

# Vuikko 7 LV

M1

Kytetään circuit pois päältä ja asetetaan rajat miettimättä sen kummempin.

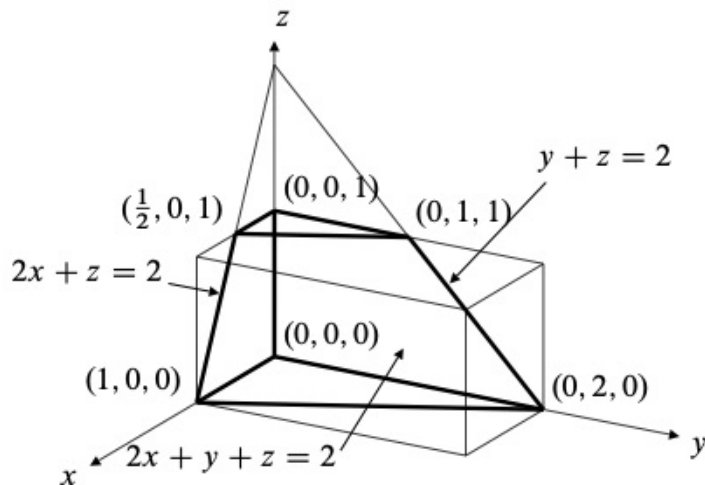
$$V = \iiint_D dV = \int_0^1 \int_0^{2-z} \int_0^{\frac{1}{2}(2-x-z)} dx dy dz = \frac{7}{12}$$

$\bar{z} = ?$  Lasketaan momentti  $z=0$ :n suhteen:

$$M_z = \iiint_D z dV = \int_0^1 z - z^2 + \frac{z^3}{4} dz$$

$$= \frac{11}{48}$$

$$\text{Eli } \bar{z} = \frac{11/48}{7/12} = \frac{11}{28}$$



M2 Asetiaan rajat :

$$V = \iiint_S dV = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{2-y-2z} dx dz dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} (2-y-2z) dz dy$$

$$= \int_0^1 \left[ (2-y)(1-y) - (1-y)^2 \right] dy$$

$$= \int_0^1 1-y dy = \frac{1}{2}$$

$$M_x = \iiint_S x dV = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{2-y-2z} x dx dz dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-y} \left[ (2-y)^2 - 4(2-y)z + 4z^2 \right] dz dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ (2-y)^2(1-y) - 2(2-y)(1-y)^2 + \frac{4}{3}(1-y)^3 \right] dy$$

Vaihtoehtoja on useita: Ainakin

(1) Raaka voima: Lasketaan polynomiksi.

(2) Muuttujanvaihto:

$$\text{Nimittäin: } u = 1 - y$$

$$\Rightarrow 2 - y = u + 1$$

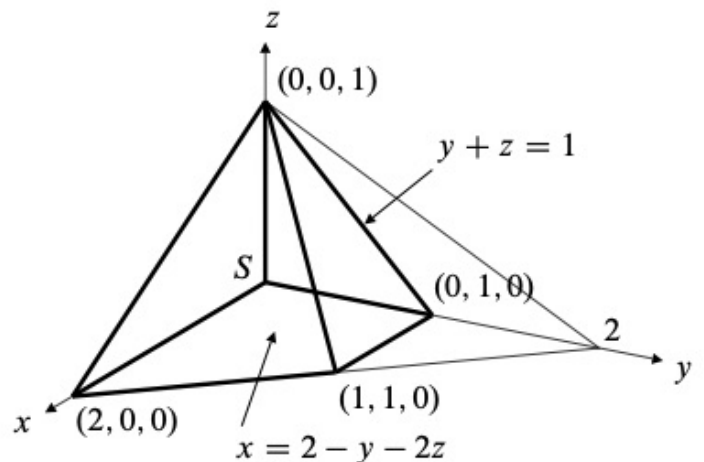
$$\text{ja siis } du = -dy$$

Valitaan (2):

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ (u+1)^2 u - 2(u+1)u^2 + \frac{4}{3}u^3 \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{3}u^3 + u \right] du = \frac{7}{24} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Ehkä kannatti,} \\ \text{ehkä ei.} \end{array} \right)$$

$$\bar{x} = \frac{7/24}{1/2} = \frac{7}{12}$$



## Loppuviikko

**TEHTÄVÄ J1** Käyrät  $y = x^k$  ja  $x = y^k$  ( $k > 0$ ,  $k \neq 1$ ) rajoittavat tasoalueen ensimmäisessä neljänneksessä. Laske tämän keskiö. Miten keskiö käyttäytyy, kun  $k \rightarrow \infty$ ?

