

$$K1 \quad f(x, y, z) = xy^2z^3$$

$$\text{Pallo } x^2 + y^2 + z^2 \leq 2.$$

Koska $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3 = 0$ vain jos joko $y=0$ tai $z=0$,
ei yksikään kriittinen piste anna arvoa $\neq 0$.

Maksimi ja minimi löytyvät siis pallon pinnalta.
(Huomaa merkkien vaihtelu reunalla.)

$$\text{Lagrange: } L(x, y, z, \lambda) = xy^2z^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$$

$$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y^2z^3 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2xy^2z^3 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 3xy^2z^2 + 2\lambda z = 0 \end{aligned} \right\} \text{kaikissa } 2\lambda \quad \otimes$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$$

$$\otimes \Rightarrow \frac{y^2z^3}{x} = 2xz^3 = 3xy^2z$$

$$\text{eli } y^2 = 2x^2, \quad z^2 = \frac{3}{2}y^2 = 3x^2$$

$$\text{joten } x^2 + 2x^2 + 3x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$y^2 = \frac{2}{3}, \quad z^2 = 1$$

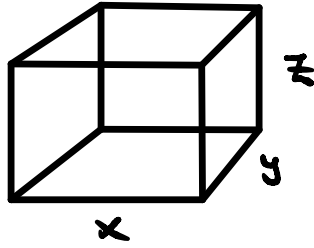
Sis, jokaisessa oktantissa on yksi kriittinen piste.

$$\begin{aligned} \text{Maksimi: } f(x, y, z) &= f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Minimi: } f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Maksimi ja minimi esiintyvät molemmat neljässä eri pisteessä.

K2 Leatikka



$$V = xyz$$

Luokitellaan osat :

$$\text{pohjan ala} : xy$$

$$\text{etulevyn ala} : xz$$

$$\text{takalevyn ala} : xz$$

$$\text{sivulevyn ala} : yz$$

$$\text{Kustannus} : C = 5k(xz + xy) + k(2yz + xz)$$

Lagrange :

$$L(x, y, z, \lambda) = k(5xy + 6xz + 2yz) + \lambda(xyz - V)$$

Kriittiset pisteet :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 5ky + 6kz + \lambda yz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 5kx + 2kz + \lambda xz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 6kx + 2ky + \lambda xy = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xyz - V = 0$$

Kolmeita ensimmäistä saadaan $-\lambda xyz$:

$$5kxy + 6kxz = 5kxy + 2kyz = 6kxz + 2kyz$$

\Rightarrow

$$5xy = 6xz = 2yz$$

\Rightarrow

$$y = 3x, \quad z = \frac{5}{2}x$$

$$\text{Sij. } V = xyz = \frac{15}{2}x^3$$

$$\text{Leveys } x = \left(\frac{2V}{15} \right)^{1/3}$$

$$\text{Syvyys } y = 3 \left(\frac{2V}{15} \right)^{1/3}$$

$$\text{Korkuus } z = \frac{5}{2} \left(\frac{2V}{15} \right)^{1/3}$$