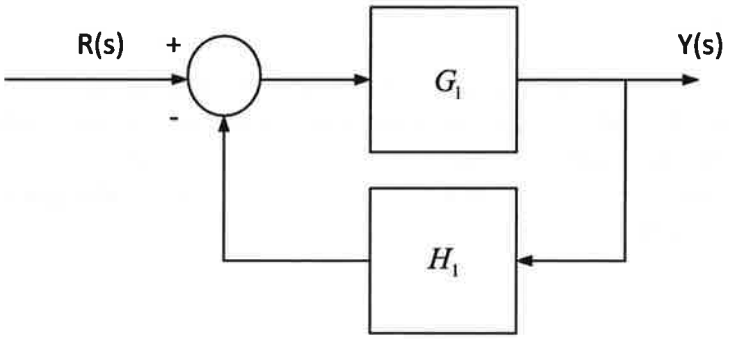
ELEC-C1230 Säätötekniikka

Välikoe 1. 24.2.2022

- *Etäkoe. Seuraa erillistä jo ennalta julkaistua ohjetta.*
- *Kukin tekee kokeen ja palauttaa sen itsenäisesti. Vastaukset joko itse tehtyyn tiedostoon tai Vastauspohjaan, joka on ennalta julkaistu. Lopuksi tiedosto muutetaan pdf:ksi (Sukunimi_Etunimi.pdf) ja palautetaan.*
- *Kurssimateriaali on käytettävissä. Matlab/Simulinkia ja laskimia saa käyttää.*
- *Kurssimateriaalia saa tutkia netissä, mutta mitään muuta tiedon etsintää ei saa tehdä.*
- *Kokeessa on neljä (4) tehtävää ja kaikkiin pitää vastata.*
- *HUOM. Ratkaisuissa on esitettävä riittävästi välivaiheita, jotta voidaan nähdä, miten olet ratkaisuun päätynyt.*

HUOM. Kurssimateriaali saa olla esillä koetta tehtäessä. Kuitenkin tehtävät ratkaistaan "kynällä ja paperilla" kuten perinteisessä luokassa pidettävässä kokeessa. Taskulaskinta ja tietokonetta saa käyttää numeeriseen laskemiseen. Tietokoneen laskentaohjelmia saa käyttää tulosten verifioimiseen jos haluaa, mutta tätä ei esitetä vastauksessa. Ratkaisut eivät saa perustua tietokoneen käyttöön (esim. Matlabin m-koodin käyttöön perustuva ratkaisu ei käy). Myöskään mitään kokeilemalla saatuja lukuarvoja tms. ei tulla hyväksymään ratkaisuksi.

1. Kuvan takaisinkytketyssä järjestelmässä $G_1(s) = \dfrac{10}{s+10}$ ja $H_1(s) = \dfrac{0{,}5}{10s+1}$.



a. Määritä suljetun systeemin siirtofunktio. (2 p)

b. Piirrä napa-nolla-kuvio. (Summittainen, voit ratkaista juuria esim. taskulaskimella tai Matlabilla.) (1 p)

c. Onko suljettu systeemi stabiili? Onko se minimivaiheinen? Onko suljetun systeemin askelvaste värähtelevä? (3 p)

2. Systeemiä kuvaa differentiaaliyhtälö

$$\ddot{y}(t) + 6a\dot{y}(t) + 9a^2 y(t) = bu(t),$$ a ja b ovat positiivisia vakioita

a. Muodosta tilaesitys käyttämällä tilamuuttujia $x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t)$. Esitä tilaesityksen matriisit A, B, C ja D. (2 p)

b. Muodosta siirtofunktio. (2 p)

c. Laske painofunktio. Millä ajan arvolla se saa maksimiarvonsa? (2 p)

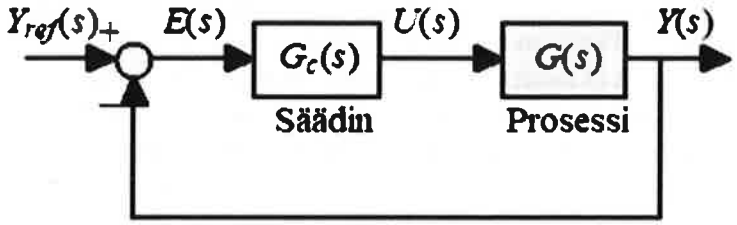
3. Tarkastellaan 1. kertaluvun järjestelmää