**Ratkaisu:**  $X = Y = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(k+2)}$ ;  $(X, Y) \rightarrow (1/2, 1/2)$  kun  $k \rightarrow \infty$ .

**RATKAISU J1** Ratkaistaan aluksi integroimisrajat jotka saadaan kahden käyrän leikkauspisteistä:

$$x^k = x^{\frac{1}{k}} \Rightarrow \log(x^k) = \log(x^{\frac{1}{k}}) \iff k \ln(x) = \frac{1}{k} \ln(x) \iff (k^2 - 1) \ln(x) = 0$$

Koska  $k \neq 1 \wedge k > 0$ , ylläolevan yhtälön toteuttaa vain  $x = 1$ . Alaraja saadaan alkuperäisen yhtälön toisena ratkaisuna:  $x = 0$ . Välillä  $x \in [0, 1]$   $x^k \leq x^{\frac{1}{k}}$ , jolloin integroimisjoukoksi saadaan

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^k \leq y \leq x^{\frac{1}{k}}\}.$$

Lasketaan aluksi joukon pinta-ala:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^k}^{x^{\frac{1}{k}}} dy dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{k}} - x^k dx = \left( \frac{1}{\frac{1}{k} + 1} x^{\frac{1}{k} + 1} - \frac{1}{k + 1} x^{k+1} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{\frac{1}{k} + 1} - \frac{1}{1 + k} = \frac{k - \frac{1}{k}}{(\frac{1}{k} + 1)(k + 1)} = \frac{(k - 1)(1 + \frac{1}{k})}{(\frac{1}{k} + 1)(k + 1)} = \frac{k - 1}{k + 1}. \end{aligned}$$

Keskiö voidaan laskea integroimalla sitä vastaava muuttuja joukon yli ja jakamalla se joukkoa vastaavalla koolla (tässä tapauksessa pinta-alalla):

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dA$$

$$\begin{aligned}
\iint_D x \, dA &= \int_0^1 \int_{x^k}^{x^{\frac{1}{k}}} x \, dy dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{k}+1} - x^{k+1} = \left( \frac{1}{\frac{1}{k}+2} x^{\frac{1}{k}+2} - \frac{1}{k+2} x^{k+2} \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{\frac{1}{k}+2} - \frac{1}{k+2} = \frac{k - \frac{1}{k}}{(\frac{1}{k}+2)(k+2)} = \frac{(k-1)(1+\frac{1}{k})}{(2+\frac{1}{k})(2+k)} \\
\Rightarrow \bar{x} &= \frac{1}{A} \iint_D x \, dA = \frac{(k+1)(1+\frac{1}{k})}{(2+\frac{1}{k})(2+k)} \\
(k+1)(1+\frac{1}{k}) &= k+2 + \frac{1}{k} = \frac{k^2+2k+1}{k} = \frac{(k+1)^2}{k} \\
(2+\frac{1}{k})(2+k) &= 5+2k + \frac{2}{k} = \frac{5k+2k^2+2}{k} = \frac{(k+2)(2k+1)}{k} \\
\Rightarrow \bar{x} &= \frac{(k+1)^2}{k} \frac{k}{(k+2)(2k+1)} = \frac{(k+1)^2}{(k+2)(2k+1)}.
\end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y \, dA$$

$$\begin{aligned}
\iint_D y \, dA &= \int_0^1 \int_{x^k}^{x^{\frac{1}{k}}} y \, dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^2) \Big|_{x^k}^{x^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{2}{k}} - x^{2k} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+\frac{2}{k}} x^{\frac{2}{k}+1} - \frac{1}{1+2k} x^{2k+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+\frac{2}{k}} - \frac{1}{1+2k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{2k - \frac{2}{k}}{(1+\frac{2}{k})(1+2k)} \right) = \frac{(k-1)(1+\frac{1}{k})}{(1+\frac{2}{k})(1+2k)} \\
\Rightarrow \bar{y} &= \frac{1}{A} \iint_D y \, dA = \frac{(k+1)(1+\frac{1}{k})}{(1+\frac{2}{k})(1+2k)} \\
(1+\frac{2}{k})(1+2k) &= 5+2k + \frac{2}{k} = \frac{(k+2)(2k+1)}{k} \\
\Rightarrow \bar{y} &= \frac{(k+1)^2}{k} \frac{k}{(k+2)(2k+1)} = \frac{(k+1)^2}{(k+2)(2k+1)}.
\end{aligned}$$

