

ELEC-C1230 Säättötekniikka

Luku 7: Taajuusanalyysi

Lukuohje

- Taajuusvasteen käsite ja laskeminen siirtofunktiosta
- Vahvistus ja vaihe kulmataajuuden funktiona
- Boden ja Nyquistin diagrammit
- Vahvistus- ja vaihevarat sekä niiden määrittäminen yo. diagrammeista
- Nyquistin stabiilisuuslause

Taajuusanalyysi

- Aikaisemmillä luennoilla on tarkasteltu systeemien käyttäytymistä aikatasossa (differentiaaliyhtälöt, herätteet ja vasteet) tai Laplace-tasossa (napa-nollakuviot, karakteristinen yhtälö, siirtofunktiomallit)
- Tällä luennolla tutkitaan systeemien käyttäytymistä taajuustasossa.
 - Tämän kurssin puitteissa keskitytään sinimuotoisen värähtelyn muuttumiseen sen kulkiessa dynaamisen systeemin läpi, mutta samat yleiset periaatteet tulevat pätemään myös muille deterministisille signaaleille ja kohinalle.
 - Viiveiden käsittely on taajuustasossa hyvin yksinkertaista. Esimerkiksi viiveellisten systeemien stabiilisuustarkastelu on helpointa tehdä taajuustasossa.
 - Taajuusanalyysiin perustuvat säätimet (vaiheen johto- ja jättöpiirit) perustuvat avoimen silmukan taajuuskarakteristikan modifiointiin halutuilla taajuuksilla.
 - Epälineaarille ja MIMO-systeemeille on kehitetty taajuusanalyysiin perustuvia säätösuunnittelumenetelmiä.

Esimerkki: Laaduntasaussäiliö

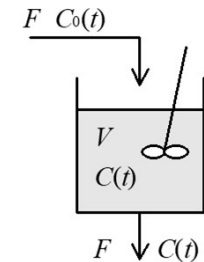
- Linjalta valmistuvan tuotteen ominaisuudet (pitoisuus $C_0(t)$) vaihtelevat, joten tuotantolinjan loppuun on asennettu laaduntasaussäiliö (ideaalisekoitin), jossa parempi- ja huonompilaatuiset jakeet sekoitetaan tuotekriteerit täyttäväksi lopulliseksi tuotteeksi (pitoisuus $C(t)$)

- Tutkitaan laaduntasaussäiliön taajuusominaisuuksia
- Systeemin malli:

$$\begin{aligned} V\dot{C}(t) &= FC_0(t) - FC(t) \\ \Rightarrow G(s) &= \frac{C(s)}{C_0(s)} = \frac{1}{\frac{V}{\tau}s + 1} = \frac{1}{\tau s + 1} \end{aligned}$$

- Heräte on nyt sinimuotoista värähtelyä:

$$\begin{aligned} C_0(t) &= u(t) = A_v \sin(\omega t) \\ \Rightarrow U(s) &= L\{u(t)\} = \frac{A_v \omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$



Esimerkki: Laaduntasaussäiliö

- Vaste:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{A_u \omega}{(\tau s + 1)(s^2 + \omega^2)}$$

$$\Rightarrow C(t) = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{A_u}{1 + (\tau\omega)^2} \left(\tau\omega e^{-\frac{t}{\tau}} + \sin(\omega t) - \tau\omega \cos(\omega t) \right)$$

- Trigonometriasta tiedetään, että

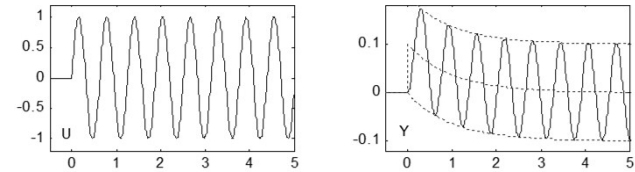
$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \arctan(b/a))$$

- Tällöin saadaan vasteelle:

$$C(t) = y(t) = \frac{A_u \tau\omega e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + (\tau\omega)^2} + \frac{A_u}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \sin(\omega t - \arctan(\tau\omega)) = y_a(t) + \bar{y}(t)$$

- Vaste muodostuu alkutransientista (ajan funktiona eksponentiaalisesti katoava osuus) ja jatkuvuustilan vasteesta (sinimuotoista värähtelyä).

Esimerkki: Laaduntasaussäiliö



- Kun heräte on sinimuotoista värähtelyä, niin jatkuvuustilan vaste on myös sinimuotoista värähtelyä, jolla on sama taajuus kuin herätteellä, mutta eri amplitudi A_y ja vaihesiirto φ .

$$\bar{y}(t) = \frac{A_u}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \sin(\omega t - \arctan(\tau\omega)) = A_y \sin(\omega t + \varphi)$$

- Nähdään, että vasteen amplitudi ja vaihesiirto ovat taajuuden funktioita

Esimerkki: Laaduntasaussäiliö

- Matalilla taajuuksilla vaste lähestyy herätettä ja korkeilla taajuuksilla nolla-amplitudista signaalia, jonka vaihe-ero on $-\pi/2$ (-90°).

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \{A_y\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{A_u}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \right\} = A_u, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{A_y\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{A_u}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \right\} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \{\varphi\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \{\arctan(\tau\omega)\} = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{\varphi\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{\arctan(\tau\omega)\} = \frac{\pi}{2}$$

- Oletetaan, että häiriöt ilmenevät taajuudella 1 (rad/s) virtauksen F ollessa 2 m³/s. Kuinka suuri laaduntasaussäiliö tarvitaan vaimentamaan häiriöt puoleen, kymmenesosaan tai sadasosaan?

$$\text{Amplitudisuhde } A = \frac{A_y}{A_u} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{F}\omega\right)^2}}$$

$$A = 0.5, \omega = 1, F = 2 \Rightarrow V = 2\sqrt{3} \approx 3.5 \text{ (m}^3\text{)}$$

$$A = 0.1, \omega = 1, F = 2 \Rightarrow V = 2\sqrt{99} \approx 19.9 \text{ (m}^3\text{)}$$

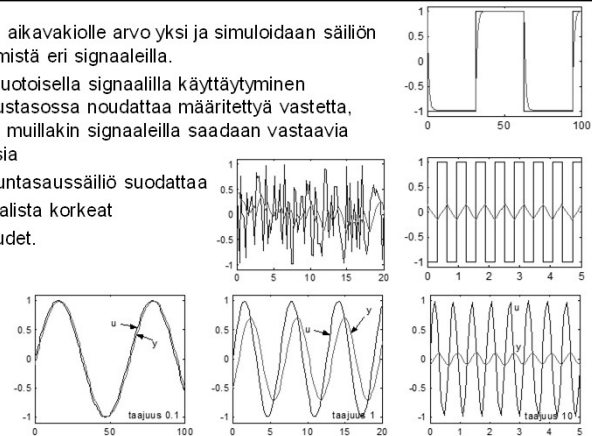
$$A = 0.01, \omega = 1, F = 2 \Rightarrow V = 2\sqrt{9999} \approx 200.0 \text{ (m}^3\text{)}$$

Esimerkki: Laaduntasaussäiliö

- Annetaan aikavakiolle arvo yksi ja simuloidaan säiliön käyttäytymistä eri signaaleilla.

