TEHTÄVÄ K1 Osoita, että funktiolla $f(x, y) = (x^2 - y)(2x^2 - y)$ ei ole ääriarvoa origossa, vaikka sen rajoittumalla jokaiselle origon kautta kulkevalle suoralle on suhteellinen minimi.

Ratkaisu: $f(x, kx) = 2x^4 - 3kx^3 + k^2x^2$, $f(0, y) = y^2$; funktio saa paraabelien $y = x^2$, $y = 2x^2$ valissä negatiivisia arvoja, muualla paraabelin ulkopuolella positiivisia.

RATKAISU Funktion gradientilla

$$\nabla f(x, y) = (8x^3 - 6xy)\,\mathbf{i} + (2y - 3x^2)\mathbf{j}$$

on nollakohta origossa, joten kyseessä on funktion kriittinen piste. Tehtävänä on näin ollen osoittaa, että kyseessä on nimenomaan funktion satulapiste.

(i) Tarkastellaan aluksi funktion rajoittumia suorille $y = kx$, jolloin $(x, kx) \to (0, 0)$, kun $x \to 0$. Tällöin

$$h(x) = f(x, kx) = 2x^4 - 3kx^3 + k^2x^2.$$

Havaitaan, että $x = 0$ on myös rajoittuman derivaatan

$$h'(x) = 8x^3 - 9kx^2 + 2k^2x$$

nollakohta.[3] Lisäksi soveltamalla toisen kertaluvun derivaatan testiä nähdään, että

$$h''(x) = 24x^2 - 18kx + 4k^2 \Rightarrow h''(0) = 4k^2 > 0, \text{ kaikilla } k \neq 0,$$

mikä impikoi, että jokaisella tällaisella funktion rajoittumalla on origossa suhteellinen minimi. Toisaalta tämä myös tarkoittaa, ettei origo voi olla funktion lokaali maksimikohta.

Lisäksi kahdessa erikoistapauksessa, x-akselilla ($k = 0$) rajoittuma on muotoa

$$f(x, 0) = 4x^2$$

ja y-akselilla

$$f(0, y) = y^2,$$

rajoittumat ovat origokeskisiä ylöspäin aukeavia paraabeleja. Origo on siten myös näiden rajoittumien suhteellinen minimikohta.

[3]Tämän täytyy toki päteä yleisestikin, sillä jos parametrisoidulla käyrällä $\mathbf{r}(t)$ pisteessä $t = t_0$ pätee $\nabla f(\mathbf{r}(t_0)) = \mathbf{0}$, niin ketjusäännön nojalla $\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}'(t) \cdot \nabla f(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t_0)) = 0$.

(ii) Tarkastellaan sitten funktion käyttäytymistä paraabeleilla $y = kx^2$, jolloin luonnollisesti $(x, kx^2) \to (0,0)$, kun $x \to 0$. Tällöin

$$f(x, kx^2) = (x^2 - kx^2)(2x^2 - kx^2) = x^4(1-k)(2-k).$$

Koska $x^4 > 0$ kaikilla $x \neq 0$ riippuu funktion merkki tällöin ainoastaan kertoimista $1-k$ ja $2-k$. Havaitaan, että valitsemalla $k \in (1,2)$ seuraa

$$f(x, kx^2) = x^4 \underbrace{(1-k)}_{<0} \underbrace{(2-k)}_{>0} < 0, \quad \text{kaikilla } x \neq 0.$$

Siten funktio saa myös negatiivisia arvoja jokaisessa origon ympäristössä ja koska $f(0,0) = 0$ ei kyseessä voi olla myöskään funktion lokaali minimi.

Yhdistämällä kohdissa **(i)** ja **(ii)** saadut tulokset voidaan todeta, ettei funktion kriittinen piste origossa voi olla funktion lokaali ääriarvokohta. Näin ollen sen on oltava funktion satulapiste.

TEHTÄVÄ K2 Määritä funktion

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

suurin ja pienin arvo joukossa

a) $\{\,(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 \le 1\,\}$, b) $\{\,(x,y) \mid x^2+y^2 \ge 1\,\}$, c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

mikäli nämä ovat olemassa.

Ratkaisu: a) Ei ole; b) 1, -1; c) ei ole.

RATKAISU

a) Tarkastellaan funktion käyttymistä suoralla $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$, joka kuuluu tutkittavaan joukkoon, kun $t \in [-1,1] \setminus \{0\}$. Lisäksi $\mathbf{r}(t) \to \mathbf{0}$, kun $t \to 0$ ja funktion rajoittumalle $f(\mathbf{r}(t)) = 1/t$ pätee

$$\lim_{t\to 0^+} f(\mathbf{r}(t)) = \infty \quad \text{ja toisaalta} \quad \lim_{t\to 0^-} f(\mathbf{r}(t)) = -\infty.$$

Siten funktio ei ole edes rajoitettu[4] kyseisessä joukossa, joten ääriarvoja ei tällöin ole.

b) Kun $x^2+y^2 \ge 1$ ja $x \ne 0$, niin

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x|}{\sqrt{x^2}} = 1$$

ja toisaalta, kun $x = 0$, niin $f(0,y) = 0$ kaikilla $y^2 \ge 1$. Näin ollen on kyseisessä joukossa funktio on rajoitettu ja $|f(x,y)| \le 1$.

Kokeilemalla[5] voidaan havaita, että joukon reunan $x^2+y^2 = 1$ pisteissä[6] $(x,y) = (1,0)$ ja $(x,y) = (0,1)$ saadaan $f(1,0) = 1$ ja $f(-1,0) = -1$. Toisaalta edellä osoitettiin, että $|f(x,y)| \le 1$, joten maksimin tässä joukossa täytyy olla 1 ja minimin -1.

c) Koska funktio ei ollut rajoitettu a-kohdassa ja selvästi kyseinen joukko on joukon $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ osajoukko, ei funktio voi olla rajoitettu myöskään tässä tapauksessa.

[4]Funktio f on rajoitettu joukossa Ω, jos on olemassa $M \ge 0$ siten, että $|f(\mathbf{x})| \le M$ kaikilla $\mathbf{x} \in \Omega$.

[5]Tai tutkimalla funktion käyttäymistä yksikköympyrän kehällä esimerkiksi napakoordinaateissa.

[6]Koska funktion gradientilla

$$\nabla f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}\mathbf{i} - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}$$

ei ole nollakohtia, täytyy ääriarvojen, jos niitä on, esiintyä reunalla $x^2+y^2 = 1$.