**Keskiö on siis**

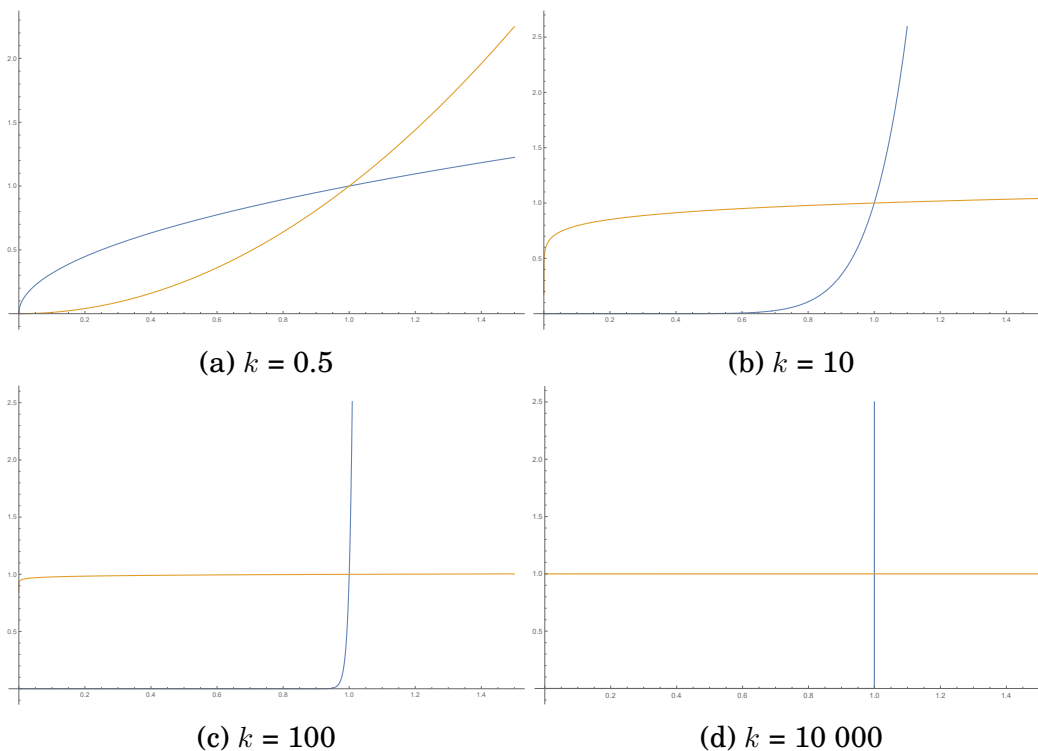
$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{(k+1)^2}{(k+2)(2k+1)}, \frac{(k+1)^2}{(k+2)(2k+1)} \right).$$

Tarkastellaan keskiön käyttäytymistä, kun  $k \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 + 2k + 1}{2k^2 + 5k + 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k + 2}{4k + 5} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Lauseke on muotoa  $\frac{\infty}{\infty}$ , joten voitiin käyttää l'Hôpitalin sääntöä<sup>1</sup> kahdesti. Siis

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



Kuva 6: Käyrien kuvaajia eri  $k$ :n arvoilla

**TEHTÄVÄ J2** Ympyräalueen neljännekselle  $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R\}$  on levitetty massa, jonka pintatiheys on  $\rho(x, y) = x$ . Etsi massakeskipiste.

**Ratkaisu:**  $(\frac{3\pi}{16}R, \frac{3}{8}R)$ .

---

<sup>1</sup> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , jos  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  tai  $\pm\infty$ ,  $g'(x) \neq 0 \forall x \in ]0, \infty[$  ja  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  on olemassa.

