LASKUHARJOITUS VIIKKO 5, MATRIISILASKENTA

Perehdyttävä tehtävä viikko 5

Oletuksena on, että opiskelet perehdyttävät tehtävät ENNEN viikon ensimmäistä luentoa. Perehdyttävien tehtävien ratkaisuja käsitellään osittain luennoilla. On erittäin suositeltavaa, että pohditte perehdyttäviä tehtäviä ryhmissä. Näin opitte myös uusia ajatustapoja matematiikkaan liittyen.

Tehtävä 1. Tässä harjoituksessa opetut tekniikat näyttävät, miten käy vektorille $v \in V$, kun se käy läpi saman lineaarikuvauksen $f : V \to V$ useita kertoja. Esimerkkiksi tutkitaan varsin yksinkertainen leijonista ja jäniksista koostuvista ekosysteemi, ja tahdomme nähdä kuinka tämä kehittyy. Olkoon ℓ leijonien lukumäärä ja j jäniksien lukumäärä annettuna vuonna. Tutkitaan siis vektorit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \ell \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ja miten se kehittyy ajassa.

a) Lämmittelyharjoituksena, tutkitaan malli jossa eläimet eivät vuorovaikuta keskenään (ehkä ne ovat kenties eri häkissä jossain eläintarhassa). Tässä mallissa jänikset nelinkertaistuu vuodessa, kun taas kymmenesosa leijonista kuolee joka vuosi. Kaavoina, jos annettuna vuonna populaatiot kuvaa vektori $\begin{pmatrix} \ell \\ j \end{pmatrix}$, niin seuraavan vuoden populaatiot ovat $\begin{pmatrix} 0.9\ell \\ 4j \end{pmatrix}$ Etsi matriisiyhtiö, joka kuvaa eri eläinten lukumäärä
   - vuoden päästä.
   - Sadan vuoden päästä.

b) Nyt tutkitaan luonnollisempi (villieläinten) malli, jossa leijonien lukumäärä vuoden kuluttua on $0.9\ell + 0.1j$, ja jäniksien lukumäärä vuoden kuluttua on $4j - 3\ell$. Etsi matriisiyhtiö, joka kuvaa eri eläinten lukumäärä
   - vuoden päästä.
   - Sadan vuoden päästä.

c) Jos alkuperäinen populaatio koostuu vaikka 1000:sta leijonasta ja 2000 jäniksestä, edellisen kohdan matriisiyhtälö ei välttämättä auttanut eläinten tarkan määrän laskemisessa 100 vuoden päästä (ilman laskukoneita). Jos kuitenkin oletamme että satumme tietämään että alkutilassa eläimiä oli tarkalleen yhtä monta (esim. 1000), pystymmekö nyt löytämään kaavan eläinten tarkalle lukumäärälle
   - vuoden päästä?
   - Sadan vuoden päästä?

Edellinen kohta (c) oli helppo (!?) sillä lähtöjakauma $\begin{pmatrix} \ell_0 \\ j_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ sattui olemaan prosessin *ominaisvektori*, *ominaisarvolla* $\lambda = 1$. Tämä tarkoittaa että jos jakauma jonain vuonna oli $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$, niin seuraavan vuoden jakauma oli $\lambda\mathbf{v}$. Mikä tahansa vektori jossa leijonien ja jänisten lukumäärät ovat samat on systeemin ominaisvektori ominaisarvolla 1, mutta systeemillä on myös muita, vaikeammin löydettäviä ominaispareja.

d) Oleta että lähtötilanteessa leijonia on 100 ja jäniksiä 3000. Kuinka monta eläintä nyt on
   - vuoden päästä?
   - Sadan vuoden päästä?

e) Eläinten lukumäärä sadan vuoden päästä on *lineaari*-funktio F eläinten lukumäärästä lähtötilanteessa. (Vakuuta itsesi tästä.) Tiedämme myös kaavan vekoreille $F\begin{pmatrix}1000\\1000\end{pmatrix}$ sekä $F\begin{pmatrix}100\\3000\end{pmatrix}$. Kirjoita vektori $\begin{pmatrix}1000\\2000\end{pmatrix}$ lineaarikombinaationa
$$\begin{pmatrix}1000\\2000\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1000\\1000\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}100\\3000\end{pmatrix},$$
ja käytä tätä apuna laskeaksesi vektorin $F\begin{pmatrix}1000\\2000\end{pmatrix}$, eli eläinten lukumäärät sadan vuoden päästä, jos lähtöpopulaatio oli 1000 leijonaa ja 2000 jänistä.