- Sinimuotoisella signaalilla käyttäytyminen taajuustasossa noudattaa määritettyä vastetta, mutta muillakin signaaleilla saadaan vastaavia tuloksia

- Laaduntasaussäiliö suodattaa signaaleista korkeat taajuudet.



Fourier-muunnos ja taajuusvaste

- Taajuusfunktio saadaan muodostettua Fourier-muunnoksen avulla, joka on hyvin samankaltainen kuin Laplace-muunnos.

$$\text{Laplace-muunnos: } F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\text{Fourier-muunnos: } F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

- Jos funktio $f(t)$ on määritelty ainoastaan nollahetkestä eteenpäin ($t \geq 0$), kuten systeemi- ja säätötekniikassa tavallisesti on, niin Fourier ja Laplace-muunnokset yhtyvät. Tällöin systeemin taajuusvaste $F(\omega)$ saadaan siirtofunktiosta yksinkertaisesti sijoittamalla Laplace-muuttujan s tilalle $j\omega$ (j on imaginääriyksikkö). Taajuusanalyysissä käytetään tavallisesti $i:n$ sijasta $j:tä$.

$$\text{Taajuusvaste: } F(\omega) = G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$



9

Taajuusvaste

- Systeemin taajuusvaste on kompleksiluku ja se voidaan aina esittää muodossa, jossa reaali- ja imaginääriosat ovat erillään:

$$F(\omega) = G(j\omega) = \text{Re}\{G(j\omega)\} + j \cdot \text{Im}\{G(j\omega)\} \Rightarrow z = R + j \cdot X$$

- Yleisesti kompleksiluvun itseisarvo kuvaa vektorin pituutta ja napakulmaa kulmaa positiivisen reaaliakselin suhteen.

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \angle\{z\} = \arctan(X/R) + n\pi \end{cases} \begin{cases} n=0, & R > 0 \\ n=1, & R < 0 \end{cases}$$

- Taajuusanalyysissä systeemin amplitudisuhde A saadaan systeemiä kuvaavan taajuusvasteen itseisarvosta ja vaihe-ero φ napakulmasta

$$\begin{cases} A = |G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}\{G(j\omega)\}^2 + \text{Im}\{G(j\omega)\}^2} \\ \varphi = \angle\{G(j\omega)\} = \arctan(\text{Im}\{G(j\omega)\}/\text{Re}\{G(j\omega)\}) + n\pi \end{cases} \begin{cases} n=0, & \text{Re}\{G(j\omega)\} > 0 \\ n=1, & \text{Re}\{G(j\omega)\} < 0 \end{cases}$$

- Vaihe-eron laskemisessa on huomioitava, että reaali- ja imaginääriosien etumerkit saattavat kumota toisensa, joten se, missä kompleksitason neljänneksessä vektori sijaitsee, on tarkistettava erikseen.



10

Esimerkki: Laaduntasaussäiliö

- Lasketaan nyt taajuusvaste laaduntasaussäiliölle

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$\Rightarrow F(\omega) = G(j\omega) = \frac{1}{\tau j\omega + 1} = \frac{\tau j\omega - 1}{(\tau j\omega + 1)(\tau j\omega - 1)} = \frac{1}{(\tau\omega)^2 + 1} - j \frac{\tau\omega}{(\tau\omega)^2 + 1}$$

- Laaduntasaussäiliön amplitudisuhde A ja vaihe-ero φ ovat:

$$\begin{cases} A = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{((\tau\omega)^2 + 1)^2 + (\tau\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} \\ \varphi = \angle\{G(j\omega)\} = \arctan\left(\frac{-\tau\omega}{(\tau\omega)^2 + 1}\right) = -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

- Saadaan samat tulokset kuin laskemalla suoraan aikatason vasteesta



11

Taajuusvasteen graafiset esitykset

- Taajuusvaste voidaan määrittää teoreettisesti siirtofunktion perusteella (kuten edellisessä esimerkissä) tai kokeellisesti syöttämällä tutkittavaan systeemiin sinimuotoista herätettä ja mittaamalla vasteen amplitudisuhde sekä vaihe-ero eri taajuuksilla.

- Taajuusvasteelle käytetään kolmea erilaista graafista esitystapaa

- Boden diagrammi
 - Amplitudisuhde (tavallisesti desibeleinä) taajuuden funktiona ja vaihe-ero (tavallisesti asteina) taajuuden funktiona eri käyriä.
- Nyquistin diagrammi (polaaridiagrammi)
 - Systeemin taajuusvaste kompleksitasossa taajuuden muuttuessa nolasta äärettömään (tai negatiivisesta äärettömyydestä positiiviseen äärettömyyteen).
- Nicholsin kartta
 - Systeemin amplitudisuhde (tavallisesti desibeleinä) vaihe-eron (tavallisesti asteina) funktiona.



12

Esimerkki: Laaduntasaussäiliö

- Piirretään laaduntasaussäiliön taajuusvasteen graafiset diagrammit, kun aikavakio $\tau = 1$.

$$F(\omega) = G(j\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1} - j \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$$

$$A = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}, \quad A_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(A) \text{ dB}$$

$$\varphi = \angle \{G(j\omega)\} = -\arctan(\omega)$$

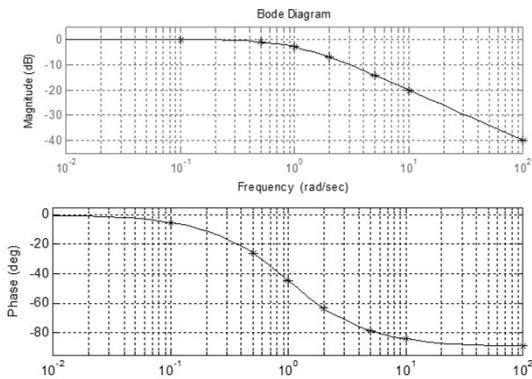
- Boden diagrammi esitetään tavallisesti logaritmisella asteikolla, joten valitaan mielenkiintoisiksi taajuuksiksi riittävän pieniä ja suuria taajuuksia, toisaalta Nyquistin diagrammi piirretään ei-logaritmisella asteikolla, joten valitaan taajuuksia myös aikavakion (1) molemmilta puolilta ei-logaritmisesti.
- Tulokset halutuilla taajuuksilla on esitetty oheisessa taulukossa