**RATKAISU J2** Lasketaan aluksi joukon  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$  massa. Siirrytään napakoordinaatistoon:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta), \end{cases}$$

jossa  $0 \leq r \leq R$  ja  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Kyseisen muunnoksen Jacobin determinantti on

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

Joukon massa saadaan integroimalla pintatiheyttä  $\rho(x, y) = x = r \cos(\theta)$  koko joukon yli:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos(\theta) r \, dr d\theta = (\sin(\theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^R \\ &= (1 - 0) \left( \frac{R^3}{3} \right) = \frac{R^3}{3}. \end{aligned}$$

Massakeskipiste saadaan integroimalla tarkasteltavaa muuttujaa ja pintatiheyttä joukon yli ja jakamalla tämä joukon massalla<sup>2</sup>:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) \, dA$$

$$\iint_D x \rho(x, y) \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \cos^2(\theta) r \, dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) \, d\theta \left( \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) \, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \, d\theta \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) \, d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) \, d\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) \, dA = \frac{3}{R^3} \frac{\pi}{4} \frac{R^4}{4} = \frac{3\pi}{16} R$$

---

<sup>2</sup>Integraalin voi myös laskea käyttämällä trigonometristä identiteettiä  $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA^3$$

$$\begin{aligned} \iint_D y \rho(x, y) dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \left( \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = (-\cos^2(\theta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\theta)(-\sin(\theta)) d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = \frac{1}{2}(-0 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{3}{R^3} \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} = \frac{3}{8} R$$

