Perehdyttävä tehtävä viikko 4

Oletuksena on, että opiskelet perehdyttävät tehtävät ENNEN viikon ensimmäistä luentoa. Perehdyttävien tehtävien ratkaisuja käsitellään osittain luennoilla. On erittäin suositeltavaa, että pohditte perehdyttäviä tehtäviä ryhmissä. Näin opitte myös uusia ajatustapoja matematiikkaan liittyen.

Tehtävä 1. Toisen lukuviikon luennoilla opimme, miten löydetään pisteen projektio (eli lähin piste) tasoon, kolme-ulotteisessa avaruudessa. Tänä viikkona yleistetään tämä idea, ja löydetään vektorin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *ortogonaaliprojektio* mielivaltaiseen ala-avaruuteen $V \subseteq \mathbb{R}^n$, mielivaltaiselle n.

a) Vakuuta itsesi geometrisesti siitä, että jos $\mathbf{v} \in V$ on sellainen että $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$ on mahdollisimman pieni, niin $(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \perp \mathbf{w}$ kaikille vektoreille $\mathbf{w} \in V$.[1]

b) Pohditaan ensin tapaus, jossa projisoidaan yksi-ulotteiseen ala-avaruuten, eli suoraan. Olkoon

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ ja } V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Tällöin vektorin $\mathbf{x}$ projektio suoraan V on $\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jollekin $t \in \mathbb{R}$. Mille t pätee, että $(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$?

c) Seuraavaksi projisoidaan kaksi-ulotteiseen avaruuteen $W \subseteq \mathbb{R}^4$. Olkoon edelleen $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^4$, ja olkoon

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Jos $\mathbf{v}$ on vektorin $\mathbf{x}$ projektiolle W:hen (piirrä kuva!), niin sen täytyy toteuttaa

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{v} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Pystytäänkö tämä ehto kirjoittamaan matriisiyhtälönä?

d) Siispä toisaalta $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$ jollekin $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ja toisaalta,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{v} - \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

[1] Vihje: Jos olisi olemassa vektori $\mathbf{w} \in V$ jolle $(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} > 0$, korvaa v vektorilla $\mathbf{v} + \epsilon \mathbf{w}$, jossa ϵ on erittäin pieni positiivinen luku, ja katso mitä tapahtuu. Yksinkertaisuuden vuoksi, pohdi tapausta $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ensin.

(Vakuuta itsesi, että tämä seuraa (c)-osasta.) Kirjoita tämä ehto yhtälönä, joka sisältää matriisit ja vektorit $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (muttei $\mathbf{v}$).

e) Laske matriisitulon

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi. Käyttäen tämä, löydä (d)-osan muuttuja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Mikä on sitten $\mathbf{v}$?

f) Yleistä tapaukseen, jossa projisoidaan avaruuteen

$$V = \{A\mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

mielivaltaiselle $(n \times m)$-matriisille A (jossa $m < n$).

Kotitehtävät viikko 4

Kotitehtävä 1. Laske lyhyin etäisyys pisteestä $(2,1,2,1,2)$ joukkoon[2]

$$\Pi = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \end{array} \right\}.$$

KT 1 Ratkaisu. Joukon määritelmästä $x_1 = 1 - x_2 - x_3$ ja $x_3 = 1 - x_4 - x_5$. Asettamalla $x_2 = r, x_4 = s, x_5 = t$ saadaan

$$\mathbf{x} = (-r + s + t,\ r,\ 1 - s - t,\ s,\ t)^T$$

eli

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ r, s, t \in \mathbb{R}$$

Joukko voidaan siis kirjoittaa muodossa

$$\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A\mathbf{y}, A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Tehdään joukolle ja pisteelle $\mathbf{u} = (2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2)^T$ translaatio eli siirretään origoa:

$$\Pi' = \Pi - (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)^T = \left\{ A\mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)^T = (2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2)^T$$

Etäisyys säilyy samana eli voidaan laskea pisteen $\mathbf{u}'$ etäisyys joukosta Π'. Olkoon $\mathbf{v} = A\mathbf{y} \in \Pi'$ se piste jolla $||\mathbf{v} - \mathbf{u}'||$ on pienin. Kohtisuoruusehto:

$$A^T(\mathbf{v} - \mathbf{u}') = 0$$
$$A^T A\mathbf{y} = A^T\mathbf{u}'$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[2] Huomaathan, ettei Π ole vektoriavaruus, sillä tämä ei sisällä origoa. Pystytkö silti käyttää lineaarigeometrian / matriisilaskennan ideoita?

Yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\mathbf{y} = (0,\ 0,\ 1)^T$$

$$\mathbf{v} = A\mathbf{y} = (1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1)^T$$

eli kysytty etäisyys on

$$||\mathbf{u}' - \mathbf{v}|| = ||(1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1)^T|| = 2\sqrt{2}$$

.

Kotitehtävä 2. Olkoon L_1 suora kolme-ulotteisessa avaruudessa, joka sisältää piste $(1,1,1)$ ja on vastakohtainen sekä vektorin $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ että vektorin $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ vastaan. Olkoon L_2 suora

$$\{(x,y,z) : cx = y = 2z\}.$$

a) Mille arvolle $c \in \mathbb{R}$, leikkavat suorat L_1 ja L_2 toisiinsa?
b) Tälle arvolle c, laske molempien suorien sisältävän tason yhtälö.

KT 2 Ratkaisu.

a) Olkoon $n = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ suoran L_1 suuntavektori. Tällöin n on kohtisuorassa vektoreita $(1,\ 1,\ 0)^T$ ja $(1,\ -1,\ 0)^T$ vastaan:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = 0 \\ n_1 - n_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2 = 0,\ n_3 \in \mathbb{R}$$

Valitaan $n_3 = 1$, jolloin

$$L_1 = (1,\ 1,\ 1)^T + r(0,\ 0,\ 1)^T,\ r \in \mathbb{R}$$

$$L_2 = s(1,\ c,\ \frac{c}{2})^T,\ s \in \mathbb{R}$$

Suorat leikkaavat pisteessä

$$(1,\ 1,\ 1)^T + r(0,\ 0,\ 1)^T = s(1,\ c,\ \frac{c}{2})^T$$

$$(1-s,\ 1-cs,\ 1+r-\frac{cs}{2})^T = 0$$

$$\Rightarrow s = 1,\ c = 1,\ r = -\frac{1}{2}$$

Eli arvolla $c = 1$ suorien leikkauspiste on $(1,\ 1,\ \frac{1}{2})^T$.

b) Leikkaustasolla on suorien suuntavektorit $(0,\ 0,\ 1)^T$ ja $(1,\ 1,\ \frac{1}{2})^T$. Ratkaistaan tasolle normaalivektori u joka on kohtisuorassa näitä vastaan:

$$\begin{cases} u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 + \frac{1}{2}u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_3 = 0,\ u_1 = -u_2$$

Valitaan normaalivektoriksi $u = (1,\ -1,\ 0)$, ja a-kohdan mukaan taso kulkee pisteen $(1,\ 1,\ \frac{1}{2})$ kautta. Näillä tiedoilla tason yhtälöksi saadaan

$$x - y = 0$$

Kotitehtävä 3. Laske matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi.

KT 3 Ratkaisu. Gaussin eliminaatio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1, r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 + 3r_2, r_4 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jaetaan kolmas rivi 3:lla.

$$\xrightarrow{r_1 + 2r_2, r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5/3 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 - 2r_3, r_2 - r_3, r_3 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8/3 & 2 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kerrotaan toinen rivi -1:llä. Vasemmalle puolelle on saatu identiteettimatriisi, eli haluttu käänteismatriisi voidaan lukea oikealta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ -8/3 & 2 & 4/3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kotitehtävä 4. Etsi avaruuden

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$$

ortogonaalikanta.