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

jossa a ja b ovat nollasta poikkeavia vakioita ja x skalaarifunktio.

a. Määritä siirtofunktio. (1 p)
b. Määritä systeemin tulo-lähtökäyttäytymistä kuvaava differentiaaliyhtälö. (2 p)
c. Millä parametrien a ja b arvoilla systeemi on i. asymptoottisesti stabiili, ii. marginaalisesti stabiili, iii. epästabiili? (3 p)

4. Tarkastellaan kuvassa esitettyä säätöjärjestelmää



jossa prosessia $G(s) = \dfrac{4}{s(s+2)}$ säädetään PD-säätäjällä $G_c(s) = K_p + K_d s$.

a. Millä säätäjän virityksen arvoilla suljettu systeemi on asymptoottisesti stabiili? (2 p)
b. Mikä on staattinen vahvistus askelherätteelle referenssistä suljetun systeemin lähtöön, kun säätäjä on viritetty siten, että suljettu systeemi on asymptoottisesti stabiili? (2 p)
c. Vastaako b-kohdassa saamasi tulos sitä, mitä yleisesti tämäntyyppisen säätäjän käytöstä tiedetään? Jos ei, selitä mistä asia johtuu. (2 p)

ELEC-C1230 Säätötekniikka

Välikoe 1 24.2.2022 / Ratkaisut

1.

a) $$G_{TOT}(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)H_1(s)} = \frac{\frac{10}{s+10}}{1+\frac{10}{s+10}\cdot\frac{0.5}{10s+1}}$$

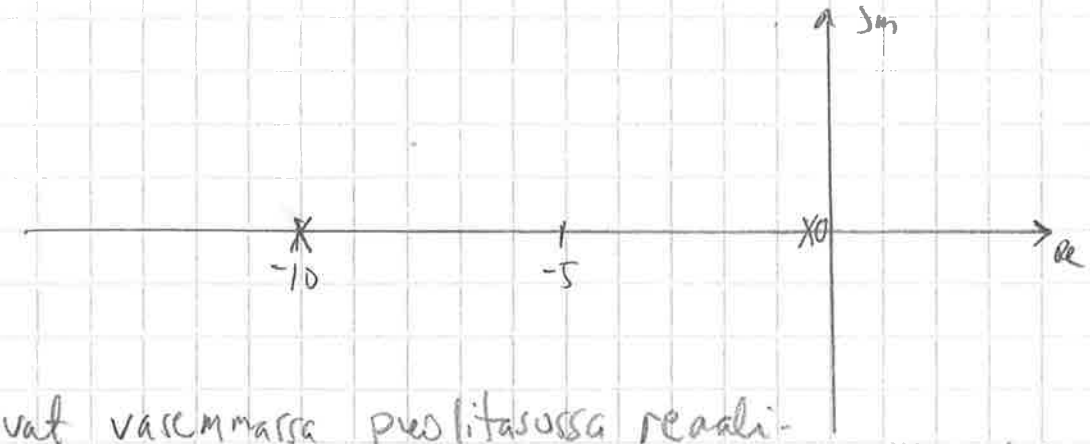
$$= \frac{10\,(10s+1)}{(s+10)(10s+1)+10\cdot 0.5} = \frac{10\,(10s+1)}{10s^2+s+100s+10+5}$$

$$= \frac{10\,(10s+1)}{10s^2+101s+15} = \frac{10s+1}{s^2+10.1s+1.5}$$

b) Nolla: $10s+1=0 \Rightarrow s = -\frac{1}{10} = -0.1$

Navat: $s^2+10.1s+1.5=0$

$$s = \frac{-10.1 \pm \sqrt{10.1^2-4\cdot 1\cdot 1.5}}{2} \approx \begin{cases} -9.5492 \\ -0.1508 \end{cases}$$



c) Navat vasemmassa puolitasossa reaali-akselilla ⇒ asymptoottisesti stabiili, ei värähtele
Nolla vasemmassa puolitasossa ⇒ minimivaiheinen