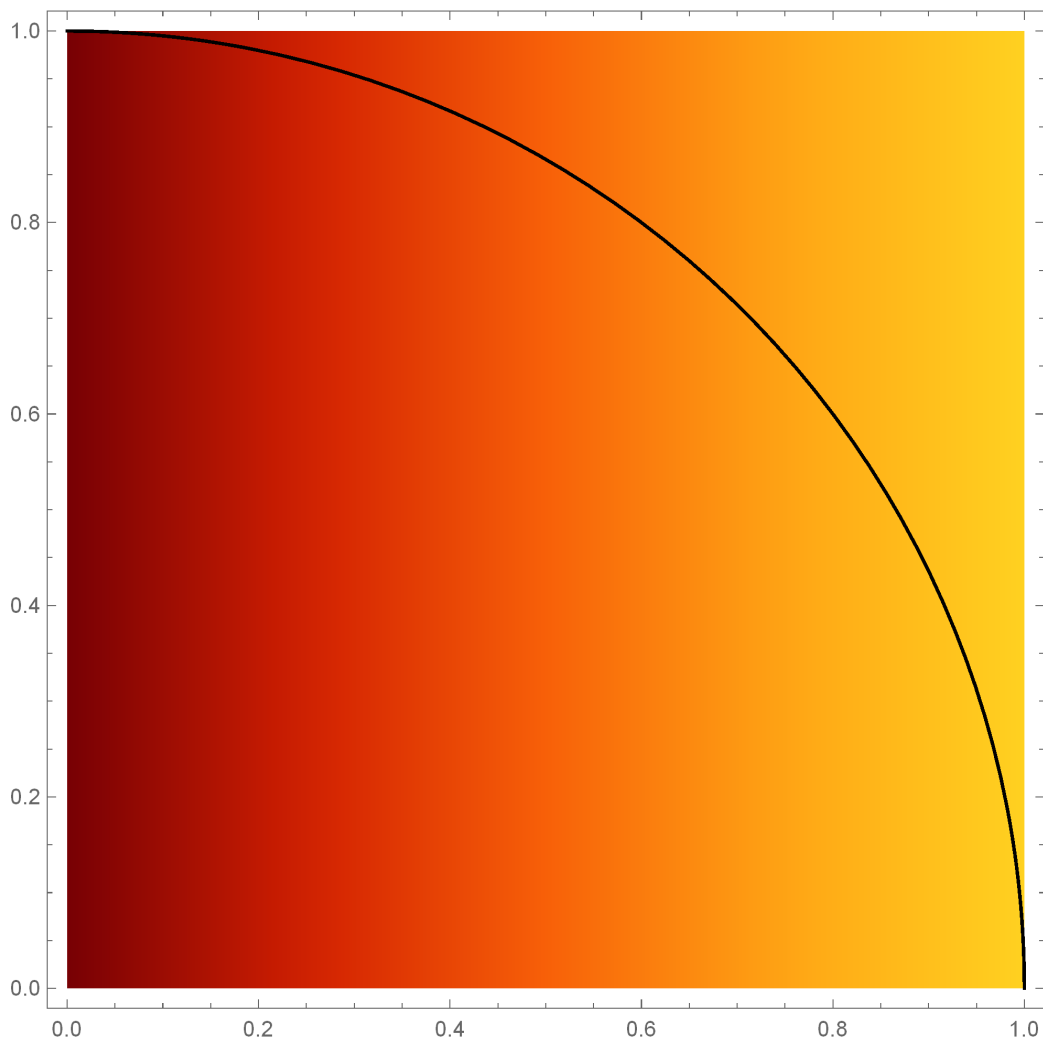
**Massakeskipiste on siis**

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{3\pi}{16} R, \frac{3}{8} R \right).$$

---

<sup>3</sup>Integraalin voi myös laskea käyttämällä trigonometristä identiteettiä  $\cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$





Kuva 7: Tarkasteltava joukko  $D$  ja sen päälle kuvattu pintatiheys  $\rho$

**TEHTÄVÄ J3** Olkoon  $k > 0$ . Määritä tasoalueen

$$G = \left\{ (x, y) \mid x^4 < y < \frac{kx^2 + 1}{k + 1} \right\}$$

keskiö ja tutki, millä parametrin  $k$  arvoilla se ei kuulu alueeseen  $G$ .

**Ratkaisu:**  $\left(0, \frac{k^2 + 5k + 10}{3(k+1)(k+6)}\right); (X, Y) \notin G$ , kun  $k \geq 2$ .

**RATKAISU J3** Ratkaistaan aluksi muuttujan  $x$  rajat jotka ovat pisteitä joissa joukon  $G$  käyrät leikkaavat toisensa:

$$\begin{aligned}
x^4 = \frac{kx^2 + 1}{k + 1} &\iff x^4(k + 1) \iff x^4(k + 1) - kx^2 - 1 = 0 \\
u = x^2 \Rightarrow u^2(k + 1) - ku - 1 = 0 &\iff u = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4k + 4}}{2(k + 1)} \\
&= \frac{k \pm \sqrt{(k + 2)^2}}{2(k + 1)} = \frac{k \pm (k + 2)}{2(k + 1)} = \begin{cases} \frac{2k+2}{2(k+1)} = 1 \\ \frac{-2}{2(k+1)} = -\frac{1}{k+1} \end{cases} \\
x = \pm \sqrt{-\frac{1}{k + 1}} &\notin \mathbb{R} \vee x = \pm 1
\end{aligned}$$

**Integroimisjoukoksi saadaan siis**

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x^4 \leq y \leq \frac{kx^2 + 1}{k + 1}\}.$$

**Lasketaan joukon  $G$  pinta-ala:**

$$\begin{aligned}
A = \iint_G dA &= \int_{-1}^1 \int_{x^4}^{\frac{kx^2+1}{k+1}} dy dx = \int_{-1}^1 \frac{kx^2 + 1}{k + 1} - x^4 dx = \left(\frac{\frac{k}{3}x^3 + x}{k + 1} - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{\frac{2}{3}k + 2}{k + 1} - \frac{2}{5} = \frac{\frac{10}{3}k + 10 - 2k - 2}{5(k + 1)} = \frac{\frac{4}{3}k + 8}{5(k + 1)} = \frac{4k + 24}{15(k + 1)} = \frac{4(k + 6)}{15(k + 1)}
\end{aligned}$$

**Lasketaan keskiö:**

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_G x dA$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_G y dA$$

$$\begin{aligned}
\iint_G x dA &= \int_{-1}^1 \int_{x^4}^{\frac{kx^2+1}{k+1}} x dy dx = \int_{-1}^1 \frac{kx^3 + x}{k + 1} - x^5 dx = \left(\frac{k\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}}{k + 1} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_{-1}^1 = 0 \\
&\Rightarrow \bar{x} = 0
\end{aligned}$$

