ELEC-C1110 Automaatio- ja systeemitekniikan perusteet

Laskuharjoitus 2: Numeerinen integrointi, mallin kalibrointi ja sovitus

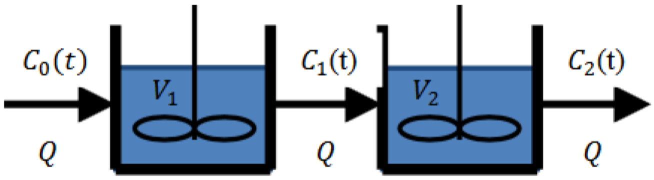
Ideaalisekoitussäiliöt: Systeemi koostuu kahdesta sarjaan kytketystä ideaalisekoitussäiliöstä (vakiotilavuudet V1 ja V2). $C_0(t), C_1(t)$ ja $C_2(t)$ ovat pitoisuuksia ja Q on vakiovirtaus.
$C_0(t) = \frac{1}{m^3}, C_1(0) = \frac{0.5}{m^3}, C_2(0) = \frac{0.8}{m^3}, \dot{C}_1(0) = \frac{0}{m^3 s}$ ja $\dot{C}_2(0) = \frac{0}{m^3 s}$

Materiaalitaseet ovat:

$$\frac{d}{dt}\left(V_1 C_1(t)\right) = QC_0(t) - QC_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(V_2 C_2(t)\right) = QC_1(t) - QC_2(t)$$

$$Q = \frac{1m^3}{s}, V_1 = 0.5m^3, V_2 = 0.2m^3$$



Tehtävä 1: Eulerin menetelmä differentiaaliyhtälön numeeriseen integrointiin esiteltiin luennoilla. Alla on esitelty keskipistemenetelmä. Sovella keskipistemenetelmää vesitankin yhden aika-askeleen simulointiin alkaen ajanhetkeltä $t = 0s$. Aika-askeleen pituus on $\Delta t = 0.1s$. Kirjoita numeroarvot auki. Keskipistemenetelmä toimii seuraavasti:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$
$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$
$$x_{n+1} = x_n + \Delta t\, f\left(\mathrm{t_n} + \frac{\Delta \mathrm{t}}{2}, \mathrm{x_n} + \Delta \mathrm{t}\frac{f(t_n, x_n)}{2}\right)$$

Tehtävä 2: Johda luennolla esitetty kaava lineaarisen systeemin parametrien laskemiseen lähtemällä liikkeelle pienimmän neliösummavirheen minimoinnista. Merkitse kaikki välivaiheet.

Lineaarinen systeemi on $f(x,\theta) = \sum_i \theta_i \phi_i(x)$

N syötteelle $(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N))$ mitataan
N näytettä $(y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N))$

Neliösummavirhe on $\sum_n \left((\sum_i \phi_i\big(x(t_n)\big)\theta_i) - y(t_n) \right)^2$

Tehtävä 3: Johda derivaatat kantafunktiomallin σ_i parametreille suhteessa hukkafunktioon, joka mittaa neliösummavirhettä. Merkitse kaikki välivaiheet.

Kantafunktiomalli on $f(x, \theta) = \sum_i \theta_i e^{-\sigma_i (x-\mu_i)^T (x-\mu_i)}$

Mitataan N näytettä $D = (y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N))$
N syötteelle $(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N))$

Neliösummavirhe on $L(\sigma) = \sum_n \left((f(x(t_n), \theta) - y(t_n)\right)^2 = \sum_n ((f(x_n, \theta) - y_n)^2$

Johda $\delta L(\sigma)/\delta \sigma_i$ kaikille σ_i

Palautettava tehtävä 2: Johda yhden neuroverkon noodin funktion painoparametreille $w_{i,j,k}$ osittaisderivaatat suhteessa neliösummavirheeseen. Merkitse kaikki välivaiheet.

Neuroverkon noodin funktio on muotoa:

$y_{i,j} = f\left(x_{i-1}, \theta_{i,j}\right) = \psi\left(\sum_k w_{i,j,k}\, x_{i-1,k} + b_{i,j}\right)$, missä

$\theta_{i,j} = (w_{i,j,1}, \dots, w_{i,j,K}, b_{i,j})$, missä K on neuroverkon kerroksen leveys noodeina

Oletetaan tanh epälineaarisuus

$$y_{i,j} = tanh\left(\sum_k w_{i,j,k}\, x_{i-1,k} + b_{i,j}\right)$$

Mitataan N näytettä $D = (y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N\,))$
N syötteelle $(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N\,))$

Neliösummavirhe on $L(\sigma) = \sum_n \left((\mathrm{f}(\mathrm{x}(\mathrm{t_n}), \theta) - y(t_n)\right)^2 = \sum_n ((\mathrm{f}(\mathrm{x_n}, \theta) - y_n)^2$

Johda $\delta L(\sigma)/\delta w_{i,j,k}$

Palauta tehtävä PDF muodossa MyCourses:iin tämän tehtäväviikon palautuslaatikkoon viimeistään Su 12.2.2022 klo. 23:59.