Esimerkki: Laaduntasaussäiliö

ω	$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	A	A/dB	φ/rad	φ/deg
0	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
0,001	1,00	0,00	1,00	0,00	-0,00	-0,06
0,1	0,99	-0,10	1,00	-0,04	-0,10	-5,71
0,5	0,80	-0,40	0,89	-0,97	-0,46	-26,57
1	0,50	-0,50	0,71	-3,01	-0,79	-45,00
2	0,20	-0,40	0,45	-6,99	-1,11	-63,43
5	0,04	-0,19	0,20	-14,15	-1,37	-78,69
10	0,01	-0,10	0,10	-20,04	-1,47	-84,29
100	0,00	-0,01	0,01	-40,00	-1,56	-89,43
1000	0,00	0,00	0,00	-60,00	-1,57	-89,94
10000	0,00	0,00	0,00	-80,00	-1,57	-89,99

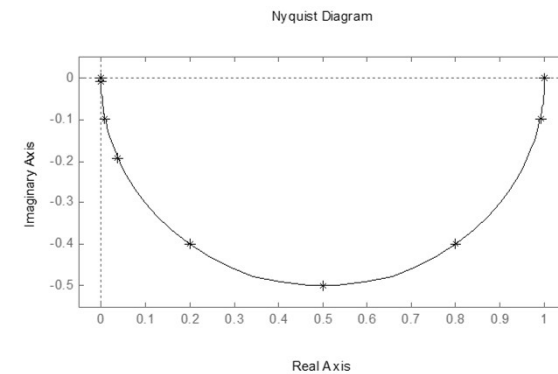
Esimerkki: Laaduntasaussäiliö

- Hahmotellaan Boden diagrammi



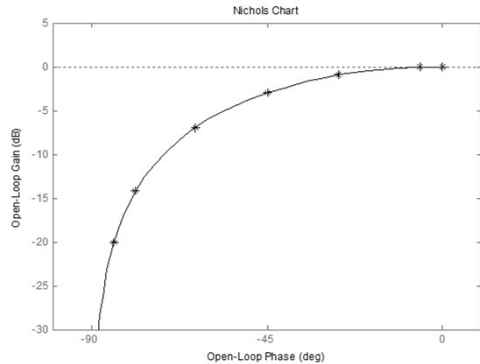
Esimerkki: Laaduntasaussäiliö

- Hahmotellaan Nyquistin diagrammi



Esimerkki: Laaduntasaussäiliö

- Hahmotellaan Nicholsin kartta



Taajuusvasteen graafiset esitykset

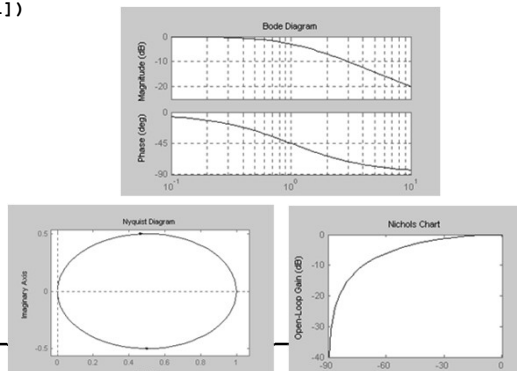
- Boden ja Nyquistin diagrammit sekä Nicholsin kartta kuvaavat kaikki systeemin taajuusvastetta, mutta kukin graafisista esityksistä on kehitetty erilaisin tarpeisiin
 - Boden diagrammi on ainoa, jossa on taajuusakseli mukana ja se soveltuu hyvin systeemin vahvistus- ja vaimennusominaisuuksien tarkasteluun mielenkiintoisilla taajuuksilla.
 - Nyquistin diagrammista puuttuu taajuusakseli, joten siitä ei nähdä mitä tapahtuu annetuilla taajuuksilla, mutta se soveltuu erittäin hyvin säädetyn järjestelmän stabiiliuustarkasteluun - kuten myöhemmin tällä luennolla tullaan näkemään.
 - Nicholsin kartta soveltuu säädetyn (takaisinkytketyn) järjestelmän taajuuskarakteristikan määrittämiseen - kun säätämätön prosessi tunnetaan. (Nicholsin karttaa käytetään nykyään harvemmin, eikä sitä käsitellä lähemmin tässä kurssissa).

Taajuusvaste MATLABissa

- Taajuusvasteen graafiset esitykset piirretään MATLABissa loogisesti komendoilla `bode`, `nyquist` ja `nichols`.

- `sys=tf(1,[1 1])`
- `bode(sys)`
- `grid`
- `nyquist(sys)`
- `nichols(sys)`

Nyquistin diagrammin toinen puolikas kuvaa taajuusvastetta, kun taajuus muuttuu neg. äärettömyydestä nollaan.



Taajuusvasteen tekijät

- Siirtofunktion jokainen tekijä (navat, nollat, viivetermit ja vakiot) on taajuustasossa kompleksiluku. Nämä kompleksiluvut voidaan laventaa, kertoa keskenään ja laskea yhteen siten, että saadaan lauseke, josta nähdään suoraan koko taajuusvasteen reaali- ja imaginääriosia ja edelleen amplitudisuhde ja vaihe-ero.
- Toisaalta voidaan laskea kunkin tekijän itseisarvo ja napakulma erikseen ja soveltaen kompleksilaskennan perussääntöjä muodostaa koko taajuusvasteen amplitudisuhde ja vaihe-ero tekijöiden avulla

Polaarikoordinaatit: $z = R + j \cdot X = r(\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)) = r e^{j\theta}$

$$\begin{cases} R = r \cos(\theta) \\ X = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \theta = \arctan(X/R) + n\pi \quad (n=0 \text{ jos } R > 0, n=1 \text{ jos } R < 0) \end{cases}$$

- Polaarikoordinaateilla on helppo johtaa tekijöiden tuloa ja osamäärän laskusäännöt:

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}, z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}, \quad z_1 / z_2 = r_1 e^{j\theta_1} / r_2 e^{j\theta_2} = r_1 / r_2 e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Taajuusvasteen tekijät

- Taajuustasossa osoittajan tekijöiden itseisarvot kerrotaan keskenään ja ne jaetaan nimittäjän tekijöiden itseisarvoilla. Osoittajan tekijöiden napakulmat lasketaan yhteen ja niistä vähennetään nimittäjän tekijöiden napakulmat.

$$G(s) = \frac{s-a}{(s-b)(s-c)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{j\omega-a}{(j\omega-b)(j\omega-c)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{|j\omega-a|}{|j\omega-b| \cdot |j\omega-c|} = \frac{\sqrt{\omega^2+a^2}}{\sqrt{\omega^2+b^2} \cdot \sqrt{\omega^2+c^2}}$$

$$\angle\{G(j\omega)\} = \angle\{j\omega-a\} - \angle\{j\omega-b\} - \angle\{j\omega-c\}$$

- Mikäli amplitudisuhteet esitetään desibeleinä, niin logaritmin laskusäännöistä saadaan

$$\log\left(\frac{P_1 P_2}{P_3}\right) = \log(P_1) + \log(P_2) - \log(P_3) \Rightarrow 20 \log_{10}(|G(j\omega)|)$$

$$= 20 \log_{10}\left(\frac{|j\omega-a|}{|j\omega-b| \cdot |j\omega-c|}\right) = 20 \cdot (\log_{10}|j\omega-a| - \log_{10}|j\omega-b| - \log_{10}|j\omega-c|)$$

A? Aalto-yliopisto

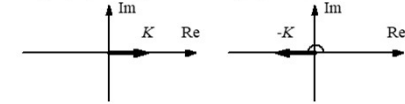
21

Taajuusvasteen tekijät: Vakiokerroin

- Vakiokerroin on puhtaasti reaalin komponentti, joten sen napakulma on joko nolla (positiivinen vakio) tai $\pm 180^\circ$ (negatiivinen vakio).