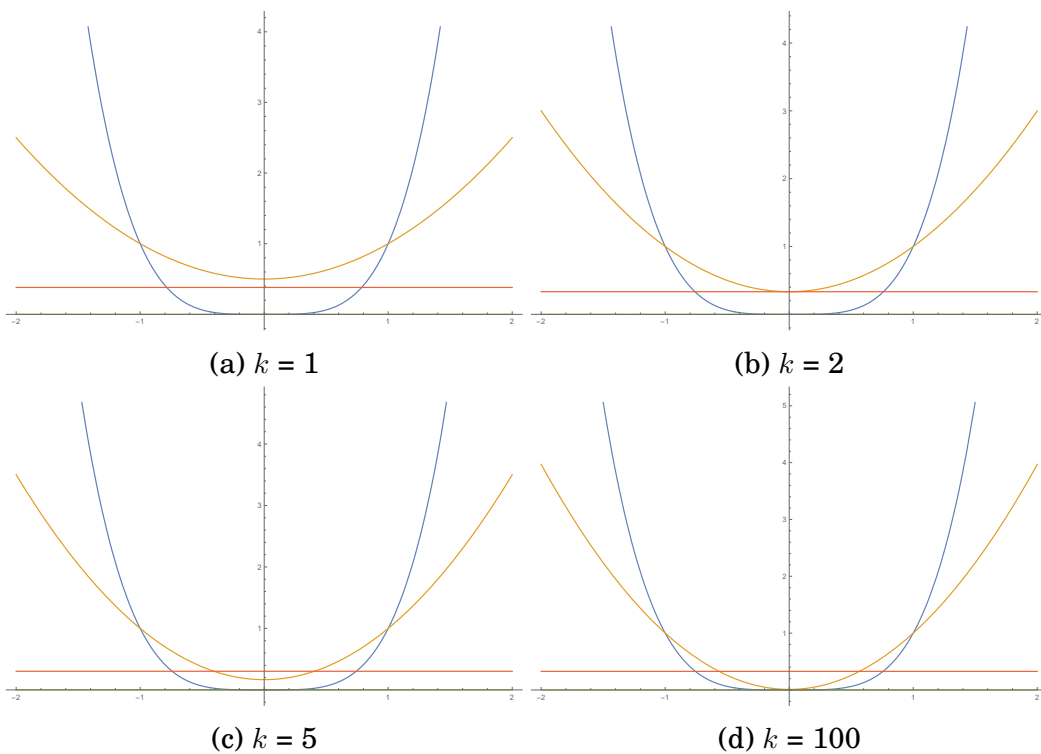
$$\begin{aligned}
\iint_G y \, dA &= \int_{-1}^1 \int_{x^4}^{\frac{kx^2+1}{k+1}} y \, dy dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{kx^2+1}{k+1} \right)^2 - x^8 \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(k+1)^2} (k^2 2x^4 + 2kx^2 + 1) - x^8 \, dx \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(k+1)^2} \left( \frac{k^2 x^5}{5} + \frac{2kx^3}{3} + x \right) - \frac{x^9}{9} \right) \Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{(k+1)^2} \left( \frac{k^2}{5} + \frac{2k}{3} + 1 \right) - \frac{1}{9} \\
&= \frac{3k^2 + 10k + 15}{15(k+1)^2} - \frac{5(k+1)^2}{45(k+1)^2} \\
&= \frac{4k^2 + 20k + 40}{45(k+1)^2} \\
\Rightarrow \bar{y} &= \frac{15(k+1)}{4(k+6)} \frac{4(k^2 + 5k + 10)}{45(k+1)^2} \\
&= \frac{k^2 + 5k + 10}{3(k+1)(k+6)}
\end{aligned}$$

Keskiö on siis

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left( 0, \frac{k^2 + 5k + 10}{3(k+1)(k+6)} \right).$$

Keskiö ei kuulu joukkoon  $G$  kun

$$\begin{aligned}
\frac{k^2 + 5k + 10}{3(k+1)(k+6)} &\geq \frac{1}{k+1} \iff (k+1)(k^2 + 5k + 10) \geq 3(k+1)(k+6) \\
&\iff k^3 + 3k^2 - 6k - 8 \geq 0 \iff (-4 \leq k \leq -1) \vee k \geq 2
\end{aligned}$$



Kuva 8: Käyrien kuvaajia ja keskiön  $y$ -koordinaattia vastaava suora eri  $k$ :n arvoilla

**TEHTÄVÄ J4** Pyramidissa, jota reunustavat tasot  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y + z = a$ , on massatiheys  $\rho(x, y, z) = z$ . Laske massakeskipiste. Oletetaan  $a > 0$ .

