KOTITEHTÄVÄT VIIKKO 3

Kotitehtävä 1. Millä arvoilla $a, b \in \mathbb{R}$ pätee, että yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} ax + by & = -1 \\ ay + bz & = a \\ az + bx & = a^2 \end{cases}$$

a) ei ole ratkaisua?
b) on täsmälleen yksi ratkaisu?
c) on äärettömän monta ratkaisua?

Kotitehtävä 1. ratkaisu. Aloitetaan muokkaamalla yhtälöryhmä matriisimuotoon.

(1)

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

Muodostetaan yhdistetty matriisi Gaussin eliminaatiota varten.

(2)

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & -1 \\ 0 & a & b & a \\ b & 0 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

Huomataan, että yhtälöryhmällä selvästi ei ole ratkaisua, jos a = b = 0, koska rivillä 1. päädytään tapaukseen 0+0=1, jos

$$a = 0 \text{ ja } b \neq 0$$

selvästi

$$x = 0, y = -\frac{1}{b}, z = 0$$

On käsitelty kaikki tapaukset, joissa a = 0, voidaan siis jakaa kaikki rivit a:lla eliminoinnin helpottamiseksi.

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} & 1 \\ \frac{b}{a} & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{b}{a} r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} & 1 \\ 0 & -\frac{b^2}{a^2} & 1 & a + \frac{b}{a^2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + \frac{b^2}{a^2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a} & 1 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{b^3}{a^3} & a + \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \end{pmatrix}$$

Nyt alariviltä nähdään että

$$(1 + \frac{b^3}{a^3})z = a + \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

eli selvästi yhtälöä muokkaamalla

$$z = \frac{a^4 + ab^2 + ab}{a^3 + b^3}$$

Yhtälöllä on siis selvästi yksikäsitteinen ratkaisu jos

$$a \neq -b$$

jos

$$a = -b$$

on yhtälöllä joko äärettömän monta ratkaisua tai 0 ratkaisua. Jotta yhtälöllä voisi olla ratkaisu, täytyy myös osoittajan olla 0, jolloin päädytään tilanteeseen

$$\frac{0}{0}$$

ts.

$$a^4 + ab^2 + ab = a^4 + a^3 - a^2 = 0$$

tästä ratkaisuksi saadaan

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \ (a \neq 0)$$

Sijoittamalla a:n ja b:n arvot yhtälöön havaitaan, että yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua. Havaitaan myös, kun a -= b ja a on erisuuri kuin yllämainittu kultainen leikkaus, yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Kotitehtävä 2. Kirjoita seuraava yhtälöryhmä matriisimuodossa, ja ratkaise se.

$$\begin{cases} x & = y + z - 2 \\ y & = x - w \\ z & = 2x + 2y + 2w \\ w & = x - 3 \end{cases}$$

Kotitehtävä 2. ratkaisut.

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu saadaan kertomalla yhtälö puolittain vasemmalta puolelta käänteismatriisilla. Tällöin yhtälö on muodossa

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

ja tunnetusti

$$A^{-1}A = I \text{ ja } Ix = x$$

(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

nyt selvästi

(3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 3 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Kotitehtävä 3. Kahden muuttujan x ja y neliöllinen polynomi on funktio

$$P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

jossa $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. *Kartioleikkaus* on pistejoukko tasossa, joka on esitettävissä muodossa

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : P(x,y) = 0\}$$

jollekin neliöllisesle polynomille P. (Siispä esimerkkiksi ellipsit kuten $ax^2+cy^2 = 1$, paraabelit kuten $y = ax^2 + f$, ja hyperbelit kuten $xy = 1$ ovat kaikki kartioleikkaukset)

Osoita, että minkä tahansa tasolla olevien viiden pisteen kautta voidaan muodostaa kartioleikkaus.

Kotitehtävä 3 ratkaisu. Vastaavasti kuin kaksi pistettä määrittävät suoran, 5 pistettä määrittävät kartioleikkauksen. Olkoon nyt 5 pistettä

$$(x_i, y_i)_{i=1,2,3,4,5}$$

Nyt viiden pisteen avulla voidaan määrittää mikä tahansa kartioleikkaus viiden tason pisteen avulla muodostamalla lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + dx_1 + ey_1 + f &= 0 \\ ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + dx_2 + ey_2 + f &= 0 \\ ax_3^2 + bx_3y_3 + cy_3^2 + dx_3 + ey_3 + f &= 0 \\ ax_4^2 + bx_4y_4 + cy_4^2 + dx_4 + ey_4 + f &= 0 \\ ax_5^2 + bx_5y_5 + cy_5^2 + dx_5 + ey_5 + f &= 0 \end{cases}$$

Saadaan kuuden tuntemattoman ja viiden yhtälön ryhmä, jolla varmasti nollasta poikkeavia ratkaisuja. Näin ollen 5 pistettä määrittävät kartioleikkauksen □

Kotitehtävä 4.

a) Etsi kaikki 2×2-matriisit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ jolle pätee $A^2 = I$.

b) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus jolle pätee $f(f(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ kaikille $v \in \mathbb{R}^2$. Laske a-osan vastauksesi avulla kaikki mahdolliset arvot $f(\mathbf{e}_1)$.