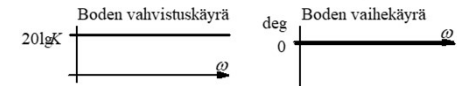
$$\begin{cases} G_1(s) = K \\ G_2(s) = -K \end{cases}, K > 0 \Rightarrow \begin{cases} |G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = K \\ \angle\{G_1(j\omega)\} = 0^\circ, \angle\{G_2(j\omega)\} = 180^\circ \end{cases}$$

- Polaarikoordinaateilla:

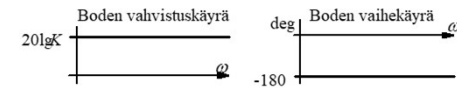


- Boden diagrammi

- G_1 :lle



- G_2 :lle



A? Aalto-yliopisto

22

Integraattori ja derivaattori

- Integraattori ja derivaattori ovat puhtaasti kompleksisia komponentteja, joten niiden napakulma on joko $+90^\circ$ (derivaattori) tai -90° (integraattori).

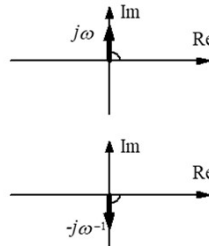
$$\begin{cases} G_1(s) = s \\ G_2(s) = \frac{1}{s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_1(j\omega) = j\omega \\ G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{1}{\omega}j \end{cases}$$

$$\begin{cases} |G_1(j\omega)| = \omega, |G_2(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \end{cases}$$

$$\angle\{G_1(j\omega)\} = 90^\circ, \angle\{G_2(j\omega)\} = -90^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \{G_1(j\omega)\} = 0 \cdot j, \lim_{\omega \rightarrow 0} \{G_2(j\omega)\} = -\infty \cdot j$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \{G_1(j\omega)\} = \infty \cdot j, \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{G_2(j\omega)\} = -0 \cdot j$$



A? Aalto-yliopisto

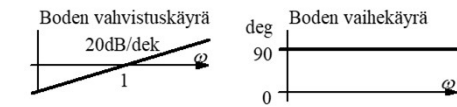
23

Integraattori ja derivaattori

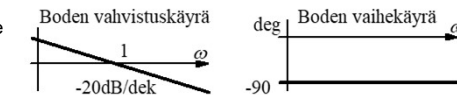
- Derivaattorin Boden vahvistuskäyrä nousee 20 desibeliä dekadia kohden ja se leikkaa 0-tason kulmataajuudella yksi.
- Integraattorin Boden vahvistuskäyrä laskee 20 desibeliä dekadia kohden ja se leikkaa 0-tason kulmataajuudella yksi.

- Boden diagrammi

- derivaattori G_1 :lle



- integraattori G_2 :lle



A? Aalto-yliopisto

24

Viivetermi

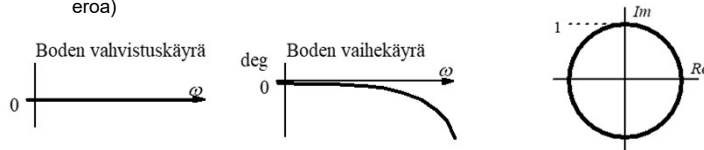
- Viiveen käsittely on hyvin helppoa taajuustasossa. Viive voidaan muuttaa kompleksiluvuksi Eulerin kaavoilla:

$$G(s) = e^{-sT} \Rightarrow G(j\omega) = e^{-j\omega T} = \cos(\omega T) - j \cdot \sin(\omega T)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\cos^2(\omega T) + \sin^2(\omega T)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\angle\{G(j\omega)\} = \arctan\left(\frac{-\sin(\omega T)}{\cos(\omega T)}\right) = -\arctan(\tan(\omega T)) = -\omega T$$

- Viive ei vaikuta amplitudisuhteeseen (ei vahvista eikä vaimenna), mutta sillä on huomattava vaikutus vaihe-eroon (viivästyttää signaalia ja lisää vaihe-eroa)



A? Aalto-yliopisto

25

Ensimmäisen kertaluvun termi

- Ensimmäisen kertaluvun termi eli reaalin napa tai nolla käsiteltiin laaduntasaussäiliöesimerkissä

$$\begin{cases} G_1(s) = Ts + 1 \\ G_2(s) = \frac{1}{Ts + 1}, T > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_1(j\omega) = Tj\omega + 1 \\ G_2(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1}, T > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \{G_1(j\omega)\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \{G_2(j\omega)\} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \{G_1(j\omega)\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{Tj\omega\} = \infty \cdot j, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{G_2(j\omega)\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{Tj\omega} \right\} = -\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T\omega} j \right\} = -0j$$

- Pienillä taajuuksilla ensimmäisen kertaluvun termi lähestyy vakiokerrointa 1 ja suurilla taajuuksilla derivaattoria (nolla) tai integraattoria (napa).

A? Aalto-yliopisto

26

Ensimmäisen kertaluvun termi

- Ensimmäisen kertaluvun termi eli reaalin napa tai nolla käsiteltiin laaduntasaussäiliöesimerkissä

$$\begin{cases} G_1(s) = Ts + 1 \\ G_2(s) = \frac{1}{Ts + 1}, T > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_1(j\omega) = Tj\omega + 1 \\ G_2(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1}, T > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \{G_1(j\omega)\} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \{G_2(j\omega)\} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \{G_1(j\omega)\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{Tj\omega\} = \infty \cdot j, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{G_2(j\omega)\} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{Tj\omega} \right\} = -\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T\omega} j \right\} = -0j$$

- Pienillä taajuuksilla ensimmäisen kertaluvun termi lähestyy vakiokerrointa 1 ja suurilla taajuuksilla derivaattoria (nolla) tai integraattoria (napa).

A? Aalto-yliopisto

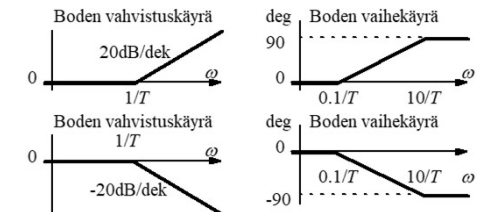
27

Ensimmäisen kertaluvun termi

- Approksimatiiviseen Boden diagrammiin saadaan käännepisteet (vahvistuskäyrään taajuudelle $1/T$ ja vaihekäyrään taajuuksille $0.1/T$ ja $10/T$).

