1A Todennäköisyyden laskusäännöt

Tässä harjoituksessa on muista poiketen 4 tuntitehtävää. Kotitehtäviä seuraavaa kertaa varten on 2 kpl, kuten yleensäkin. Tehtävissä vihreällä merkityt osat ovat lisävihjeitä.

Kun sanomme, että alkio valitaan tai poimitaan n-alkioisesta joukosta *umpimähkään*, tarkoitamme, että jokaisella joukon alkiolla on *sama* todennäköisyys $1/n$ tulla valituksi.

Tuntitehtävät

1A1 (Kaksi nopanheittoa) Kun tavallista noppaa heitetään kaksi kertaa, voidaan satunnaisilmiöön liittyvä perusjoukko määritellä kaavalla

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) : x = 1,2,3,4,5,6 \text{ ja } y = 1,2,3,4,5,6\} \\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\}, \end{aligned}$$

missä x = ensimmäisen heiton tulos ja y = toisen heiton tulos. Väritä perusjoukkoa kuvaavaan 6×6 -ruudukkoon seuraavat tapahtumat ja määritä niiden todennäköisyydet:

(a) $A = \{(x,y) \in S : x = 1\}$,

(b) $B = \{(x,y) \in S : y \geq 4\}$,

(c) $C = \{(x,y) \in S : x + y = 7\}$,

(d) $A \cup C$ = joukkojen A ja C yhdiste,

(e) $B \cap C$ = joukkojen B ja C leikkaus,

(f) $C \setminus A$ = joukkojen C ja A erotus.

Tässä tilanteessa kaikki 36 toteumaa ovat *yhtä todennäköiset*, joten tapahtuman todennäköisyys voidaan määrittää helposti, kun tiedetään montako toteumaa (taulukon ruutua) siihen sisältyy.

1A2 (Maanäytteet) Kaatopaikan läheisestä maaperästä satunnaisesti kerätyistä näytteistä löydetään todennäköisyydellä 0.30 haitallinen määrä lyijyä, ja todennäköisyydellä 0.40 haitallinen määrä arseeniyhdisteitä. Todennäköisyydellä 0.10 löydetään molempia.

Huom: “Löydetään lyijyä” on eri asia kuin “löydetään vain lyijyä”. Jos löydetään lyijyä, saatetaan löytää *myös* arseeniyhdisteitä, tai sitten ei.

Laske seuraavien tapahtumien todennäköisyydet.

(a) Löydetään lyijyä mutta ei arseeniyhdisteitä.

(b) Löydetään arseeniyhdisteitä mutta ei lyijyä.

(c) Löydetään ainakin jompaakumpaa ainetta.

(d) Ei löydetä kumpaakaan.

1A3 (Sininen taksi) Kaupungissa liikennöi sata taksia, joista yksi on sininen ja loput vihreitä. Eräänä yönä yksi takseista ajaa polkupyöräilijän päälle ja pakenee paikalta. Silminnäkijän lausunnon mukaan yliajanut taksi oli sininen, minkä johdosta poliisi vangitsee sinisen taksin kuljettajan epäiltynä törkeästä liikenneturvallisuuden vaarantamisesta. Aiempien tutkimusten perusteella tiedetään, että vastaavissa olosuhteissa silminnäkijät näkevät sinisen auton sinisenä 90% todennäköisyydellä ja vihreän auton sinisenä 8% todennäköisyydellä.

Mikä on todennäköisyys, että yliajoon syyllistynyt taksi oli sininen? Tulisiko sinisen taksin kuljettaja tuomita tämän näytön perusteella?

1A4 (Otanta kahdella tavalla) Pienessä kylässä on 120 asukasta, joista 20 on maanomistajia. Numeroimme asukkaat kokonaisluvuin $1, 2, \dots, 120$ siten, että maanomistajilla on numerot $1, 2, \dots, 20$.

(a) Valitaan satunnainen kylän asukas umpimähkään. Mikä on todennäköisyys, että valittu asukas on maanomistaja? Merkitään tätä lukua jatkossa p:llä.

