2B Odotusarvot

Tuntitehtävät

2B1 (Potenssin odotusarvo) Satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma tiheysfunktiolla

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Olkoon n jokin positiivinen kokonaisluku.

(a) Määritä satunnaismuuttujan $Y = X^n$ kertymäfunktio ja tiheysfunktio.
Vihje: Mitä arvoja X^n voi saada? Kertymäfunktio $F_Y(y)$ ilmaisee erään tapahtuman todennäköisyyden. Minkä tapahtuman, ja milloin kyseinen tapahtuma toteutuu?

(b) Laske $\mathrm{E}(X^n)$ käyttäen (a)-kohdassa määritettyä X^n:n tiheysfunktiota.

(c) Laske $\mathrm{E}(X^n)$ käyttäen odotusarvon muunnoskaavaa (luento 2A / monisteen luku 3.3).

(d) Käyttäen johtamaasi kaavaa, laske $\mathrm{E}(X^n)$ kun $n = 1, 2, 3, 4$.

2B2 (Odotusaikaparadoksi) Bussit saapuvat pysäkillesi tiettyinä aikoina, kolme bussia tunnissa. Saavut pysäkille X minuuttia yli 9, missä X on tasajakautunut avoimella välillä $]0, 60[$ (ts. välin päätepisteet eivät ole mukana).

(a) Jos bussit saapuvat säännöllisesti 20 minuutin välein, mikä on odotusaikasi odotusarvo?

(b) Luettuasi aikataulun huomaat, että bussit saapuvatkin epätasaisin mutta säännöllisin välein kello 9:00, 9:10, 9:30, 10:00, . . . jne. Esitä bussin odotusaika w oman saapumisaikasi x funktiona $w = g(x)$ ja piirrä funktio. (Vihje: Määrittele funktio paloittain.)

(c) Laske $\mathrm{E}(W)$, missä $W = g(X)$. Vihje: Odotusarvon muunnoskaava.

(d) Vertaa kohtien (a) ja (c) tuloksia ja selitä arkijärjellä.

Kotitehtävät

2B3 (Epidemia) Eräässä epidemiassa sairaiden lukumäärän arvioidaan R-kertaistuvan joka viikko. Kasvuvauhtia kuvaava kerroin R on tuntematon luku, mutta sama luku joka viikko. Epidemiologi Adam arvioi, että R on tasajakautunut välillä $I = [0.6, 1.4]$, ts. hän pitää yhtä todennäköisenä, että R on esim. välillä $[0.60, 0.61]$ kuin millä tahansa muulla samanpituisella välillä, joka sisältyy I:hin. Kerroin $Y = R^{12}$ ilmaisee monikokertaiseksi sairaiden määrä kasvaa tai pienenee 12 viikossa.

(a) Laske $\mathrm{E}(Y)$.

(b) Millä välillä ovat Y:n mahdolliset arvot?

(c) Adamin kaveri Bertil arvelee, että Y on tasajakautunut (b)-kohdassa lasketulla välillä. Laske, mikä on kyseisen tasajakauman odotusarvo ja päättele tästä, voiko Bertil olla oikeassa.

(d) Toinen kaveri Cecil arvioi, että Y:n odotusarvo on $(\mathrm{E}(R))^{12}$. Laske kyseinen luku ja kerro mitä mieltä olet Cecilin arviosta.

Kohdista (e1) ja (e2) riittää **jommankumman** tekeminen. Molemmatkin saa tehdä, jos intoa riittää!

(e1) Selvitä Y:n kertymäfunktio (vihje: luento 2A), sen perusteella Y:n tiheysfunktio, ja piirrä tiheysfunktion kuvaaja alueella $y > 0.5$. Kuvaile Y:n jakaumaa sanallisesti. Laske myös todennäköisyydet $\mathrm{P}(Y > 1)$ ja $\mathrm{P}(Y > 10)$.

(e2) Tutki Y:n jakaumaa kokeellisesti tietokoneella seuraavasti. Arvo 100 000 mahdollista R:n arvoa (vihje: Matlabissa/Octavessa `unifrnd` tai R:ssä `runif`), laske vastaavat Y:n arvot näissä tapauksissa, ja piirrä niistä histogrammi (vihje: Matlab/Octave/R `hist`). Kuvaile Y:n jakaumaa sanallisesti. Laske myös *suhteelliset esiintyvyydet* tapahtumille $\{Y > 1\}$ ja $\{Y > 10\}$.

2B4 (Vertaisarviointi) Laskuharjoitukseen saapuu 20 opiskelijaa, joista jokainen palauttaa kotitehtävien vastauspaperinsa assistentille. Assistentti sekoittaa vastauspaperit huolellisesti ja jakaa ne sitten takaisin opiskelijoille tarkastettaviksi, yhden kullekin. Määritä odotusarvo niiden opiskelijoiden lukumäärälle, jotka päätyvät tarkastamaan oman vastauspaperinsa.

Vihje. Määritellään indikaattorimuuttuja

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jos } i\text{:s opiskelija tarkastaa oman vastauspaperinsa,} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Odotusarvon lineaarisuudesta voi myös olla apua.