2. $\ddot{y}(t) + 6a\dot{y}(t) + 9a^2 y(t) = b\,u(t)$

$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t)$

a) Aikamuuttujat jätetään lyhyemmän esityksen takia merkitsemättä:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -9a^2 x_1 - 6a x_2 + b\,u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9a^2 & -6a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + 0 \cdot u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9a^2 & -6a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

b. Laplace-muunnetaan alkuperäinen differentiaaliyhtälö, alkuarvot nolliksi

$$s^2 Y(s) + 6a s Y(s) + 9a^2 Y(s) = b\,U(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s^2 + 6as + 9a^2} = \frac{b}{(s+3a)^2}$$

c) Painofunktio voidaan samastaa yksikköimpulssivasteeseen, joka on siirtofunktion käänteis-Laplacemuunnos

$$g(t) = L^{-1}\left[G(s)\right] = L^{-1}\left[\frac{b}{(s+3a)^2}\right] = b\,\frac{t\,e^{-3at}}{1!} = b\,t\,e^{-3at}$$

Painofunktio on nolla ajan hetkellä 0 ja ∞. Sillä välin se on positiivinen. Huippukohta saadaan derivaatan nollakohdasta

$$\frac{d}{dt}\left[b\,t\,e^{-3at}\right] = b\,e^{-3at} + b\,t\,(-3a)\,e^{-3at}$$

$$= b\,e^{-3at} - 3ab\,t\,e^{-3at}$$

$$= b\,e^{-3at}(1-3at) = 0$$

$$\Rightarrow t_{max} = \frac{1}{3a}$$

3. $\dot{x} = ax + bu$ Huom. skalaareja!
$y = x$

b) Ihan suoraan laskemalla

$$\dot{y} = ay + bu \Rightarrow \dot{y} - ay = bu$$

a) Laplace-muunnoksella

$$sY(s) - aY(s) = bU(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s-a}$$

Tietysti voidaan myös käyttää kaavaa

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1 \cdot b}{s-a} + 0 = \frac{b}{s-a}$$

c) Karakteristinen yhtälö $s - a = 0$

Yksi napa $s = a$

i. Asymptoottisesti stabiili $a < 0$

ii. Marginaalisesti stabiili $a = 0$ *

iii Epästabiili $a > 0$

* Tehtävässä oli mainittu, että a ja b ovat nollasta poikkeavia vakioita. Marginaalisesti stabiili tapaus ei siis voi esiintyä. Hyväksytään kuitenkin myös vastaus $a = 0$.

4.

$$G_{TOT} = \frac{G_c(s)G(s)}{1+G_c(s)G(s)} = \frac{\frac{4}{s(s+2)}\cdot(K_p+K_d s)}{1+\frac{4}{s(s+2)}\cdot(K_p+K_d s)}$$

$$= \frac{4(K_p+K_d s)}{s(s+2)+4(K_p+K_d s)} = \frac{4(K_p+K_d s)}{s^2+(2+4K_d)s+4K_p}$$

Karakteristinen yhtälö: $s^2+(2+4K_d)s+4K_p=0$

Routh-Hurwitz:

s^2	1	$4K_p$	0
s^1	$2+4K_d$	0	0
s^0	$4K_p$		

Asymptoottisesti stabiili, kun $K_p>0$ ja $2+4K_d>0$
$\Rightarrow K_d > -\frac{1}{2}$

Siis $K_p>0$, $K_d>-\frac{1}{2}$

b) $G_{TOT}(0) = \frac{4K_p}{4K_p} = 1$

c) Yleensä P- ja PD-säätö ei sattavat pysyvän poikkeaman referenssin ja säädetyn suureen välille. Nyt niin ei käynyt. Integrointi poistaa pysyvän poikkeaman. Nyt prosessi sisälsi integraattorin! Siksi pysyvää poikkeamaa ei syntynyt.