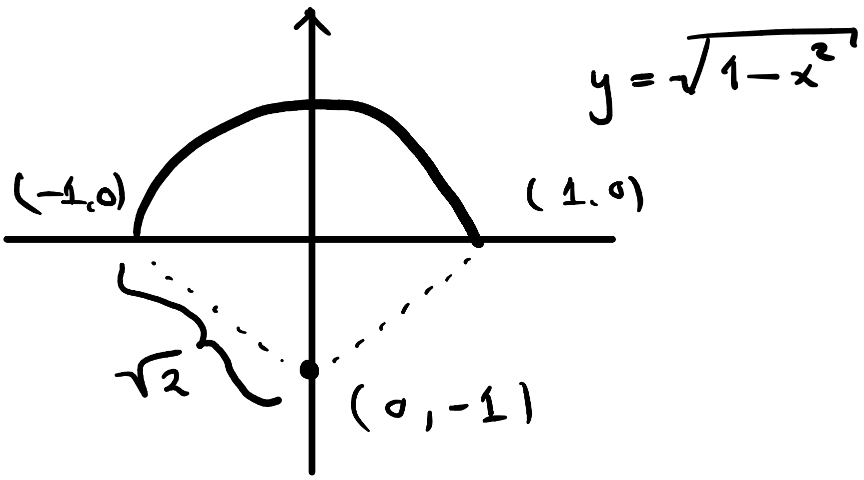
Viikko 5 LV

M1



Jotta Lagrangen kertoimet auttaisivat tässä, pitäisi etäisyyden neliön $f(x,y) = (x^2 + (y+1)^2)$ tasa-arvokäyrän $f(x,y) = 2$ olla päätepisteissä puoliympyrän tangentin suuntainen.

Otaniemeksi: f ei tangeeraa

M2 Piste (x_0, y_0) ; Suora $Ax + By + C = 0$

Sidottu ääriarvotehtävä:

Määritä funktion $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ pienin arvo joukossa $\{(x,y) \mid Ax + By + C = 0\}$.

$$L(x,y,\lambda) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \underbrace{2\lambda}_{\text{valinta}}(Ax+By+C)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = x - x_0 + \lambda A = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = y - y_0 + \lambda B = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Ax + By + C = 0$$

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial L}{\partial x} + B\dfrac{\partial L}{\partial y} = A(x - x_0 + \lambda A) + B(y - y_0 + \lambda B) = 0 \\ C = -Ax - By \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$$

Nyt: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \lambda^2(A^2 + B^2)$

$\Rightarrow$ minimietäisyys: $|\lambda|\sqrt{A^2+B^2} = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

TEHTÄVÄ J1 Etsi origon lyhin etäisyys hyperbelistä $x^2+8xy+7y^2=45$ käyttäen Lagrangen kertoimia.
Ratkaisu: $\sqrt{5}$.

RATKAISU Euklisidisessa tasossa pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+y^2}$. Toisaalta neliöjuuri on kasvava funktio, joten voimme minimioida funktiota $f(x)=x^2+y^2$. Annettu sidosehto voidaan kirjoittaa $g(x)=x^2+8xy+7y^2-45$. Tällöin Lagrangen funktioksi saadaan

$$\begin{aligned} L(x,y,\lambda) &= f(x,y)+\lambda g(x,y) \\ &= x^2+y^2+\lambda(x^2+8xy+7y^2-45) \\ &= (1+\lambda)x^2+(1+7\lambda)y^2+8\lambda xy-45\lambda. \end{aligned}$$

Lagrangen funktion kriittiset pisteet saadaan nyt yhtälöryhmästä

$$L(x,y,\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=2(1+\lambda)x+8\lambda y & =0 \\ L_y(x,y,\lambda)=2(1+7\lambda)y+8\lambda x & =0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+8xy+7y^2-45 & =0. \end{cases}$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} & 2(1+\lambda)x+8\lambda y=0 && 2(1+7\lambda)y+8\lambda x=0 \\ & \Rightarrow x=-\frac{4\lambda y}{1+\lambda} && \Rightarrow x=-\frac{(1+7\lambda)y}{4\lambda}, \end{aligned}$$

joten

$$
\begin{aligned}
&-\frac{4\lambda y}{1+\lambda} = \frac{(1+7\lambda)y}{4\lambda} \\
&\Rightarrow y\left(\frac{1+7\lambda}{4\lambda} - \frac{4\lambda}{1+\lambda}\right) = 0 \\
&\Rightarrow y = 0 \text{ tai } \frac{1+7\lambda}{4\lambda} - \frac{4\lambda}{1+\lambda} = 0.
\end{aligned}
$$

Tutkitaan tapauksittain:

(i) Jos $y = 0$, niin tällöin myös $x = 0$ ja viimeisestä epäyhtälöstä seuraisi $-45 = 0$. Siten $y \neq 0$.

