{y}{x} + \frac{z}{y},\ \sqrt{x}z^2)$,

b) $f(x,y) = 2x^4 - 5y^3 + 2xy^2,$ keskus $= (0,0),$ aste $= 3.$

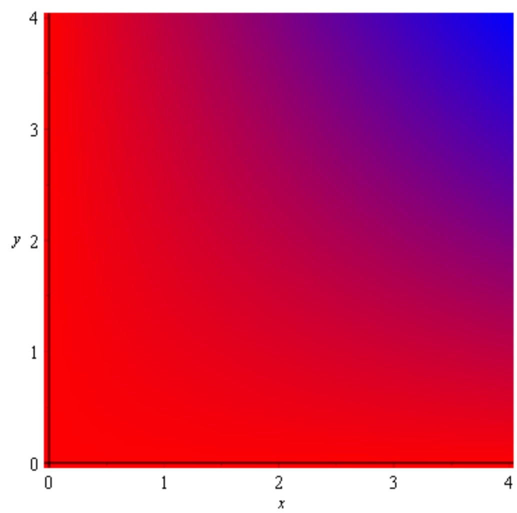
Kotitehtävät

TEHTÄVÄ K1 Neliön staattinen lämpötilajakauma olkoon muotoa

$$u(x,y) = 400 - 25xy,\ 0 \le x, y \le 4.$$

a) Määritä lämpövirran suunta pisteessä $(x,y) = (3,1)$. Huom: Lämpövirran suunta on lämpötilan nopeimman alenemisen suunta. Tilanne on realistinen, koska $\Delta u = 0$ on kokeellisesti toteutettavissa pitämällä neliön reunat kaavan mukaisessa lämpötilassa.
b) Määritä lämpötilan muutosnopeus pisteessä $(3,1)$ molempien koordinaattiakseleiden ja lisäksi vektorin $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ suuntaan. (Vastauksen oikea yksikkö olisi esim. °C/m).

```
> with(plots):
> densityplot(400-25*x*y,x=0..4,y=0..4,colorscheme=["Red","Blue"],
  style=patchnogrid)
```



TEHTÄVÄ K2 Yksittäisen osittaisderivaatan arvo kuten $f_x(x_0, y_0)$ riippuu (yleensä) koordinaatiston valinnasta. Osoita, että gradientti ∇f on koordinaatistosta riippumaton suure seuraavassa mielessä ($n = 2$): Olkoon A ortogonaalinen 2×2-matriisi, ts. $A^T A = I$ (eli kierto, jos lisäksi $\det A = +1$) ja

$$F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x}) = f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y).$$

Tällöin

$$A\nabla F(\mathbf{x}) = \nabla f(A\mathbf{x}).$$

Haaste

Tarkastellaan osittaisdifferentiaaliyhtälöä $yu_x - xu_y = 0$, kun $u = u(x, y)$. Olkoon

$$U(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

ratkaisun esitys napakoordinaateissa.
a) Laske U_r, U_φ ja ratkaise osittaisderivaatat u_x ja u_y niiden avulla lausuttuna.
b) Osoita alkuperäisen yhtälön avulla, että $U_\varphi = 0$ ja totea, että kaikki ratkaisut u ovat radiaalisia.

Vastauksia

TEHTÄVÄ J1
Ratkaisu: a) $\sqrt{2}$; b) $-\pi/\sqrt{5}$; c) $-60/7$; d) $155/\sqrt{6}$.
TEHTÄVÄ J2
Ratkaisu: a) $\begin{pmatrix} e^{-yz} & -xze^{-yz} & -xye^{-yz} \\ -y/x^2 & 1/x - z/y^2 & 1/y \\ z^2/(2\sqrt{x}) & 0 & 2\sqrt{x}z \end{pmatrix}$; b) $2xy^2 - 5y^3$.