Tässä ongelmassa, ominaisvektorit $\begin{pmatrix}1000\\1000\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}100\\3000\end{pmatrix}$ oli annettu (kiitos opettajan kiltteyden). Jos näitä ei olisi annettu, ei olisi lainkaan päivänselvää, että matriisilla $A = \begin{pmatrix}0.9 & 0.1\\-3 & 4\end{pmatrix}$ ((joka kuvaa eläinpopulaatioiden muutosta ajassa, yhden vuoden harppauksin), on kyseiset ominaisvektorit, ominaisarvoin $\lambda = 1$ ja $\lambda = 3.9$. Itse asiassa, sellaiset ominaisvektorit ovat olemassa, sillä matriisiyhtälöllä $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on epätriviaalit ratkaisut, kun $\lambda = 1$ ja $\lambda = 3.9$. Toisin sanoen matriisi $A - \lambda I$ on *degeneroitunut*.

f) Minkä yhtälön on luvun λ toteutettava, jotta matriisi $A - \lambda I$ olisi degeneroitunut? (Vinkki: determinantti. Tästä opimme lisää tiistain luennolla 7.2.) Tiistain luennon jälkeen, vakuuta itsesi siitä, että matriisilla A ei ole muita ominaisarvoja kuin 1 ja 3.9.

Kotitehtävät viikko 5

Kotitehtävä 1. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

determinantti $|A|$.

Kotitehtävä 2. Osoita että, jos a, b, c ovat kolme *eri* reaalilukua, niin vektorit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$

ovat lineaarisesti riippumatomat. (Vihje: laske determinantti.)

Kotitehtävä 3. Etsi sellainen kolmas sarake, että matriisi

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & \cdot \end{pmatrix}$$

on ortonormaali. Tarkista, että rivitkin ovat ortonormaalit.

Kotitehtävä 4. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

kaikki ominaisarvot ja ominaisvektorit. Vihje: Aseta $\mu := (\lambda - 1)^2$.

Harjoitustehtävät viikko 5

Harjoitustehtävä 1. Olkoon T (3×3)-matriisi jolle pätee

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x + 2y \\ x + y + 3z \end{pmatrix}.$$

Laske matriisin T kaikki ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Harjoitustehtävä 2. Laske seuraavat determinantit:

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

d)

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

e)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

f)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Harjoitustehtävä 3. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

kaikki ominaisarvot ja ominaisvektorit. Vihje: Yksi karakteristisen polynomin juuri on suhteellisen helposti löydettävissä ihan tuijottamalla polynomia.

Harjoitustehtävä 4. Olkoon $P_n \leq n$-asteisten polynomien avaruus, luonnollisine kantoineen $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Laske seuraavien lineaarikuvauksien matriisit:

a) Derivointi:

$$D : P_3 \to P_2 \qquad Df(x) = f'(x)$$

b) Kertolasku polynomin $x + 1$ kanssa:

$$M : P_2 \to P_3 \qquad Mf(x) = (x+1)f(x).$$

c) Arvon laskeminen pisteissa $\{-1, 0, 1\}$:

$$E : P_2 \to \mathbb{R}^3 \qquad Ef = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Harjoitustehtävä 5. Laske determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

mielivaltaisille $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$. Vihje: Käytä kaava $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ sekä sarakeoperaatioita. Vertaa vastauksesi kotitehtäviin 2, ja päätele että sarakkeet ovat riippumatomia. Pystytkö arvaamaan[1] yleistämisen joillekin $n \times n$-matriisille? Tällaiset matriisit kutsutaan *Vandermonde-matriisiksi.*

[1] Tai pystytkö jopa todistamaan tämän? Tämä on aika vaativa tehtävä.