- Boden diagrammi:

- G_1 :lle



- G_2 :lle

- Todellisuudessa Boden diagrammissa ei ole derivaatan epäjatkavuuskohtia. Approksimatiiviseen vahvistuskäyrään tulee 3 dB ja vaihekäyrään 6° virhe käännepisteissä.

A? Aalto-yliopisto

28

Toisen kertaluvun värähtelevä dynamiikka

- Toisen kertaluvun värähtelevä dynamiikka eli kompleksinen napapari aiheuttaa taajuustasoon resonanssitaajuuden ja Bode diagrammiin resonanssiipiikin.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + 2\zeta\omega_n \omega \cdot j}$$

$$= \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta(\omega/\omega_n) \cdot j} \quad \text{Resonanssitaajuus: } \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Toisen kertaluvun värähtelevä dynamiikka

- Bode vahvistuskäyräksi saadaan:

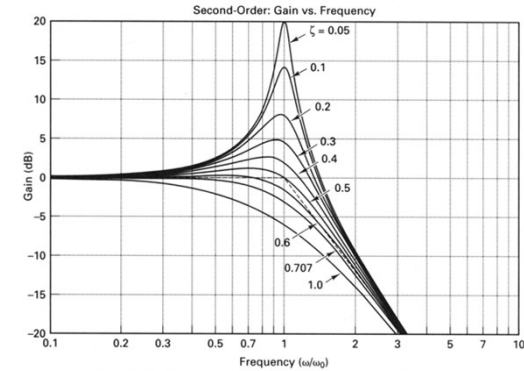
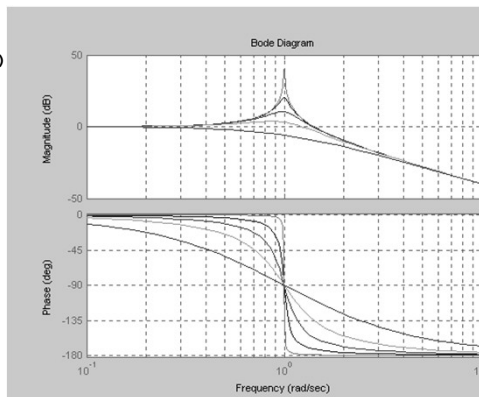


Figure 7.14 Gain versus frequency with a second-order all-pole model.

Yksinkertaisia taajuusvasteita

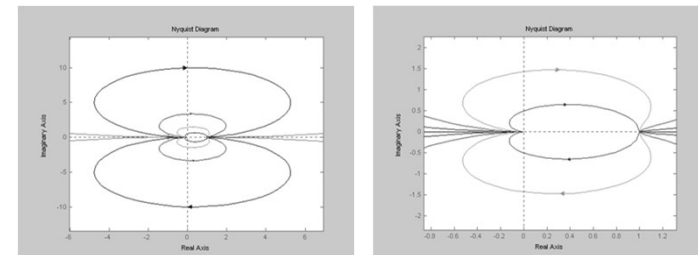
- Muodostetaan MATLABilla edellä esitettyjen yksinkertaisten systeemien taajuusvasteita:

- värähtelyt:
- `sys=tf(1,[1 0.01 1])`
- `bode(sys)`
- `sys=tf(1,[1 0.1 1])`
- `sys=tf(1,[1 0.3 1])`
- `sys=tf(1,[1 0.7 1])`
- `sys=tf(1,[1 2 1])`
- ...



Yksinkertaisia taajuusvasteita

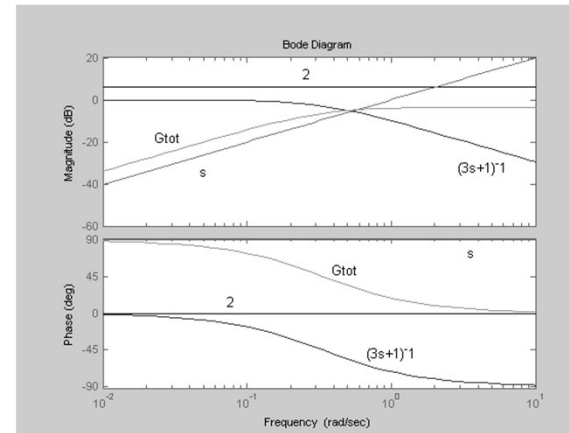
- Nyquistin diagrammissa resonanssi näkyy siinä, että käyrän etäisyys origosta kasvaa suuremmaksi kuin nollataajuudella.



Approksimatiivinen taajuusvaste

- Kaikki lineaaristen systeemien taajuusvasteet koostuvat edellä esitetyistä tekijöistä
 - Vaiheominaisuudet lasketaan yhteen ja vahvistusominaisuudet kerrotaan keskenään – paitsi jos vahvistus esitetään desibeleinä (logaritminen suure), jolloin nekin lasketaan yhteen.
 - Yhdistämällä näitä komponentteja keskenään saadaan haluttu taajuusvaste. Esimerkiksi: $G_{tot}(s) = \frac{2 \cdot s}{3s + 1}$
 - Koostuu tekijöistä: (2), (s) ja (3s+1)
 - Kullekin tekijälle voidaan erikseen piirtää taajuusvaste ja summata ne graafisesti. Tämä on erittäin käytännöllistä, kun kokeillaan säädetylle järjestelmälle erilaisia säätimiä. Piirretään systeemin taajuusvaste ja lisätään siihen vuorollaan erilaisia säätimiä, jonka jälkeen säädetyt järjestelmän suorituskykyä arvioidaan.

Approksimatiivinen taajuusvaste



Nyquistin stabiilisuuskriteeri

- Klassinen ("täydellinen") Nyquistin kriteeri:
 - Takaisinkytketty järjestelmä on stabiili, jos avoimen silmukan Nyquistin diagrammi kiertää pisteen -1 (-1+0j) vastapäivään täsmälleen yhtä monta kertaa kuin avoimen silmukan siirtofunktiolla on napoja oikeassa puolitasossa.
- Erikoistapaus Nyquistin kriteeristä:
 - Jos avoimen silmukan siirtofunktiolla ei ole lainkaan napoja oikeassa puolitasossa, niin takaisinkytketty järjestelmä on stabiili, jos avoimen silmukan Nyquistin diagrammi ei kierrä pistettä -1 (-1+0j) lainkaan.

$$Z = N + P$$

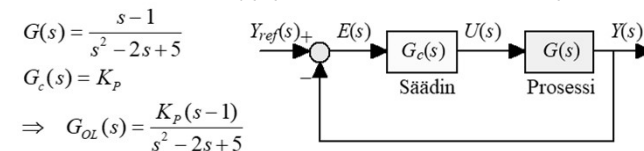
P: avoimen järjestelmän siirtofunktion napojen lkm. oikeassa puolitasossa.

N: Nyquistin diagrammin kiertojen lukumäärä pisteen (-1,0) ympäri myötäpäivään.