(ii) Ratkaistaan

$$
\begin{aligned}
1 + 7\lambda 4\lambda - \frac{4\lambda}{1+\lambda} &= 0 \\
\Rightarrow \ -9\lambda^2 + 8\lambda + 1 &= 0 \\
\Rightarrow \lambda = 1 \text{ tai } \lambda &= -\frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

Jos $\lambda = 1$, niin

$$x = -\frac{4\lambda y}{1+\lambda} = -\frac{4y}{2} = -2y$$

ja sijoittamalla viimeiseen yhtälöön saadaan

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 45 = -5y^2 - 45 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = -9 \ \Rightarrow \ \text{ ei reaalisia nollakohtia.}$$

Jos taas $\lambda = -1/9$, niin

$$x = -\frac{4\lambda y}{1+\lambda} = -\frac{4/9y}{1-1/9} = \frac{y}{2}$$

ja tällöin viimeisestä yhtälöstä seuraa

$$x^2 + 8xy + 7y^2 - 45 = \frac{45}{5}y^2 - 45 = 0$$

$$\Rightarrow y = \pm 2 \ \Rightarrow \ x = \pm 1.$$

Löydettiin siis pisteen $(1,2)$ ja $-1,-2)$. Niiden etäisyys origosta on $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$.

Koska Lagrangen funktiolla ei voida löytää ääriarvoja pisteissä, joissa $\nabla g(x,y) = 0$, täytyy ne tarkastella vielä erikseen.

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 2x + 8y = 0 \\ g_y(x,y) = 14y + 8x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ (x,y) = (0,0).$$

Piste $(0,0)$ ei kuitenkaan toteuta sidosehtoa $g(x,y) = 0$, joten origon lyhin etäisyys hyperbelistä on $\sqrt{5}$.

TEHTÄVÄ J2 Määritä origon suurin ja pienin etäisyys käyrästä

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1.$$

Ratkaisu: $(a > 0, b > 0)$ $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$, $\min\{a, b\}$.

RATKAISU Minimioitavaksi funktioksi voidaan tässäkin valita $f(x, y) = x^2 + y^2$ ja sidosehdoksi

$$g(x, y) = \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} - 1 = 0.$$

Nyt Lagrangen funktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} - 1 \right)$$

kriittiset pisteet ratkeavat yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = x \left(2 + 4\lambda \dfrac{x^2}{a^4} \right) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = y \left(2 + 4\lambda \dfrac{y^2}{b^4} \right) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = \dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^4}{b^4} - 1 = 0. \end{cases}$$

Tutkitaan taas tapauksittain:

(i) Jos $x = 0$, niin viimeisestä yhtälöstä seuraa $y = \pm b$. Tällöin etäisyys on $\sqrt{0^2 + b^2} = b$. Toisaalta, jos $y = 0$, niin viimeisestä yhtälöstä seuraa $x = \pm a$, jolloin etäisyydeksi saadaan $\sqrt{0^2 + a^2} = a$.

(ii) Jos taas $x, y \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} & 2 + 4\lambda \frac{x^2}{a^4} = 0 \\ \Rightarrow \quad & x^2 = -\frac{a^4}{2\lambda} \quad (\Rightarrow \lambda < 0). \end{aligned}$$

Vastaavasti toisesta yhtälöstä saadaan

$$y^2 = -\frac{b^4}{2\lambda}.$$

Sijoittamalla viimeiseen yhtälöön seuraa tällöin

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} - 1 = \frac{1}{a^4}\left(\frac{a^8}{4\lambda^2}\right) + \frac{1}{b^4}\left(\frac{b^8}{4\lambda^2}\right) = 1 \\
\Rightarrow \quad & \frac{a^4 + b^4}{4\lambda^2} = 1 \\
\Rightarrow \quad & \lambda = -\frac{\sqrt{a^4 + b^4}}{2} \\
\Rightarrow \quad & x^2 = \frac{a^4}{\sqrt{a^4 + b^4}} \quad \textbf{ja} \quad y^2 = \frac{b^4}{\sqrt{a^4 + b^4}}.
\end{aligned}$$

Tällöin origon etäisyys käyrästä on

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt[4]{a^4 + b^4} \quad (> a, b).$$

Lisäksi gradientin ∇g ainoa nollakohta on origo, joka ei kuulu käyrälle. Näin ollen kohdissa **(i)** ja **(ii)** saaduista tuloksista seuraa, että etäisyyden minimin oltava joko a tai b riippuen siitä, kumpi on pienempi. Siten minimi on $\min\{a, b\}$.