Kotitehtävä 4. ratkaisut.

a)

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eli

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ba+bd & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Josta saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a^2+bc & = 1 \\ c(a+d) & = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ cb+d^2 = 1 \end{cases}$$

Käsitellään eri tapaukset. Selvästi

$$a = \pm 1 \text{ ja } d = \pm 1$$

ovat ratkaisuja, kun c = 0. Jos lisäksi a = -d, niin b voi olla mikä tahansa arvo. Näin ollen saadaan ratkaisuksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tai } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ tai } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \text{ tai } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

jos vain a = -d ja c ei ole 0, niin

$$a^2 + bc = 1$$

joten

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ \frac{1-a^2}{c} & -a \end{pmatrix}, c \neq 0$$

b) Mainittu lineaarikuvaus vastaa a) kohdan matriisia jolle pätee

$$A^2 = I$$

näin ollen

$$f(\mathbf{e}_1)$$

on matriisin A ensimmäinen sarake.

Harjoitustehtävät viikko 3

Harjoitustehtävä 1. Laske tulot, tai vastaa "ei määritelty".

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ratkaisut 1.

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}^T$$

b)

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}^T$$

c) ei määritelty

d)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}^T$$

e)

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix}^T$$

Harjoitustehtävä 2. Onko vektori $\mathbf{v}$ esitettävissä vektorijoukon M lineaarikombinaationa?

a) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Ratkaisut 2.

a) $\mathbf{v} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) ei ole.

c) $\mathbf{v} = -10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) ei ole.

Harjoitustehtävä 3. Kirjoita yhtälöryhmät matriisimuotoon, ratkaise ne, ja kirjoita ratkaisut vektorimuodossa.

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{cases} 3x + 2y + z & = 1 \\ x - y + z & = 2 \\ 5x + 5y + z & = 3 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x - y - z + w & = 4 \\ x + y + z & = -1 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 0 \\ x - y & = -3 \\ 3x - y - 2z & = -6 \\ 2y - 2z & = 3 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 0 \\ x - y & = -3 \\ 3x - y - 2z & = 0 \end{cases}$$

Ratkaisut 3. Matriisimuotoa varten vertaa kohta a.

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

b) ei ratkaisua.
c) ei määritelty
d)

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}^T$$

e)

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}^T$$

f)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}^T$$

Harjoitustehtävä 4. Ratkaise yhtälöryhmät, ja vertaa a- ja b-osan vastaukset. Selitä.

a)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = 3 \end{cases}$$

Ratkaisut 4.

a)

$$\begin{pmatrix} -x_3 & \frac{x_3}{2} & x_3 & -\frac{x_3}{2} \end{pmatrix}^T$$

,jossa

$$x_3 \in \mathbb{R}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2x_4+1 & -\frac{2x_4+1}{2} & -\frac{4x_4+1}{2} & x_4 \end{pmatrix}^T$$

,jossa

$$x_4 \in \mathbb{R}$$

(1) Kun yhtälöryhmä esitetään matriisimuodossa, on nähtävissä "pivot column"eli yksi matriisin vektoreista on lineaarisesti riippuva muista vekroreista.

Harjoitustehtävä 5. Olkoot a, b, c, d reaaliluvut. Osoita, että vektorit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippuvat jos ja vain jos vektorit $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ovat lineaarisesti riippuvat

Ratkaisut 5.

(1) Muodostetaan vektoreista matriisit ja tutkitaan niiden ominaisuuksia
(2)

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(3) Koska matriisin 2 vektorit ovat lineaarisesti riippuvat, on sen determinantti 0 ts.

$$ad - bc = 0$$

(4) lasketaan matriisin 1 determinantti

$$ad - cb = 0$$

(5) Jos matriisi 2 olisi lineaarisesti riippumaton, ei sen, eikä myöskään matriisin 1 determinantti olisi 0. Olettama siis pätee □

Harjoitustehtävä 6. Laske seuraavien matriisien käänteismatriisit (jos ne ovat käännettäviä).

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

f)
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

g)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisut 6.

a)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b)
$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

c) ei kääntyvä

d)
$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

e)
$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{17}{28} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{14} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & 0 \end{pmatrix}.$$

f) ei kääntyvä

g)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{8}{3} & 2 & \frac{4}{3} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$