Z: Suljetun systeemin oikeassa puolitasossa olevien napojen lkm.

Nyquistin stabiilisuuskriteeri, esimerkki

- Systeemiä, jonka siirtofunktio on $G(s) = (s-1)/(s^2-2s+5)$ säädetään P-säätimellä. Onko säädetty järjestelmä stabiili K_p :n arvoilla 1, 4 ja 7.



$$G(s) = \frac{s-1}{s^2-2s+5}$$

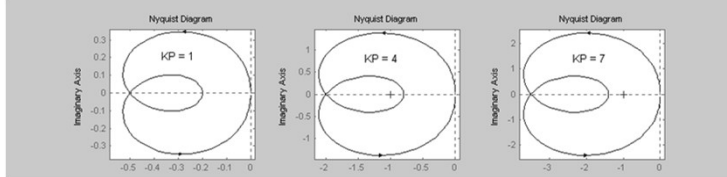
$$G_c(s) = K_p$$

$$\Rightarrow G_{ol}(s) = \frac{K_p(s-1)}{s^2-2s+5}$$

- Avoimen silmukan siirtofunktiolla on kaksi napaa oikeassa puolitasossa, joten Nyquistin diagrammin olisi kierrettävä piste -1 kaksi kertaa vastapäivään, jotta säädetty järjestelmä olisi stabiili.
- Piirretään Nyquistin diagrammi kullakin säätimen vahvistuksella.
 - `sys1=tf([1 -1],[1 -2 5])`
 - `sys2=tf(4*[1 -1],[1 -2 5])`
 - `sys3=tf(7*[1 -1],[1 -2 5])`
 - `nyquist(sys1) ...`

Nyquistin stabiilisuuskriteeri, esimerkki

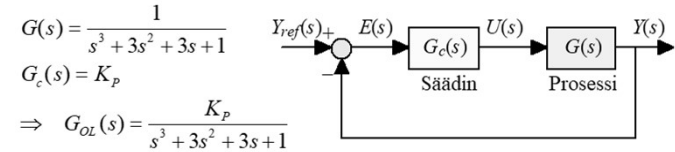
- Saadaan diagrammit



- K_p :n arvolla 1 Nyquistin diagrammi ei kierrä pistettä -1 lainkaan, joten säädetty järjestelmä on epästabiili.
- K_p :n arvolla 4 Nyquistin diagrammi kiertää pistettä -1 kaksi kertaa vastapäivään, joten säädetty järjestelmä on stabiili.
- K_p :n arvolla 7 Nyquistin diagrammi kiertää pistettä -1 kerran, joten säädetty järjestelmä on epästabiili.

Nyquistin stabiilisuuskriteeri, esimerkki

- Systemiä, jonka siirtofunktio on $G(s) = 1/(s+1)^3$ säädetään P-säätimellä. Onko säädetty järjestelmä stabiili K_p :n arvoilla 6, 8 ja 10.



$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

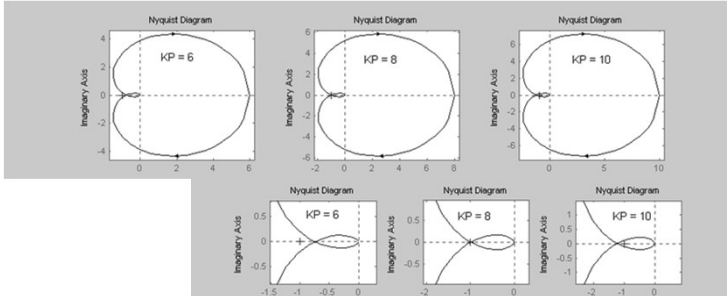
$$G_c(s) = K_p$$

$$\Rightarrow G_{OL}(s) = \frac{K_p}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

- Avoimen silmukan siirtofunktiolla ei ole lainkaan napoja oikeassa puolitasossa, joten Nyquistin diagrammi ei saa kiertää pistettä -1 lainkaan, jotta säädetty järjestelmä olisi stabiili.
- Piirretään Nyquistin diagrammi kullakin säätimen vahvistuksella.
 - `sys1=tf(6,[1 3 3 1])`
 - `sys2=tf(8,[1 3 3 1])`
 - `sys3=tf(10,[1 3 3 1])`
 - `nyquist(sys1) ...`

Nyquistin stabiilisuuskriteeri, esimerkki

- Saadaan diagrammit



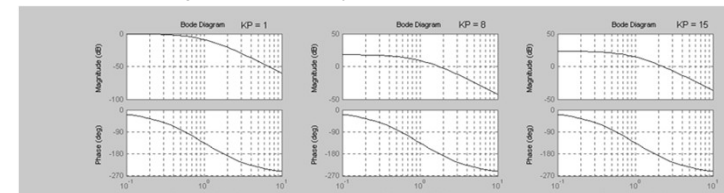
- K_p :n arvolla 6 säädetty järjestelmä on stabiili, arvolla 8 marginaalisesti stabiili ja arvolla 10 epästabiili.

Stabiilisuuskriteeri

- Nyquistin stabiilisuuskriteeri voidaan yksinkertaisissa tapauksissa esittää myös Bode diagrammissa ja Nicholsin kartassa. Tällöin stabiilisuuskriteeri (erikoistapaus, avoimen silmukan siirtofunktiolla ei ole napoja oikeassa puolitasossa) saa muodon:

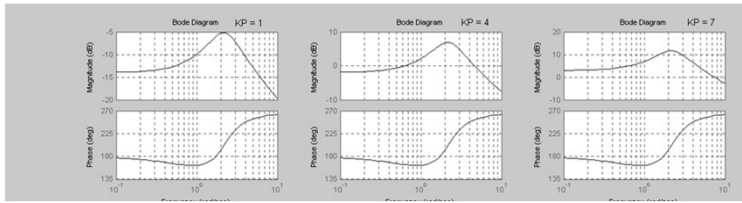
$$|G_{OL}(j\omega)| < 1 \quad (= 0 \text{ dB}), \text{ samalla taajuudella, jolla } \angle\{G_{OL}(j\omega)\} = -180^\circ$$

- Säädetty järjestelmä on stabiili, jos
- Tarkastellaan edellistä esimerkkiä.
 - K_p :n arvolla 1 säädetty järjestelmä on stabiili, arvolla 8 marginaalisesti stabiili ja arvolla 15 epästabiili.



Stabiilisuuskriteeri

- Jos piirretään Bode diagrammi ensimmäiselle esimerkille (avoimen silmukan siirtofunktiossa kaksi napaa oikeassa puolitasossa), niin saadut käyrät eivät kerro mitään stabiilisuudesta (eivätkä itse asiassa mitään avoimen silmukan amplitudisuhteesta tai muista värähtelyominaisuuksista. Säättämätön systeemi on epästabiili, joten sen vaste menee jatkuvuustilassa äärettömään.