**Ratkaisu:**  $(a/5, a/5, 2a/5)$ .

**RATKAISU J4**

Lasketaan pyramidin massa:

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_D \rho(x, y, z) \, dA = \int_0^a \int_0^{a-z} \int_0^{a-z-y} z \, dx dy dz = \int_0^a \int_0^{a-z} z(a-z-y) \, dy dz \\
&= \int_0^a z(a(a-z) - z(a-z) - \frac{1}{2}(a-z)^2) \, dz \\
&= \int_0^a z\left(\frac{a^2}{2} - az + \frac{1}{2}z^2\right) \, dz \\
&= \left(\frac{1}{4}a^2z^2 - \frac{1}{3}az^3 + \frac{1}{8}z^4\right)\Big|_0^a = \frac{a^4}{24}
\end{aligned}$$

Ratkaistaan kappaleen massakeskipiste:

$$\begin{aligned}
\iiint_D y\rho(x, y, z) \, dA &= \int_0^a \int_0^{a-z} \int_0^{a-z-y} yz \, dx dy dz = \int_0^a \int_0^{a-z} yz(a-z-y) \, dy dz \\
&= \int_0^a \left(\frac{1}{2}y^2za - \frac{1}{2}y^2z^2 - \frac{1}{3}y^3z\right)\Big|_0^{a-z} \, dz \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}(a-z)^2za - \frac{1}{2}(a-z)^2z^2 - \frac{1}{3}(a-z)^3z \, dz \\
&= \frac{a^5}{24} - \frac{a^5}{60} - \frac{a^5}{60} = \frac{a^5}{120} \\
\Rightarrow \bar{y} &= \frac{1}{m} \iiint_D y\rho(x, y, z) \, dA = \frac{24}{a^4} \frac{a^5}{120} = \frac{a}{5}
\end{aligned}$$

Symmetrian nojalla  $\bar{x} = \bar{y}$ .

$$\begin{aligned}
\iiint_D z\rho(x, y, z) dA &= \int_0^a \int_0^{a-z} z^2(a-z-y) dydz = \int_0^a (z^2(ay - zy - \frac{1}{2}y^2)) \Big|_0^{a-z} \\
&= \int_0^a z^2(a(a-z) - z(a-z) - \frac{1}{2}(a-z)^2) dz \\
&= \int_0^a z^2(\frac{1}{2}a^2 - az + \frac{1}{2}z^2) dz = \frac{a^5}{6} - \frac{a^5}{4} + \frac{a^5}{10} = \frac{a^5}{160} \\
\Rightarrow \bar{z} &= \frac{1}{m} \iiint_D z\rho(x, y, z) dA = \frac{24}{a^4} \frac{a^5}{60} = \frac{2a}{5}
\end{aligned}$$

Kappaleen massakeskipiste on siis

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$$

## Haaste

Etsi  $R$ -säteisen ympyräkuvion hitausmomentti keskipisteen suhteen.  
RATKAISU Käytetään tässäkin napakoordinaatteja  $(r, \theta)$ , jolloin jokaisen pisteen etäisyys ympyräkuvion keskipisteestä on  $r$ . Olkoot ympyräkuvion massatiheys  $\rho(r, \theta)$  ja levyn paksuus  $t$ . Tällöin massan tiheysjakaumaksi saadaan  $dm = \rho dV = \rho t r dr d\theta$  ja hitausmomentti on

$$J = \int_A r^2 dm = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \rho(r, \theta) t dr d\theta.$$

Jos massatiheys oletetaan lisäksi vakioksi  $\rho(r, \theta) = \lambda$ , saadaan tästä edelleen

$$J = \lambda t \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta = 2\pi \lambda t \int_0^R \frac{r^4}{4} = \frac{\pi \lambda t R^4}{2}.$$

Toisaalta kappaleen massa on  $m = \rho V = \lambda t \pi R^2 \Rightarrow \lambda t \pi = m/R^2$ , joten hitausmomentti voidaan vielä kirjoittaa muotoon

$$J = \frac{mR^2}{2}.$$