KT 4 Ratkaisu.

$$x_1 = -x_2 + x_3 + x_4$$

Valitaan vapaat parametrit $x_2 = r,\ x_3 = s,\ x_4 = t,\ r, s, t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -r+s+t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3$$

Havitaan että $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomat, eli ne muodostavat erään kannan V:lle. Ortogonaalinen kanta saadaan muokkaamalla vektoreita. Otetaan kannan ensimmäiseksi vektoriksi $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$. Seuraava kohtisuora vektori saadaan vähentämällä vektorista $\mathbf{v}_2$ sen projektio $\mathbf{u}_1$ suuntaan:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - proj_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vastaavasti

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - proj_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - proj_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avaruudelle V saadaan ortogonaalikanta

$$\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Harjoitustehtävät viikko 4

Harjoitustehtävä 1. Laske seuraavien matriisien rangi:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \\ 1 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vertaa tehtävien (c) ja (d) vastauksia. Selitä!

Ratkaisu 1.
a) $r(A) = 2$
b) $r(B) = 2$
c) $r(C) = 2$
d) $r(D) = 2$

Kohtien (c) ja (d) matriisit ovat toistensa transpoosit jolloin niiden rangi (aste) on sama.

Harjoitustehtävä 2. Laske pisteen $(1, 3, 5)$ etäisyys tasoon

$$x + y + z = 0$$

kolme-ulotteisessa avaruudessa.

Ratkaisu 2. Tasolla on normaalivektori

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tason lähin piste pisteeseen $(1,\ 3,\ 5)$ nähden on $(1+t,\ 3+t,\ 5+t),\ t \in \mathbb{R}$ joka toteuttaa tason yhtälön:

$$(1+t) + (3+t) + (5+t) = 0$$

$$3t = -9 \Rightarrow t = -3$$

Etäisyys on $||tn|| = 3\sqrt{3}$.

Harjoitustehtävä 3. Olkoon

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mikä on lausekkeen $\left\| L\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$ pienin mahdollinen arvo, kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$?

Ratkaisu 3. Matriisin L sarakkeet virittävät tason 3d-avaruudessa eli voidaan laskea pisteen $(1,\ 2,\ 3)$ lyhin etäisyys tästä tasosta. Vastaus: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Harjoitustehtävä 4.

a) Etsi avaruuden $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ jokin kanta.
b) Etsi avaruuden S jokin *ortonormaali* kanta.

Ratkaisu 4.

a)

$$x_1 = x_2 - x_3$$

Valitaan vapaat parametrit $x_2 = r,\ x_3 = s,\ x_4 = t,\ r, s, t \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r - s \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avaruuden S eräs kanta on siis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Ortonormaali kanta saadaan muokkaamalla vektorit kotitehtävän 4 tapaan ja normittamalla ne pituuteen 1:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Harjoitustehtävä 5. Etsi kaava (parametreineen) kaikille matriisin

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

oikeanpuolisille käänteismatriiseille. Onko matriisilla vasenpuolista käänteismatriisia?

Ratkaisu 5. Oikeanpuoleinen käänteismatriisi

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

on olemassa, jos sille pätee

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + 2e & b + 2f \\ c - e & d - f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Saadaan neljä yhtälöä joista ratkaisemalla päädytään tulokseen

$$R = \begin{pmatrix} 1 - 2e & -2f \\ e & 1 - f \\ e & f \end{pmatrix}, e, f \in \mathbb{R}$$

Vasemmanpuoleista käänteismatriisia ei ole (yhtälöistä seuraa ristiriita).

Harjoitustehtävä 6. Olkoon P_2 neliöllisen polynomien avaruus, ja kiinnitetään sen kanta $\{1, x, x^2\}$. Tutkitaan kaavan

$$L(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}$$

antama kuvaus $P_2 \to \mathbb{R}^3$.

a) Osoita, että L on lineaarikuvaus.
b) Laske L:n matriisiesitys.
c) Onko L käännettävä?
d) Mitä tämä tarkoittaa “intuitiivisesti”? (Vihje: Vastaus on luultavasti tuttu ominaisuus jo lukion matematiikasta.)

Ratkaisu 6.

a) Olkoon $f, g \in P_2$ ja $h = f + g$. Tällöin

$$L(h) = L(f) + L(g)$$

ja lisäksi

$$L(af) = aL(f), \; a \in \mathbb{R}$$

Siis L on lineaarikuvaus.

b)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) On käännettävä.
d) Kolme pistettä määrittävät paraabelin yksikäsitteisesti.