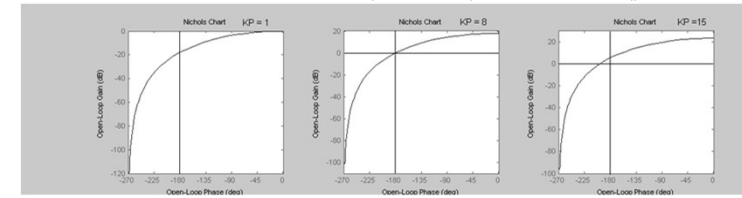


A? Aalto-yliopisto

41

Stabiilisuuskriteeri

- Tarkastellaan vielä stabiilisuuskriteeriä Nicholisin kartassa erikoistapauksessa, jossa avoimen silmukan siirtofunktiolla ei ollut napoja oikeassa puolitasossa.
 - $|G_{OL}(j\omega)| < 1$ (= 0 dB), samalla taajuudella, jolla $\angle\{G_{OL}(j\omega)\} = -180^\circ$
- Ensimmäisessä kuvassa systeemi on stabiili, toisessa marginaalisesti stabiili ja kolmannessa epästabiili.
 - Nicholisin kartassa säädetty järjestelmä on stabiili, jos avoimen silmukan siirtofunktio kiertää pisteen -1 (0 dB, -180°) oikealta puolelta (ylhäältä)



A? Aalto-yliopisto

42

Vahvistus- ja vaihevarat

- Vahvistus- ja vaihevarat kertovat kuinka kaukana säädetty järjestelmä on epästabiilisuudesta ja kuinka paljon avoimen silmukan vahvistusta voidaan vielä kasvattaa ilman että säädetystä järjestelmästä tulee epästabiili.
- Sekä vahvistus- että vaihevarassa tutkitaan kuinka kaukana avoimen silmukan taajuusfunktio on kriittisestä pisteestä -1 (eli kuinka kaukana ollaan stabiilisuusrajoista)
- Vahvistusvarassa määritetään kuinka kaukana systeemin amplitudisuhte on kriittisestä amplitudisuhteesta 1 (eli 0 dB) - silloin kun napakulma saa kriittisen arvon -180° .
- Vaihevarassa määritetään kuinka kaukana systeemin napakulma on kriittisestä napakulmasta -180° - silloin kun amplitudisuhte saa kriittisen arvon 1 (0 dB).
- Vahvistus- ja vaihevarat voidaan määrittää Nyquistin diagrammista (tai erikoistapauksessa myös Bode diagrammista tai Nicholisin kartasta)
- Ehdollisesti stabiileilla järjestelmillä (useita peräkkäisiä stabiilisuuden ja epästabiilisuuden jaksoja eri vahvistuksen arvoilla) saadaan useita samanaikaisia vahvistus- ja vaihevaroja.

A? Aalto-yliopisto

43

Vahvistus- ja vaihevarat

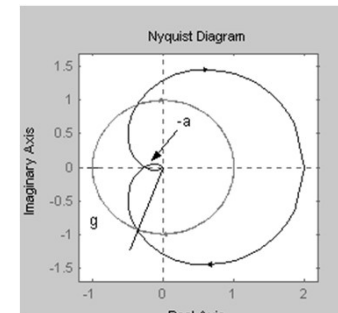
- Nyquistin diagrammissa vaihevarat saadaan yksikköympyrän ja Nyquistin diagrammin leikkauspisteistä ja vahvistusvarat negatiivisen reaaliakselin ja Nyquistin diagrammin leikkauspisteistä.

Nyquistin diagrammi leikkaa negatiivisen reaaliakselin pisteessä $-a$

Vahvistusvara on $1/a$

Negatiivisesta reaaliakselista on g :n suuruinen kulma Nyquistin diagrammin ja yksikköympyrän leikkauspisteeseen

Vaihevara on g



A? Aalto-yliopisto

44

Vahvistus- ja vaihevarat

- Boden diagrammissa vaihevarat saadaan etäisyyksinä kriittisestä taajuudesta ja vahvistusvarat etäisyyksinä kriittisestä vahvistuksesta

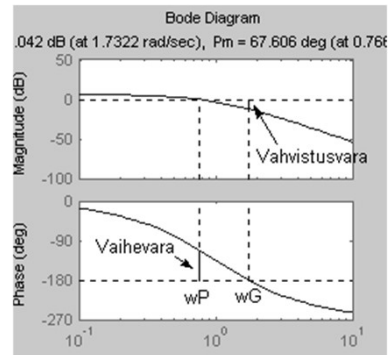
Määritetään kulmataajuus, jolla vaihekäyrä leikkaa kriittisen napakulman -180° . (ω_G) ja kulmataajuus, jolla vahvistuskäyrä leikkaa kriittisen vahvistuksen 0 dB (ω_P)

Vahvistusvara on

$$0\text{dB} - 20\log_{10} |G_{OL}(j\omega_G)| \text{ dB}$$

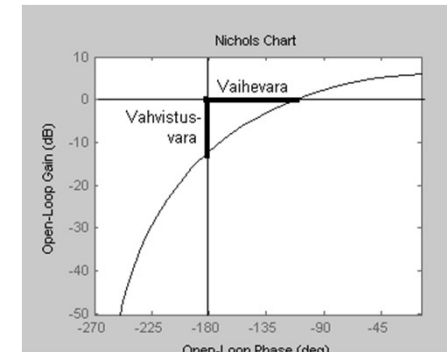
Vaihevara on

$$180^\circ + \angle\{G_{OL}(j\omega_P)\}$$



Vahvistus- ja vaihevarat

- Nicholsin kartassa vahvistus- ja vaihevarat saadaan etäisyyksinä kriittisestä pisteestä -1 (0 dB, 180°)



Vahvistus- ja vaihevarat MATLABissa

- MATLABissa vahvistus ja vaihevarat saadaan komennolla `margin`
- esim:

- `sys=tf(2,[1 3 3 1])`

- Transfer function:

2

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

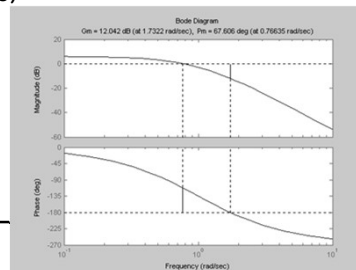
- `[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin(sys)`

Gm = 4.0006

Pm = 67.6058

Wcg = 1.7322

Wcp = 0.7663



Avoimen silmukan vahvistus

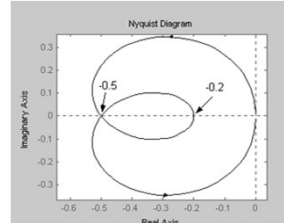
- Vahvistusvara kertoo kuinka paljon avoimen silmukan vahvistusta voi vielä kasvattaa ilman että säädetty järjestelmä muuttuisi epästabiiliksi. Miten avoimen silmukan vahvistuksen muuttaminen sitten vaikuttaa taajuusvasteeseen?
- Mikäli vahvistus säilyy samanmerkkisenä, napakulma pysyy ennallaan (tämän opintojakson puitteissa tarkastellaan lähinnä positiivista vahvistusta).
- Taajuusvasteen kertominen vakiolla K ei vaikuta mitenkään vaihe-eroon, mutta amplitudisuhde kasvaa K -kertaiseksi.
 - Nyquistin diagrammissa jokainen diagrammin piste siirtyy K -kertaa kauemmas origosta
 - Boden diagrammissa vahvistuskäyrä nousee $20\log K$:n verran ylös (tai alas, jos K on ykköstä pienempi)
 - Nicholsin kartassa taajuusvaste nousee $20\log K$:n verran ylös (tai alas, jos K on ykköstä pienempi)
- Vahvistusvara kertoo suoraan kuinka monikertaiseksi vahvistusta voidaan kasvattaa.