(b) **Otanta takaisinpanolla.** Toistamme prosessin “valitse kylän asukas umpimähkään” kolme kertaa. Joka kerta valitaan kaikista asukkaista, joten sama asukas saatetaan valita uudestaankin. Olkoon valittujen asukkaiden jono valintajärjestyksessä (i, j, k). Montako erilaista jonoa on olemassa? Merkitään tätä lukua jatkossa N:llä.

(c) Edellisen kohdan tapauksessa, montako erilaista jonoa on, joissa kaikki kolme asukasta ovat maanomistajia? Merkitään tätä lukua A:lla.

(d) Laske A/N viidellä desimaalilla. Tämä on tn sille, että tulimme valinneeksi kolme maanomistajaa. Vertaa tätä lukua lukuun p^3 ja selitä havaintosi. Vihje: Vertaa tilannetta nopanheittoon.

(e) **Otanta ilman takaisinpanoa.** Valitaan kolme asukasta seuraavasti: Ensimmäinen valitaan umpimähkään kaikista asukkaista. Toinen valitaan jäljellä olevista umpimähkään, ja kolmas taas jäljellä olevista umpimähkään. Montako erilaista jonoa voidaan valita? Merkitään tätä lukua M:llä.

(f) Edellisen kohdan tapauksessa, montako erilaista jonoa on, joissa kaikki kolme asukasta ovat maanomistajia? Merkitään tätä lukua B:llä.

(g) Laske B/M viidellä desimaalilla. Tämä on tn sille, että tulimme valinneeksi kolme maanomistajaa. Vertaa aiempiin tuloksiin ja selitä.

Vihje: Järjestetyt jonot (luento 1A, Leskelä §1.8).

Kotitehtävät

1A5 (Peliautomaatit) Kasinolla on kahdenlaisia peliautomaatteja, jotka näyttävät ulospäin täysin samalta. Tyypin A peliautomaateissa voittotodennäköisyys on 5% ja tyypin B peliautomaateissa 10%. Tiedetään, että 80% kasinon peliautomaateista on tyyppiä A ja 20% tyyppiä B. Peluri valitsee kasinolta satunnaisen peliautomaatin ja pelaa sitä yhden pelin verran.

(a) Mikä on todennäköisyys, että hän saa voiton?

(b) Jos peluri *saa* voiton, mikä on todennäköisyys, että automaatti on tyyppiä A? Entä tyyppiä B? Selitä luvut arkijärjellä.

(c) Jos peluri *ei saa* voittoa, mikä on todennäköisyys, että automaatti on tyyppiä A? Entä tyyppiä B? Selitä luvut arkijärjellä.

1A6 (Tunnisteet) Eräällä planeetalla on 5^{10} asukasta, joista jokainen on identifioitu 10-merkkisen tunnisteen avulla. Tunnisteiden jokainen merkki on joko A, B, C, D tai E (jolloin erilaisia tunnisteita on olemassa yhteensä 5^{10}) ja joka asukkalla on eri tunniste (jolloin kaikki tunnisteet ovat siis tällä hetkellä käytössä). Kaksi esimerkkiä tunnisteista: CEAADEEBBB, AABABCAADE.

(a) Kuinka monen asukkaan tunniste on palindromi? (eli sama luettuna etu- ja takaperin, esim. AABCAACBAA)

(b) Kuinka monen asukkaan tunnisteessa mitkään kaksi peräkkäistä merkkiä eivät ole samoja? (esim. ABADABACAD on tällainen, kun taas AACBDBABCB ei ole)

Valitaan satunnainen planeetan asukas (valittu asukas on siis yhtä suurella todennäköisyydellä mikä tahansa planeetan asukkaista). Millä todennäköisyydellä,

(c) hänen tunnisteensa on palindromi?

(d) hänen tunnisteensa mitkään kaksi peräkkäistä merkkiä eivät ole samoja?