Stabiilisuusrajat

- Palataan edelliseen esimerkkiin, jossa oli hankala epästabiili ja ei-minimivaiheinen systeemi, jota säädettiin P-säätimellä. Esimerkissä todettiin, että säädetty järjestelmä on epästabiili K_p :n arvoilla 1 ja 7, mutta stabiili arvolla 4.
- Määritetään nyt säädetyin järjestelmän stabiilisuusalue (K_p :n suhteen).
- Kun piirretään avoimen silmukan siirtofunktion Nyquistin diagrammi K_p :n arvolla 1, niin negatiivisen reaaliakselin leikkauspisteet ovat -0.2 ja -0.5. Stabiilille alueelle pääsemiseksi tarvitaan lisävahvistus välillä $1/0.2 = 5$ ja $1/0.5 = 2$.

Nyquistin käyrä on saatava kiertämään piste -1 kahdesti vastapäivään, jotta säädetty järjestelmä olisi stabiili, joten vahvistus on kerrottava vähintään kaksinkertaiseksi, jotta päästään pisteeseen -1. Toisaalta, jos vahvistus kerrotaan yli viisinkertaiseksi, niin saadaan vain yksi kierros vastapäivään ja säädetyistä järjestelmästä tulee jälleen epästabiili.

Saadaan stabiilisuusrajat: $2 \leq K_p \leq 5$



Stabiilisuus taajuustasossa

- Edellinen esimerkki olisi voitu aivan yhtä hyvin ratkaista Routhin kaaviolla – Voidaanko taajuustason stabiilisuusanalyysillä tehdä jotain, mihin Routhin kaavio ei taivu?
- Myöhemmillä opintojaksoilla tullaan tutustumaan Nyquistin stabiilisuuskriteerin modifikaatioihin, joita voidaan soveltaa esimerkiksi epälineaarisille ja monimuuttujasysteemeille (tämän opintojakson aihepiirin ulkopuolella).
- Taajuusvasteeseen perustuvalla stabiilisuustarkastelulla on se etu, että taajuusvaste voidaan määrittää tuntemattomasta systeemistä kokeellisesti.
- On yksi sovellusalue, jossa stabiilisuustarkastelu taajuusvasteen avulla vie voiton kaikista muista menetelmistä ... viiveellisten säädettyjen järjestelmien analyysi.

Viiveellisen systeemin säätö

- Lähes kaikissa todellisissa systeemeissä on kuollutta aikaa, mutta usein se oletetaan merkityksettömäksi ja jätetään tarkastelun ulkopuolelle.
- On kuitenkin varsin selvää, että viiveellä on huomattava vaikutus säädetyin järjestelmän käyttäytymiseen ja erityisesti stabiilisuuteen
 - Otetaan esimerkiksi auton ohjaaminen mutkaisella tiellä: Jos ratin kääntämisen seurauksena pyörät välittömästi kääntyvät, niin auton hallinta on helppoa ja tiellä voidaan edetä reipasta vauhtia. Entä jos ratin kääntämisen seurauksena pyörät kääntyisivät vasta kolmen sekunnin viiveellä? Suurilla nopeuksilla auto muuttuisi epästabiiliksi ja päätyisi ojaan, joten ainoa ratkaisu on madella eteenpäin hyvin hitaasti (tai käyttää kehittyneitä prediktioivisiä hallintastrategioita...).
- Tarkastellaan samaa läpivirtausprosessia, joka esiteltiin luennon alussa. Nyt ei tydytä pelkästään suodattamaan häiriöitä vaan ne pyritään säätämään pois syöttämällä säiliöön erilaisia pitoisuuksia. Tutkitaan stabiilius ensin olettaen, että systeemi on viiveetön ja katsotaan, miten tilanne muuttuu jos ohjausvirtaus syötetään putken (tulppavirtaus) kautta jolloin systeemiin tulee kuollutta aikaa.

Viiveellisen systeemin säätö

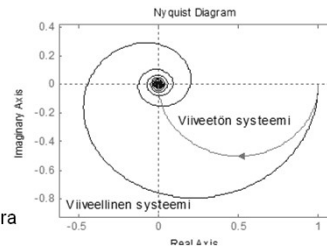
- Viiveetön systeemi: $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$
- Viiveellinen systeemi: $G_2(s) = \frac{e^{-T_d s}}{s+1}$
- Viiveetön systeemin säätö P-säätimellä: $G_{TOT}(s) = \frac{K_p}{s+1+K_p}$
- Viiveetön järjestelmä on stabiili kaikilla positiivisilla K_p :n arvoilla
- Viiveellinen systeemi:

$$G_{2,ol}(s) = \frac{K_p e^{-T_d s}}{s+1} \Rightarrow |G_{2,ol}(j\omega)| = \frac{|K_p| |1|}{|j\omega+1|} = \frac{K_p}{|j\omega+1|}$$

$$\angle\{G_{ol}(j\omega)\} = \angle\{K_p\} + \angle\{e^{-T_d j\omega}\} - \angle\{j\omega+1\} = -\angle\{j\omega+1\} - T_d \omega$$
- Ratkaistaan esim. Nyquistin diagrammilla MATLABissa (viive $T_d = 1$, piirretään diagrammi K_p :n arvolla 1)

Viiveellisen systeemin säätö

- `sys=tf(1,[1 1])`
- `sys.InputDelay=1`
- `w=logspace(-10,10,10000)'` ;
- `sys2=tf(1,[1 1])`
- `nyquist(sys,sys2,w)`
- Saadaan Nyquistin diagrammit:



- Viiveettömän järjestelmän vahvistusvara on ääretön
- Viiveellisen järjestelmän vahvistusvara on $1/0.4421 = 2.26$
 - Eli viiveetön järjestelmä on stabiili kaikilla positiivisilla K_p :n arvoilla ja viiveellinen järjestelmä on stabiili, kun $K_p < 2.26$.
- Simuloidaan kumpaakin järjestelmää

Viiveellisen systeemin säätö

- Säädetyin, viiveellisen systeemin stabiisuus noudattaa Nyquistin kriteerillä määritetty stabiisuusraja.

